Die Sätze von Weierstrass und Mittag-Leffler auf Riemann'schen Flächen.

Von

H. BEHNKE und K. STEIN (Münster/Westf.).

(Als Manuskript eingegangen am 12. März 1940.)

1. Einleitung. Die Sätze von WEIERSTRASS und MITTAG-LEFFLER behandeln bekanntlich die Konstruktion ganzer analytischer bzw. meromorpher Funktionen einer Veränderlichen in der endlichen komplexen Ebene zu vorgeschriebenen Null- bzw. Polstellen und zugehörigen Hauptteilen. Die in den Beweisen der Sätze angegebenen Verfahren gestatten nun mit Hilfe naheliegender Modifikationen und durch Heranziehung des Satzes von RUNGE die Konstruktion von Funktionen in beliebigen schlichten Bereichen $\mathfrak{B}$ zu dort vorgeschriebenen Null- bzw. Polstellen mit Hauptteilen.[1]) Ist $\mathfrak{B}$ eine schlichtartige Riemann'sche Fläche, so ist unter Benutzung des Koebe'schen Unformisierungstheorems die Konstruktion von in $\mathfrak{B}$ regulären Funktionen mit vorgeschriebenen Nullstellen auch noch möglich. PERRON hat sodann für einmal punktierte, geschlossene algebraische Flächen eine der Weierstrass'schen Produktentwicklung analoge Darstellung aufgestellt.[2]) Was nun die Übertragung des Mittag-Leffler'schen Satzes auf Riemann'sche Flächen betrifft, so folgt aus einem Satze von KOEBE und FREUNDLICH[3]), dass auf einer beliebigen Riemann'schen Fläche $\mathfrak{B}$, welche

[1]) Siehe dazu P. APPELL, Sur les fonctions uniformes d'un point analytique (x, y). Acta math. 1 (1882) und G. MITTAG-LEFFLER, Sur la représentation analytique des fonctions monogènes d'une variable indépendante, Acta math. 4 (1884).

[2]) Siehe OSKAR PERRON, Über transzendente Funktionen auf Riemann'schen Flächen. Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften A, 1922, 2. Abteilung.

[3]) Siehe etwa ERWIN FREUNDLICH, Analytische Funktionen mit beliebig vorgeschriebenem unendlichblättrigem Existenzbereiche. Dissertation (KOEBE), Göttingen 1910.

durch endlich viele Rückkehrschnitte schlichtartig wird, zu Polstellen mit bis auf einen Proportionalitätsfaktor vorgegebenen Hauptteilen eine Funktion existiert, die auf $\mathfrak{B}$ nur in den Polstellen und dort in vorgeschriebener Weise singulär wird. Die volle Übertragung des Satzes von MITTAG-LEFFLER auf diese Riemann'schen Flächen ist aber damit noch nicht geliefert.

Unter den Sätzen von WEIERSTRASS und MITTAG-LEFFLER für irgendwelche Bereiche $\mathfrak{B}$ sollen in diesem Aufsatze nun die Sätze über die Existenz von Funktionen in $\mathfrak{B}$ zu vorgegebenen Nullstellen bzw. Polen mit Hauptteilen verstanden werden. Wir beweisen im folgenden diese Sätze für alle endlichen, endlichblättrigen Riemann'schen Flächen ohne Verzweigungspunkte im Innern. In diesem Umfange sind sie, wie wir zeigen werden, ein Sonderfall entsprechender Sätze der Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen.

Diese Theorie ist nämlich in der Behandlung solcher Fragen in den letzten Jahren weit fortgeschritten. In glänzenden Arbeiten hat K. OKA gezeigt, dass in einem beliebigen endlichen, schlichten Regularitätsbereich $\mathfrak{B}$ im Raume der $z_1, z_2, \ldots, z_n$ zu in $\mathfrak{B}$ vorgegebenen Polen mit Hauptteilen (die nur den Verträglichkeitsbedingungen genügen) stets eine eindeutige Funktion $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ existiert, die in $\mathfrak{B}$ diese Singularitäten und keine anderen hat. Unter topologischen Voraussetzungen hat OKA zugleich einen entsprechenden Satz betreffend die Konstruktion von eindeutigen, regulären Funktionen mit vorgegebenen Nullstellen angegeben.[4])

