Sur les groupes linéaires quaternioniens.

Par

ELIE CARTAN (Paris).

(Als Manuskript eingegangen am 15. März 1940.)

Les groupes linéaires quaternioniens unilatéraux, à variables et paramètres quaternioniens, se sont présentés dans un certain nombre de questions de Géométrie, en particulier dans la Géométrie projective quaternionienne, étudiée récemment par S. WACHS.[1]) Mais le champ total de leurs applications géométriques n'a pas été à ma connaissance étudié systématiquement. Il m'a semblé que dans ce Volume dédié à RUDOLF FUETER, dont une partie importante de l'activité scientifique a été consacrée à la théorie des fonctions de variables quaternioniennes, une étude de ce genre ne serait pas déplacée. Je me bornerai du reste à établir le théorème fondamental qui domine toute la question.

I. Généralités.

1. Les groupes linéaires quaternioniens que nous considérerons sont formés de substitutions linéaires de la forme[2])

(1) $$(X^\alpha)' = A^\alpha_\beta X^\beta \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n),$$

où interviennent n variables quaternioniennes X^α et n^2 coefficients quaternioniens A^α_β. Il est entendu une fois pour toutes que tous les quaternions introduits sont de la forme $a + bi + cj + dk$, où a, b, c, d sont des nombres réels et où les trois unités imaginaires i, j, k satisfont aux relations

(2) $$i^2 = j^2 = k^2 = -1; \; jk = -kj = i; \; ki = -ik = j; \; ij = -ji = k.$$

Nous identifierons i à l'unité imaginaire du corps des nombres

[1]) S. WACHS. Essai sur la géométrie projective quaternionienne, Thèse (Mémoires Acad. Belgique, 1936).

[2]) Le signe de sommation par rapport à l'indice β est supprimé. La substitution (1) est dite unilatérale gauche; nous ne considérerons que celles-là.

complexes ordinaires, de sorte qu'un quaternion pour lequel $c=d=0$ sera assimilé à un nombre complexe ordinaire.

2. On aura par définition un groupe *équivalent* au groupe (1) en substituant aux variables X^α d'autres variables en même nombre $\overset{\omega}{X}{}^\alpha$, combinaisons linéaires unilatérales gauches des X^α:

(3) $$X^\alpha = C^\alpha_\beta X^\beta,$$

où l'on suppose le nabla[3]) des coefficients C^α_β différent de zéro. Les coefficients B^α_β des équations du nouveau groupe:

$$(X^\alpha)' = B^\alpha_\beta \overset{\omega}{X}{}^\beta$$

sont donnés par les équations

(4) $$B^\alpha_\lambda C^\lambda_\beta = C^\alpha_\lambda A^\lambda_\beta \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n),$$

résolubles par rapport aux B^β_α.

3. Un groupe linéaire quaternionien Γ sera dit *irréductible* s'il est impossible de trouver un groupe équivalent pour lequel les $p<n$ premières variables $\overset{\omega}{X}{}^1, \overset{\omega}{X}{}^2, \ldots, \overset{\omega}{X}{}^p$ sont transformées linéairement entre elles, c'est-à-dire pour lequel tous les coefficients B^α_β $(\alpha = 1, 2, \ldots, p;\ \beta = p+1, p+2, \ldots, n)$ sont nuls. Dans le cas contraire le groupe est dit *réductible*.

Nous pouvons interpréter les n variables X^α comme définissant un point de l'espace projectif quaternionien à $n-1$ dimensions (quaternioniennes), en convenant que les quaternions $X^\alpha H$, où H est un quaternion fixe non nul, définissent le même point que les quaternions X^α. Il est à remarquer qu'en substituant aux variables X^α les variables $X^\alpha H$, les coefficients A^α_β des équations (1) ne changent pas. *Cette remarque triviale a une grande importance pour la suite.*

Nous pourrons dire que le groupe (1) est un groupe d'homographies dans l'espace projectif quaternionien à $n-1$ dimensions. Tout groupe équivalent représente analytiquement le même groupe d'homographies dans ce même espace.