Nun aber ist ein abgeschlossener, endlichblättriger Regularitätsbereich $\mathfrak{B}$ über dem Raume der $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ohne Verzweigungspunkte im Innern stets in einen schlichten Raum von $n+p$ komplexen Veränderlichen so einzubetten, dass den Punkten eines geeignet gewählten, $\mathfrak{B}$ ganz im Innern enthaltenden schlichten $2(n+p)$-dimensionalen Bereiches $\mathfrak{G}$ durch ihre ersten n komplexen Koordinaten die Punkte von $\mathfrak{B}$ im kleinen eindeutig zugeordnet sind.[5]) Dadurch gelingt es, die Oka'schen Sätze auf nichtschlichte Regularitätsbereiche zu übertragen. Zeigen wir nun schliesslich, dass die endlichblättrigen Riemann'schen Flächen immer Regularitätsbereiche sind und dass die topologischen Voraussetzungen

---

[4]) Siehe K. OKA, Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, Journal of Science of the Hirosima University, 6, 3 (1936), 7, 2 (1937), 9, 1 (1939).

[5]) Siehe H. BEHNKE und K. STEIN, Approximation analytischer Funktionen in vorgegebenen Bereichen des Raumes von n komplexen Veränderlichen. Göttinger Nachrichten, Neue Folge, Bd. 1, Nr. 15, 1939.

dort immer zutreffen, so haben wir insbesondere die Sätze von WEIERSTRASS und MITTAG-LEFFLER für alle endlichen, endlichblättrigen[6]) Riemann'schen Flächen ohne Verzweigungspunkte im Innern bewiesen.

Um nun diesen Aufbau durchzuführen, haben wir zunächst den Voraussetzungen der Sätze von WEIERSTRASS und MITTAG-LEFFLER zur Verwendung in den Räumen von mehreren komplexen Veränderlichen eine andere Form zu geben.

Die Polstellen können für analytische Funktionen $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ nicht wie in der klassischen Theorie durch Hauptteile vorgeschrieben werden, die an diesen und nur an diesen Stellen singulär werden (denn die Pole füllen bekanntlich stets $[2n-2]$-dimensionale analytische Flächen aus). Statt dessen schreiben wir Lokalfunktionen $f_P(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ vor, die in einer Umgebung $\mathfrak{U}(P)$ sich meromorph verhalten und dort auf der Polfläche in vorgeschriebener Weise singulär werden. Dann muss natürlich die Verträglichkeitsbedingung, nämlich dass $f_P - f_Q$ regulär im Durchschnitt von $\mathfrak{U}(P)$ und $\mathfrak{U}(Q)$ ist, erfüllt sein. Ferner schreiben wir in allen Punkten P, in denen $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ regulär bleiben soll, auch eine Ortsfunktion f_P vor. Als diese können wir immer in einer genügend kleinen Umgebung von P die Funktion $f_P \equiv 0$ wählen. So gelangen wir zum ersten Cousin'schen Problem: Zu jedem Punkte P eines Bereiches $\mathfrak{B}$ ist eine Umgebung $\mathfrak{U}(P)$ und eine dort meromorphe Funktion f_P gegeben. Im Durchschnitt $\mathfrak{D}(\mathfrak{U}[P], \mathfrak{U}[Q])$ der Umgebungen zweier Punkte P und Q von $\mathfrak{B}$ sei $f_P - f_Q$ regulär. Gibt es dann zu jeder solchen Verteilung von Funktionen f_P eine in $\mathfrak{B}$ meromorphe, eindeutige Funktion F, so dass $F - f_P$ jeweils in $\mathfrak{U}(P)$ regulär ist? K. OKA hat bewiesen, dass dieses tatsächlich in jedem schlichten endlichen Regularitätsbereich zutrifft. Davon gehen wir hier aus. Ist für einen Bereich $\mathfrak{B}$ die vorstehende Frage zu bejahen, so sagen wir: Für den Bereich $\mathfrak{B}$ ist die erste Aussage von COUSIN gültig.[7])

Wir fügen hier sogleich die Fragestellung hinzu, die in der klassischen Funktionentheorie durch den Weierstrass'schen Satz beantwortet wird. Zu jedem Punkte P eines Bereiches $\mathfrak{B}$ ist eine Um-

[6]) Zum Begriffe der Endlichblättrigkeit siehe H. BEHNKE, Über die Fortsetzbarkeit analytischer Funktionen mehrerer Veränderlichen und den Zusammenhang der Singularitäten. Math. Ann. Bd. 117 (1939).

[7]) Siehe H. BEHNKE und K. STEIN, Analytische Funktionen mehrerer Veränderlichen zu vorgegebenen Null- und Polstellenflächen. Jahresber. d. DMV. Bd. 47 (1937).

gebung $\mathfrak{U}(P)$ und eine dort reguläre Funktion f_P gegeben. Im Durchschnitt $\mathfrak{D}(\mathfrak{U}[P], \mathfrak{U}[Q])$ der Umgebungen zweier Punkte P und Q von $\mathfrak{B}$ sei $\frac{f_P}{f_Q}$ regulär und von Null verschieden. Gibt es dann zu jeder solchen Verteilung von Funktionen f_P eine in $\mathfrak{B}$ reguläre eindeutige Funktion F, so dass $\frac{F}{f_P}$ jeweils in $\mathfrak{U}(P)$ regulär und von Null verschieden ist? Ist für einen Bereich $\mathfrak{B}$ die vorstehende Frage zu bejahen, so sagen wir: Für den Bereich $\mathfrak{B}$ ist die zweite Aussage von COUSIN gültig. COUSIN selbst hat schon gezeigt, dass in allen schlichten endlichen Zylinderbereichen, deren Projektionen bis auf eine einfach zusammenhängend sind (als Zylinderbereiche sind sie insbesondere Regularitätsbereiche), die zweite Aussage von COUSIN gilt. K. OKA und K. STEIN haben neuerdings bewiesen, dass in allen Regularitätsbereichen des R^{2n} zu einer Verteilung von Nullstellen eine analytische Funktion gehört, wenn von den Nullstellen gewisse topologische Bedingungen erfüllt werden.

Wir beginnen mit der Übertragung dieser Sätze auf nichtschlichte Regularitätsbereiche.

2. Einbettung nichtschlichter Bereiche als schlichte Bereiche in Räume höherer Dimensionen. Ist $\mathfrak{B}$ ein nichtschlichter endlichblättriger Regularitätsbereich über dem Raume von n komplexen Veränderlichen (die Verzweigungspunkte der Bereiche werden stets als Randpunkte gezählt), so lässt sich jeder ganz im Innern von $\mathfrak{B}$ liegende Teilbereich $\mathfrak{B}^*$ immer in einen Raum von $n+p$ komplexen Veränderlichen — p geeignet gewählt — schlicht und ohne Selbstdurchdringung einbetten. In jedem Regularitätsbereich gibt es, wie HENRI CARTAN gezeigt hat, eine reguläre Funktion, die in einander überlagerten Punkten niemals dieselben Funktionselemente aufweist. Aus ihr sind dann endlich viele Funktionen $\Phi_1(z_1, \ldots, z_n), \ldots, \Phi_p(z_1, \ldots, z_n)$ konstruierbar, die in einander überlagerten Punkten des abgeschlossenen Bereiches $\mathfrak{B}^*$ nicht alle zugleich dieselben Werte haben. Die Zuordnung

$$
\begin{aligned}
z_1^* &= z_1, \\
&\vdots \\
z_1^* &= z_n, \\
z_{n+1}^* &= \Phi_1(z_1, \ldots, z_n), \\
&\vdots \\
z_{n+p}^* &= \Phi_p(z_1, \ldots, z_n)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

liefert dann die verlangte Einbettung.