4. A tout groupe linéaire quaternionien Γ on peut associer le groupe linéaire à coefficients réels G qui indique comment Γ transforme entre elles les variables réelles x^α, y^α, z^α, t^α qui entrent dans la définition de la variable quaternionienne

$$X^\alpha = x^\alpha + iy^\alpha + jz^\alpha + kt^\alpha.$$

Quand on remplace Γ par un groupe équivalent, on remplace les $4n$ variables de G par $4n$ combinaisons linéaires réelles indépendantes.

---

[3]) Pour la notion de *nabla*, voir S. Wachs, *loc. cit.*[1], p. 15 et suivantes.

Le groupe G n'est pas un groupe linéaire quelconque. En effet les équations (1) ne changeant pas quand on remplace par exemple X^α par $X^\alpha i$, le groupe G est invariant par la transformation

$$x^\alpha + iy^\alpha + jz^\alpha + kt^\alpha \to (x^\alpha + iy^\alpha + jz^\alpha + kt^\alpha)\, i = -y^\alpha + ix^\alpha + jt^\alpha - kz^\alpha,$$

ou encore

$$x^\alpha \to -y^\alpha,\quad y^\alpha \to x^\alpha,\quad z^\alpha \to t^\alpha,\quad t^\alpha \to -z^\alpha. \tag{5}$$

Cette transformation, où on interprète x^α, y^α, z^α, t^α comme les coordonnées homogènes d'un point dans l'espace projectif réel à $4n-1$ dimensions, définit une involution elliptique, dont les deux variétés planes (imaginaires) invariantes sont l'une

$$x^\alpha + iy^\alpha = 0,\quad z^\alpha - it^\alpha = 0,$$

l'autre

$$x^\alpha - iy^\alpha = 0,\quad z^\alpha + it^\alpha = 0.$$

Il en résulte que les $2n$ variables complexes

$$u^\alpha = x^\alpha + iy^\alpha,\quad v^\alpha = z^\alpha - it^\alpha \tag{6}$$

sont transformées linéairement entre elles par le groupe G; il en est de même des variables $\bar{u}^\alpha$, $\bar{v}^\alpha$ conjuguées des précédentes. On peut donc dire que, dans le corps des nombres complexes, le groupe G se décompose en deux groupes linéaires G_1 et G_2 au même nombre $2n$ de variables; les variables de G_1 sont les u^α et les v^α, celles de G_2 sont les $\bar{u}^\alpha$ et les $\bar{v}^\alpha$.

5. On peut ajouter que les deux groupes G_1 et G_2 sont équivalents dans le corps des nombres complexes. En effet les équations (1) ne changent pas quand on change X^α en $X^\alpha j$, ce qui correspond à la transformation

$$x^\alpha + iy^\alpha + jz^\alpha + kt^\alpha \to (x^\alpha + iy^\alpha + jz^\alpha + kt^\alpha)\, j = -z^\alpha - it^\alpha + jx^\alpha + ky^\alpha,$$

ou

$$x^\alpha \to -z^\alpha,\quad y^\alpha \to -t^\alpha,\quad z^\alpha \to x^\alpha,\quad t^\alpha \to y^\alpha,$$

ou encore

$$u^\alpha \to -\bar{v}^\alpha,\quad v^\alpha \to \bar{u}^\alpha. \tag{7}$$

Cette transformation, changeant les variables de G_1 dans celles de G_2 et inversement, assure l'équivalence de ces deux groupes. En regardant les u^α et les v^α comme les coordonnées homogènes d'un point dans l'espace projectif complexe à $2n-1$ dimensions, cette transformation (7) est une antiinvolution de deuxième espèce.[4])

---

[4]) Voir C. SEGRE. Un nuovo campo di ricerche geometriche II (Atti Accad. Torino, 25, 1889, p. 430—457) et E. CARTAN Leçons sur la géométrie projective complexe (Paris, Gauthier-Villars, 1931, p. 124).