Ist nun in $\mathfrak{B}$ eine Verteilung meromorpher Funktionen $f_P(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ vorgegeben, wie sie für die erste Aussage von COUSIN vorausgesetzt wird, so ist damit eine gleiche Verteilung in $\mathfrak{B}^*$ und seinen Randpunkten gegeben, und damit auch auf der Fläche $\mathfrak{F}$ des Raumes der $z_1^*, \ldots, z_{n+p}^*$:

$$\mathfrak{F}: \quad \begin{array}{l} z_{n+1}^* = \Phi_1(z_1^*, \ldots, z_n^*) \\ \vdots \qquad\quad \vdots \\ z_{n+p}^* = \Phi_p(z_1^*, \ldots, z_n^*). \end{array}$$

Die Fläche $\mathfrak{F}$ liegt im Bereiche $\mathfrak{G}$:

$$\mathfrak{G}: \quad \left\{ \begin{array}{l} (z_1^*, \ldots, z_n^*) \text{ aus } \mathfrak{B}^*, \\ | z_{n+k}^* - \Phi_k(z_1^*, \ldots, z_n^*) | \leqq \varepsilon \end{array} \right\} k = 1, \ldots, p,$$

des Raumes von $n+p$ komplexen Veränderlichen. ε wird so klein gewählt, dass jedem Punkt aus $\mathfrak{G}$ ein und nur ein Punkt aus $\mathfrak{B}^*$ zugeordnet werden kann, der die gleichen ersten n komplexen Koordinaten hat; m. a. W.: Ist $P = (z_1^{*(1)}, \ldots, z_{n+p}^{*(1)})$ ein Punkt aus $\mathfrak{G}$, so gibt es in $\mathfrak{B}^*$ genau einen Punkt $Q = (z_1^{*(1)}, \ldots, z_n^{*(1)})$, so dass

$$| z_{n+k}^{*(1)} - \Phi_k(z_1^{*(1)}, \ldots, z_n^{*(1)}) | \leqq \varepsilon \text{ ist, } k = 1, \ldots, p.$$

Ein solches ε zu wählen, ist stets möglich. Denn sonst gäbe es zu jedem noch so kleinen ε zwei in $\mathfrak{B}^*$ einander überlagerte und verschiedene Punkte Q und $\tilde{Q}$, so dass

$$| \Phi_k(Q) - \Phi_k(\tilde{Q}) | < 2\varepsilon, k = 1, \ldots, p,$$

wäre. Da es im abgeschlossenen Bereiche $\mathfrak{B}^*$ keine Verzweigungspunkte gibt, folgte jetzt, dass es in $\mathfrak{B}^*$ wenigstens zwei verschiedene und einander überlagerte Punkte gäbe, in denen alle Φ_k dieselben Werte annehmen.

Da $\mathfrak{F}$ schlicht im $R^{2(n+p)}$ liegt und sich nicht selbst durchdringt, liegt auch das $\mathfrak{F}$ umgebende „Schlauchgebiet" $\mathfrak{G}$ schlicht im $R^{2(n+p)}$. Ist nun $f(z_1, \ldots, z_n)$ eine in $\mathfrak{B}^*$ reguläre und eindeutige Funktion, so ist sie damit auch im schlichten Schlauchgebiet $\mathfrak{G}$ eindeutig und regulär, wenn wir jedem Punkt P von $\mathfrak{G}$ den Funktionswert des P in $\mathfrak{B}^*$ zugeordneten Punktes zuordnen. f ist lokal nur eine Funktion der ersten n Veränderlichen, sie ist aber schlicht erst als Funktion der $n+p$ Veränderlichen.

Was wir hier für analytische Funktionen in $\mathfrak{B}^*$ und $\mathfrak{G}$ gesagt haben, gilt ebenso, wenn man in $\mathfrak{B}^*$ wie in den Aussagen von COUSIN ein System von Ortsfunktionen vorgibt, die den Verträglichkeitsbedingungen genügen.