6. Ces résultats peuvent être vérifiés facilement par le calcul. Remarquons d'abord que tout quaternion peut être mis d'une manière et d'une seule sous la forme $a+jb$, où a et b désignent deux nombres complexes ordinaires; on a du reste $jb=\bar{b}j$. On voit tout de suite, d'après (6), qu'on a

$$X^\alpha = u^\alpha + jv^\alpha .$$

Posons alors

$$A^\alpha_\beta = a^\alpha_\beta + jb^\alpha_\beta ;$$

les équations (1) deviennent

$$\text{(8)} \qquad \begin{cases} (u^\alpha)' = a^\alpha_\beta u^\beta - \bar{b}^\alpha_\beta v^\beta , \\ (v^\alpha)' = b^\alpha_\beta u^\beta + \bar{a}^\alpha_\beta v^\beta ; \end{cases}$$

ce sont les équations du groupe G_1. Celles de G_2 sont

$$\text{(9)} \qquad \begin{cases} (\bar{u}^\alpha)' = \bar{a}^\alpha_\beta \bar{u}^\beta - b^\alpha_\beta \bar{v}^\beta , \\ (\bar{v}^\alpha)' = \bar{b}^\alpha_\beta \bar{u}^\beta + a^\alpha_\beta \bar{v}^\beta ; \end{cases}$$

on voit immédiatement qu'elles se déduisent des équations (8) en remplaçant respectivement u^α, v^α par $-\bar{v}^\alpha$, $\bar{u}^\alpha$. D'où le

Théorème I. — *Le groupe réel G associé à un groupe linéaire quaternionien Γ se décompose, dans le corps des nombres complexes, en deux groupes équivalents, dont chacun admet une antiinvolution de seconde espèce.*

On peut ajouter d'une manière plus précise que chaque substitution linéaire de G_1 est invariante par l'antiinvolution.

7. Si l'on passe du groupe donné Γ à un groupe équivalent, on substitue aux variables X^α les variables $\overset{\infty}{X}{}^\alpha = C^\alpha_\beta X^\beta$.

En posant

$$C^\alpha_\beta = c^\alpha_\beta + jd^\alpha_\beta ,$$

on en déduit les nouvelles variables

$$\text{(10)} \qquad \begin{cases} \overset{\infty}{u}{}^\alpha = c^\alpha_\beta u^\beta - \bar{d}^\alpha_\beta v^\beta , \\ \overset{\infty}{v}{}^\alpha = d^\alpha_\beta u^\beta + \bar{c}^\alpha_\beta v^\beta , \end{cases}$$

et l'antiinvolution (7), consistant à remplacer X^α par $X^\alpha j$, revient à remplacer $\overset{\infty}{X}{}^\alpha$ par $\overset{\infty}{X}{}^\alpha j$; elle se traduit toujours, avec les nouvelles variables $\overset{\infty}{u}{}^\alpha$, $\overset{\infty}{v}{}^\alpha$, par les mêmes formules (7). On voit facilement que réciproquement tout changement linéaire de variables portant sur les u^α et les v^α et respectant l'antiinvolution (7) est donné par les formules (10); à une nouvelle variable $\overset{\infty}{u} = c_\beta u^\beta - \bar{d}_\beta v^\beta$

doit en effet correspondre une variable $\overset{\omega}{v} = p_\beta u^\beta + q_\beta v^\beta$ telle que l'on ait

$$-c_\beta \bar{v}^\beta - \bar{d}_\beta \bar{u}^\beta = -(\bar{p}_\beta u^\beta + \bar{q}_\beta v^\beta), \text{ ou } p_\beta = d_\beta, \; q_\beta = \bar{c}_\beta.$$

Nous dirons que les variables $\overset{\omega}{u}{}^\alpha$, $\overset{\omega}{v}{}^\alpha$ données par (10) sont *adaptées* à l'antiinvolution considérée (7). Tout choix de variables adaptées correspond à un groupe quaternionien équivalent au groupe initial. On voit que $\overset{\omega}{v}{}^\alpha$ se déduit de $\overset{\omega}{u}{}^\alpha$ en prenant la transformée de $\overset{\omega}{u}{}^\alpha$ par l'antiinvolution, puis la complexe conjuguée changée de signe de cette transformée.

II. Position du problème.

8. Posons-nous le problème suivant. *Etant donné un groupe linéaire G de degré $4n$ à variables et coefficients réels, est-il possible de former n quaternions X^α dont les $4n$ composantes soient $4n$ combinaisons linéaires réelles indépendantes des $4n$ variables de G, satisfaisant à la condition que le groupe G transforme les n quaternions X^α suivant un groupe linéaire quaternionien unilatéral gauche Γ irréductible?*

Il est clair que si le problème comporte une solution, il en comporte une infinité, ne serait-ce qu'en remplaçant Γ par un groupe équivalent. Deux solutions du problème sont géométriquement les mêmes si elles définissent le même groupe d'homographies dans le même espace projectif quaternionien. Il faut et il suffit pour cela qu'on passe des variables X^α de la première solution aux variables $\overset{\omega}{X}{}^\alpha$ de la seconde par des relations de la forme

(11) $$\overset{\omega}{X}{}^\alpha = C^\alpha_\beta X^\beta H.$$

Nous nous restreindrons au cas où toutes les solutions du problème sont géométriquement les mêmes, c'est-à-dire au cas où toute solution $\overset{\omega}{X}{}^\alpha$ se déduit d'une solution particulière X^α par des formules telles que (11). Il est clair en effet que c'est dans ce seul cas que le groupe G peut être interprété comme un groupe d'homographies dans un espace projectif quaternionien défini sans ambiguïté.

9. Il y a un cas où le problème ne comporte pas une solution géométriquement unique, c'est celui où le groupe Γ de variables X^α admet un groupe équivalent pour lequel les coefficients des substitutions (1) sont tous des nombres complexes ordinaires.

Nous dirons qu'un groupe linéaire quaternionien de cette nature est de seconde classe.

Supposons en effet les coefficients A^α_β complexes ordinaires. Les formules (8), où on fait $b^\alpha_\beta = 0$, donnent pour équations du groupe

$$\left\{\begin{aligned}(u^\alpha)' &= a^\alpha_\beta u^\beta,\\ (v^\alpha)' &= \bar{a}^\alpha_\beta v^\beta;\end{aligned}\right. \tag{8'}$$

posons alors

$$\left\{\begin{aligned}\overset{\omega}{u}{}^\alpha &= m u^\alpha + n \bar{v}^\alpha,\\ \overset{\omega}{v}{}^\alpha &= p \bar{u}^\alpha + q v^\alpha,\end{aligned}\right. \tag{12}$$

m, n, p, q étant des constantes complexes ordinaires. On aura, par toute transformation du groupe G,

$$(\overset{\omega}{u}{}^\alpha)' = a^\alpha_\beta \overset{\omega}{u}{}^\beta,$$

$$(\overset{\omega}{v}{}^\alpha)' = \bar{a}^\alpha_\beta \overset{\omega}{v}{}^\beta.$$

D'autre part les formules (12) donnent pour $\overset{\omega}{x}{}^\alpha$, $\overset{\omega}{y}{}^\alpha$, $\overset{\omega}{z}{}^\alpha$, $\overset{\omega}{t}{}^\alpha$ quatre combinaisons linéaires indépendantes de x^α, y^α, z^α, t^α si $m\bar{q} - n\bar{p} \neq 0$. En posant alors

$$\overset{\omega}{X}{}^\alpha = \overset{\omega}{u}{}^\alpha + j \overset{\omega}{v}{}^\alpha, \tag{13}$$

on voit immédiatement que les variables quaternioniennes $\overset{\omega}{X}{}^\alpha$ sont transformées linéairement entre elles comme l'étaient initialement les variables X^α. La solution fournie par les $\overset{\omega}{X}{}^\alpha$ n'est pas géométriquement la même que celle fournie par les X^α. Si elle l'était en effet, on aurait une relation de la forme

$$m u^\alpha + n \bar{v}^\alpha + j(p \bar{u}^\alpha + q v^\alpha) = C(u^\alpha + j v^\alpha) H, \tag{14}$$

C et H étant deux quaternions fixes non nuls. Posons

$$C = \alpha + j\beta, \quad H = \gamma + j\delta,$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ étant quatre constantes complexes ordinaires. On trouve, en identifiant,

$$\beta = 0, \quad m = \alpha\gamma, \quad q = \bar{\alpha}\gamma, \quad n = -\alpha\delta, \quad p = \bar{\alpha}\delta,$$

ce qui exige

$$\frac{m}{q} = -\frac{n}{p} = e^{i\theta},$$

θ étant réel. Ce n'est donc qu'exceptionnellement que la solution fournie par les $\overset{\omega}{X}{}^\alpha$ est géométriquement la même que celle fournie par les X^α.