Wir greifen nun auf den Bereich $\mathfrak{B}$ zurück. Als endlichblättriger Regularitätsbereich lässt sich $\mathfrak{B}$ durch Teilbereiche $\mathfrak{P}_\nu$ von sich approximieren, die selbst wieder Regularitätsbereiche sind, ganz im Innern von $\mathfrak{B}$ liegen und durch Ungleichungen folgender Art charakterisiert werden können:

$$\mathfrak{P}_\nu: \qquad |g_j^{(\nu)}(z_1,\ldots,z_n)| \leqq 1, \; j=1,\ldots,l,$$

$g_j^{(\nu)}$ regulär in $\mathfrak{B}$. Solche Bereiche heissen analytische Polyeder. Sie werden natürlich auch nicht schlicht sein, wenn $\mathfrak{B}$ es nicht ist. Wir bilden sie nun aber auf schlichte analytische Polyeder $\mathfrak{P}_\nu^*$ im $R^{2(n+p_\nu)}$ so ab, wie wir vorher $\mathfrak{B}^*$ auf $\mathfrak{G}$ abgebildet haben. Dann sind die $\mathfrak{P}_\nu^*$ schlichte analytische Polyeder:

$$\mathfrak{P}_\nu^*: \left\{ \begin{array}{l} |g_j^{(\nu)}(z_1^*,\ldots,z_n^*)| \leqq 1, \\ |z_{n+k}^* - \Phi_k^{(\nu)}(z_1^*,\ldots,z_n^*)| \leqq \varepsilon \end{array} \right\} k=1,\ldots,p_\nu.$$

3. Approximation analytischer Funktionen in analytischen Polyedern.

K. OKA hat bewiesen: Es sei

$$\mathfrak{P}: \qquad |h_\sigma(z_1,\ldots,z_n)| \leqq a_\sigma, \; a_\sigma > 0, \; \sigma=1,\ldots,s,$$

ein schlichtes, beschränktes analytisches Polyeder. (Die h_σ seien in $\mathfrak{P}$ regulär.) Dann lässt sich jede in $\mathfrak{P}$ reguläre Funktion F gleichmässig in $\mathfrak{P}$ approximieren durch eine Folge von Funktionen, die ihrerseits Polynome in $z_1,\ldots,z_n$ und den h_σ sind.

Diesen Satz können wir sogleich auf nichtschlichte analytische Polyeder übertragen. Wir ordnen mittelst geeigneter Transformationen (1) wie vorher dem nichtschlichten analytischen Polyeder

$$\mathfrak{P}: \quad |g_\sigma(z_1,\ldots,z_n)| \leqq a_\sigma, \; \sigma=1,\ldots,s,$$

ein schlichtes analytisches Polyeder

$$\mathfrak{P}^*: \left\{ \begin{array}{l} |g_\sigma(z_1^*,\ldots,z_n^*)| \leqq a_\sigma, \\ |z_{n+k}^* - \Phi_k(z_1^*,\ldots,z_n^*)| \leqq \varepsilon \end{array} \right\} k=1,\ldots,p,$$

im $R^{2(n+p)}$ zu; dabei sind die g_σ und die Φ_k in $\mathfrak{P}^*$ eindeutig. Jede in $\mathfrak{P}$ reguläre Funktion F lässt sich, wie gezeigt, erweitern zu einer in $\mathfrak{P}^*$ definierten regulären Funktion F^*. Diese gestattet in $\mathfrak{P}^*$ nach dem Oka'schen Satz eine Entwicklung:

$$\begin{aligned} &F^*(z_1^*,\ldots,z_{n+p}^*) \\ &= \lim \mathrm{P}_\mu(z_1^*,\ldots,z_n^*, z_{n+1}^*,\ldots,z_{n+p}^*, g_1,\ldots,g_s, \\ &\qquad z_{n+1}^* - \Phi_1,\ldots,z_{n+p}^* - \Phi_p). \end{aligned}$$

In diese Entwicklung setzen wir ein

$$(1) \qquad \begin{array}{ll} z_i^* = z_i & i=1,\ldots,n, \\ z_{n+k}^* = \Phi_k(z_1,\ldots,z_n), & k=1,\ldots,p. \end{array}$$

Dann erhalten wir eine gesuchte Entwicklung von F:

$$F(z_1, \ldots, z_n) \\ = \lim \mathrm{P}_\mu (z_1, \ldots, z_n, \Phi_1, \ldots, \Phi_p, g_1, \ldots, g_s, 0, \ldots, 0).$$

Der Oka'sche Satz ist somit auch für nichtschlichte analytische Polyeder bewiesen.