Les groupes linéaires quaternioniens de la seconde classe ne répondent donc pas aux conditions que nous nous sommes imposées.

Ajoutons la remarque évidente que le groupe G est réductible dans le corps des nombres réels, puisque les parties réelles et imaginaires des variables complexes u^a sont transformées linéairement entre elles, d'après (8').

III. Les groupes quaternioniens irréductibles de première classe.

10. Nous allons démontrer que si Γ est un groupe quaternionien irréductible de première classe, le groupe G ne peut être regardé comme groupe d'homographies que dans un seul espace projectif quaternionien. Nous allons pour cela établir quelques propriétés préalables de Γ.

Lemme I. — Si Γ est un groupe quaternionien irréductible de première classe, le groupe G_1 est irréductible dans le corps des nombres complexes.

Supposons en effet que ce groupe G_1, de variables u^a et v^a, et admettant l'antiinvolution

$$u^a \longrightarrow -\overline{v}^a, \quad v^a \longrightarrow \overline{u}^a, \tag{7}$$

soit réductible dans le corps des nombres complexes. Soient

$$c^i_\beta u^\beta + d^i_\beta v^\beta \quad (i = 1, 2, \ldots, p) \tag{15}$$

$p < 2n$ combinaisons linéaires indépendantes des variables de G_1 qui soient transformées linéairement entre elles par G_1. Les quantités

$$\overline{c}^i_\beta v^\beta - \overline{d}^i_\beta u^\beta, \tag{16}$$

transformées des précédentes par l'antiinvolution (7), seront également transformées linéairement entre elles par G_1. Supposons qu'il existe $q \leqq p$ combinaisons linéaires indépendantes des quantités (15) dont les transformées par l'antiinvolution soient également des combinaisons linéaires de (15). Ces q quantités seront transformées linéairement entre elles par G_1 suivant un groupe admettant l'antiinvolution donnée. On pourra choisir les $q = 2\nu$ variables de ce groupe de manière que si on les désigne par $\overset{\omega}{u}{}^a$

et $\overset{\omega}{v}{}^\alpha$ $(\alpha = 1, 2, \dots, \nu)$ l'antiinvolution (7) se traduise sur elles par la correspondance

$$\overset{\omega}{u}{}^\alpha \to -\overline{\overset{\omega}{v}}{}^\alpha, \quad \overset{\omega}{v}{}^\alpha \to \overline{\overset{\omega}{u}}{}^\alpha.$$

Les ν variables quaternioniennes $\overset{\omega}{X}{}^\alpha = \overset{\omega}{u}{}^\alpha + j\,\overset{\omega}{v}{}^\alpha$, combinaisons linéaires quaternioniennes des variables quaternioniennes initiales, seront alors transformées linéairement entre elles, ce qui est en contradiction avec l'irréductibilité de Γ, puisque $q \leqq p < 2n$, $\nu < n$.

Les $2p$ quantités (15) et (16) sont donc linéairement indépendantes; en choisissant pour nouvelles variables $\overset{\omega}{u}{}^\alpha$ les quantités (15) et pour nouvelles variables $\overset{\omega}{v}{}^\alpha$ les quantités (16), on voit que les p quaternions $\overset{\omega}{X}{}^\alpha = \overset{\omega}{u}{}^\alpha + j\overset{\omega}{v}{}^\alpha$, combinaisons linéaires des variables quaternioniennes initiales, sont transformées linéairement entre elles. Γ étant irréductible, cela n'est possible que si $p = n$. Mais alors le groupe des variables $\overset{\omega}{X}{}^\alpha$, équivalent à Γ, est de seconde classe, puisqu'on a pour G_1 des formules de transformation

$$(\overset{\omega}{u}{}^\alpha)' = a^\alpha_\beta\, \overset{\omega}{u}{}^\beta, \quad (\overset{\omega}{v}{}^\alpha)' = \bar{a}^\alpha_\beta\, \overset{\omega}{v}{}^\beta,$$

d'où

$$(\overset{\omega}{X}{}^\alpha)' = (\overset{\omega}{u}{}^\alpha)' + j\,(\overset{\omega}{v}{}^\alpha)' = a^\alpha_\beta\,(\overset{\omega}{u}{}^\beta + j\,\overset{\omega}{v}{}^\beta) = a^\alpha_\beta\,\overset{\omega}{X}{}^\beta.$$

Cela est contraire à l'hypothèse.

Lemme II. — Le groupe G est irréductible dans le corps des nombres réels.

En effet, s'il était réductible, il transformerait linéairement entre elles, suivant un groupe réel G', $p < 4n$ combinaisons linéaires indépendantes à coefficients réels des $4n$ variables de G. Or comme G se décompose, dans le corps des nombres complexes, en deux groupes irréductibles équivalents G_1 et G_2, les variables de G', groupe de degré inférieur à $4n$, sont nécessairement en nombre $2n$ et combinaisons linéaires indépendantes à coefficients complexes des $2n$ quantités

(17) $$m u^\alpha - n \bar{v}^\alpha, \quad m v^\alpha + n \bar{u}^\alpha,$$

où m et n désignent deux nombres complexes non nuls tous les deux: ces quantités sont les variables du groupe $m G_1 + n G_2$, les variables $\bar{v}^\alpha$, $\bar{u}^\alpha$ de G_2 étant adaptées aux variables u^α, v^α de G_1.[5])

[5]) Voir E. CARTAN. Leçons sur la théorie des spineurs I (Exposés de Géométrie IX, 1938, Nos 29—34, p. 34—39).

Mais G' étant un groupe réel, les quantités complexes conjuguées de (17) doivent être des combinaisons linéaires des quantités (17) elles-mêmes: par exemple $\overline{m}\,\overline{u}^a - \overline{n} v^a$ doit être un multiple de $m v^a + n \overline{u}^a$. Mais cela est impossible, car cela exigerait

$$m\overline{m} + n\overline{n} = 0,$$

ce qui est absurde, m et n n'étant pas nuls tous les deux.

L'analyse précédente nous conduit au

Théorème III. — *Le groupe réel G associé à un groupe linéaire quaternionien irréductible de première classe est irréductible dans le corps des nombres réels et se décompose, dans le corps des nombres complexes, en deux groupes irréductibles équivalents.*

11. Cherchons maintenant quelles sont toutes les manières d'interpréter le groupe réel G associé à un groupe linéaire quaternionien Γ irréductible de première classe comme groupe d'homographies dans un espace projectif quaternionien. Dans toute solution de ce problème le groupe $\overset{\omega}{G}_1$ sera un des groupes dans lesquels G se décompose dans le corps des nombres complexes. Comme G se décompose dans ce corps dans les deux groupes irréductibles équivalents G_1 et G_2, les variables de $\overset{\omega}{G}_1$ seront

$$\overset{\omega}{u}{}^a = m u^a - n \overline{v}^a,$$
$$\overset{\omega}{v}{}^a = m v^a + n \overline{u}^a;$$

ce sont les variables de $m\,G_1 + n\,G_2$, m et n étant deux constantes complexes non nulles toutes les deux.[6])

En posant alors

$$\overset{\omega}{X}{}^a = \overset{\omega}{u}{}^a + j\,\overset{\omega}{v}{}^a,$$

on obtient un nouveau groupe linéaire quaternionien de mêmes coefficients que le premier. Or on voit facilement que l'on a

$$\overset{\omega}{X}{}^a = X^a (m + j n);$$

par suite ce nouveau groupe définit analytiquement le même groupe d'homographies que le premier dans le même espace projectif quaternionien.

Mais tout n'est cependant pas terminé. En effet nous n'avons considéré dans le groupe G_1 que l'antiinvolution (7), et l'on peut se demander si ce groupe n'admet pas d'autres antiinvolutions. Il en est bien ainsi effectivement. Cherchons à les déterminer

---

[6]) E. Cartan. loc. cit.[5]

toutes. Supposons donc qu'à côté de l'antiinvolution (7), il existe l'antiinvolution

$$(18)\qquad \begin{cases} u^a \to a^a_\beta \bar{u}^\beta + b^a_\beta \bar{v}^\beta, \\ v^a \to c^a_\beta \bar{u}^\beta + d^a_\beta \bar{v}^\beta; \end{cases}$$

le produit des deux antiinvolutions (7) et (18) donnera la substitution linéaire

$$u^a \to - a^a_\beta v^\beta + b^a_\beta u^\beta,$$
$$v^a \to - c^a_\beta v^\beta + d^a_\beta u^\beta,$$

qui doit laisser invariante chacune des substitutions linéaires de G_1. Or comme le groupe G_1 est irréductible, cette substitution ne peut consister que dans la multiplication de chaque variable de G_1 par un même facteur complexe ordinaire m différent de zéro[7]; l'antiinvolution (18) est donc de la forme

$$u^a \to - m \bar{v}^a,$$
$$v^a \to \quad m \bar{u}^a;$$

mais comme cette antiinvolution répétée deux fois doit, comme l'antiinvolution (7), reproduire chaque variable en la changeant de signe, on doit avoir $m\bar{m} = 1$, d'où $m = e^{i\theta}$. Au groupe G_1 initial correspondent donc une infinité de choix des variables quaternioniennes X^a, le choix le plus général étant, à une substitution linéaire quaternionienne près,

$$\overset{\infty}{X}{}^a = u^a + j e^{-i\theta} v^a;$$

or on peut écrire

$$\overset{\infty}{X}{}^a = e^{i\frac{\theta}{2}} X^a e^{-i\frac{\theta}{2}},$$

ce qui donne une solution géométriquement identique à la première.

Nous arrivons donc au

Théorème IV. — Le groupe G associé à un groupe linéaire quaternionien irréductible de première classe ne peut être considéré que d'une manière comme définissant un groupe d'homographies dans un espace projectif quaternionien.

12. Le théorème III n'énonce pas toutes les propriétés du groupe G; en particulier il n'énonce pas la propriété que chacun des groupes irréductibles dans lesquels G se décompose dans le

[7]) E. Cartan. loc. cit.[5], p. 37.

corps des nombres complexes, admet une antiinvolution de seconde espèce. Nous allons démontrer la réciproque du théorème III.

Théorème V. — Si un groupe réel G est irréductible dans le corps des nombres réels et s'il se décompose, dans le corps des nombres complexes, en deux groupes irréductibles équivalents, il peut être regardé comme l'associé d'un groupe linéaire quaternionien irréductible de première classe.

En effet soit G_1 l'un des deux groupes dans lesquels se décompose G dans le corps des nombres complexes (en réalité, il y a une infinité de tels groupes: nous en choisissons un). Les variables ξ^a de G_1 sont des combinaisons linéaires à coefficients complexes des variables de G, mais comme G est irréductible dans le corps des nombres réels, aucune combinaison linéaire à coefficients complexes des ξ^a ne peut être une combinaison linéaire à coefficients réels des variables de G. Il en résulte que les variables conjuguées $\bar{\xi}^a$ sont transformées linéairement entre elles par G et par suite peuvent être regardées comme les variables du second groupe G_2 provenant de la décomposition de G. Les deux groupes G_1 et G_2 étant irréductibles et équivalents, il existe une correspondance

$$\xi^a \rightarrow c^a_\beta \bar{\xi}^\beta \tag{19}$$

telle que, pour toute substitution de G_1, les quantités $c^a_\beta \bar{\xi}^\beta$ se transforment entre elles exactement de la même manière que les ξ^a; cette correspondance, répétée deux fois, donnera une substitution linéaire sur les ξ^a qui laissera invariante chaque substitution de G_1. Comme G_1 est irréductible, cette substitution linéaire est de la forme

$$\xi^a \rightarrow m\,\xi^a;$$

comme la correspondance (19) reste essentiellement la même en multipliant tous les seconds membres par un même facteur complexe ϱ, le coefficient m se reproduit multiplié par $\varrho\bar{\varrho}$; on peut donc supposer $m = \pm 1$; dans tous les cas la correspondance (19) est une antiinvolution. Si $m = +1$, cette antiinvolution est de première espèce; on peut alors choisir les variables ξ^a de manière qu'elle se réduise à $\xi^a \rightarrow \bar{\xi}^a$; mais cela est impossible, parce qu'alors le groupe G_1 serait à coefficients réels; les parties réelles des ξ^a seraient transformées par un groupe à coefficients réels et par suite le groupe G ne serait pas irréductible dans le corps des nombres réels.

L'antiinvolution (19) est donc de seconde espèce; le degré de G_1 est donc pair, soit $2n$, et l'on peut choisir les variables u^a, v^a de ce groupe de manière à réduire l'antiinvolution (19) à la forme (7), d'où l'on déduit un groupe quaternionien Γ dont les variables sont

$$X^a = u^a + j v^a;$$

G est le groupe associé à ce groupe quaternionien.

13. Il nous reste à démontrer que le groupe Γ est irréductible et est de première classe.

Le groupe Γ est irréductible. Si en effet il ne l'était pas, on pourrait trouver un groupe équivalent pour lequel les p premières variables $X^1, X^2, \ldots, X^p$ seraient transformées linéairement entre elles; les $2p$ premières variables u^a et v^a seraient alors transformées linéairement entre elles par le groupe G_1, qui ne serait donc pas irréductible.

Le groupe Γ est de première classe, car s'il était de seconde classe le groupe G serait réductible dans le corps des nombres réels (fin du n° 9).

Le théorème V est donc démontré.

IV. Les groupes linéaires quaternioniens continus irréductibles de première classe.

14. Le théorème III et sa réciproque le théorème V donnent les conditions nécessaires et suffisantes auxquelles doit satisfaire un groupe réel G pour qu'il puisse être regardé comme définissant d'une manière et d'une seule un groupe d'homographies irréductible dans un espace projectif quaternionien. Pratiquement la détermination de tous ces groupes réels G revient à celles des groupes linéaires, irréductibles dans le corps des nombres complexes, et admettant une antiinvolution de seconde espèce; un tel groupe G_1 de variables adaptées u^a et v^a détermine en effet un groupe équivalent G_2 de variables $\bar{u}^a$ et $\bar{v}^a$ et l'ensemble des deux groupes G_1 et G_2 peut être regardé comme définissant un groupe réel satisfaisant à toutes les conditions requises.

Si nous envisageons plus particulièrement les groupes quaternioniens continus, qui intéressent spécialement la Géométrie, la détermination de tous les champs d'application géométrique des groupes linéaires quaternioniens reviendra essentiellement à la détermination des groupes G_1 irréductibles dans le corps des nombres complexes et admettant une antiinvolution de seconde espèce. On sait que tout groupe de cette nature est semi-simple ou bien se décompose en un groupe semi-simple et un groupe d'homothéties

$$(u^a)' = e^{(a+ib)t} u^a, \quad (v^a)' = e^{(a+ib)t} v^a,$$

a et b étant des constantes réelles, t un paramètre réel. Pour que l'antiinvolution (7) soit respectée, il faut $b = 0$. Par suite on obtient tous les groupes quaternioniens cherchés en prenant un groupe semi-simple irréductible de première classe et en multipliant éventuellement ensuite tous les coefficients par un nouveau paramètre réel et positif. Le problème revient donc à la recherche des groupes G_1 semi-simples irréductibles admettant une antiinvolution de seconde espèce.

Nous renvoyons pour ce problème à l'étude systématique de W. BARRETT[8]), poursuivant et complétant des recherches antérieures de E. CARTAN[9]).

---

8) W. BARRETT. Sur la structure des groupes semi-simples réels, Thèse (Paris 1939), deuxième Partie, p. 53—76. Dans la terminologie de l'auteur, les groupes G en question sont les groupes semi-simples irréductibles autocorrélatifs de seconde classe.

9) E. CARTAN. Les groupes projectifs réels qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane (J. Math. pures et appl., 10, 1914, p. 149 bis 186).