4. Das erste Cousin'sche Problem in Regularitätsbereichen. Die Gültigkeit der ersten Cousin'schen Aussage ist für schlichte endliche Regularitätsbereiche allgemein von K. Oka bewiesen worden. Für nichtschlichte endlichblättrige Regularitätsbereiche $\mathfrak{B}$ folgt sie auf Grund der vorstehenden Überlegungen. $\mathfrak{B}$ wird zunächst durch eine Folge von ganz in $\mathfrak{B}$ liegenden analytischen Polyedern $\mathfrak{P}_\nu$, $\mathfrak{P}_\nu \subset\subset \mathfrak{P}_{\nu+1}$, approximiert. Die in $\mathfrak{B}$ vorgegebene zulässige Verteilung von Ortsfunktionen ist zugleich eine zulässige Verteilung in $\mathfrak{P}_\nu$. Wir ordnen nun gemäss dem vorher angegebenen Verfahren jedem $\mathfrak{P}_\nu$ ein schlichtes analytisches Polyeder $\mathfrak{P}_\nu^*$ im $R^{2(n+p_\nu)}$ zu. (Natürlich kann p_ν mit wachsendem Index ν über alle Grenzen wachsen; d. h. wir benötigen dann Räume von immer höherer Dimension zur Konstruktion der $\mathfrak{P}_\nu^*$.) Die Cousin'sche Verteilung von Ortsfunktionen in $\mathfrak{P}_\nu$ liefert uns in der oben beschriebenen Weise eine zulässige Verteilung von Ortsfunktionen f_p^* in $\mathfrak{P}_\nu^*$. Hier sind nun alle Voraussetzungen des Oka'schen Satzes erfüllt. Es gibt eine in $\mathfrak{P}_\nu^*$ meromorphe Funktion $H^*(z_1^*, \ldots, z_{n+p_\nu}^*)$, die mit allen Ortsfunktionen S-äquivalent ist; das soll heissen: $H^* - f_p^*$ ist regulär in $\mathfrak{U}^*(P)$. Wir gehen jetzt zu dem niederdimensionalen Bereich $\mathfrak{P}_\nu$ zurück, indem wir in $H^*(z_1^*, \ldots, z_n^*, z_{n+1}^*, \ldots, z_{n+p}^*)$ die Substitutionen

$$\begin{aligned} &z_i^* = z_i && i = 1, \ldots, n, \\ \text{(1a)} \qquad &z_{n+k}^* = \Phi_k^{(\nu)}(z_1, \ldots, z_n), && k = 1, \ldots, p_\nu, \end{aligned}$$

ausführen. Die sich so ergebende Funktion $H^{(\nu)}(z_1, \ldots, z_n)$ ist in $\mathfrak{P}_\nu$ meromorph und stellt dort eine Lösungsfunktion zu der vorgegebenen Cousin'schen Verteilung dar.

Um für ganz $\mathfrak{B}$ eine Lösungsfunktion zu bekommen, bilden wir zunächst formal die Reihe

$$H^{(1)} + (H^{(2)} - H^{(1)}) + \cdots + (H^{(j)} - H^{(j-1)}) + \cdots.$$

Die Glieder $(H^{(j)} - H^{(j-1)})$ sind regulär in $\mathfrak{P}_{j-1}$. Nun kann es sein, dass diese Reihe in jedem ganz im Innern von $\mathfrak{B}$ gelegenen Bereich nach Abtrennung von je endlich vielen Gliedern gleichmässig konvergiert; dann stellt sie in $\mathfrak{B}$ eine Lösungsfunktion zur vorgegebenen Cousin'schen Verteilung dar. Trifft aber die gleichmässige Konvergenz allgemein nicht zu, so gelingt es doch, durch Hinzufügen konvergenzerzeugender, in ganz $\mathfrak{B}$ regulärer Summanden die gleichmässige Konvergenz der korrigierten Reihe zu erzwingen und so eine Lösungsfunktion in ganz $\mathfrak{B}$ zu erhalten. Zu diesem Zwecke wählen wir eine konvergente Folge positiver Zahlen ε_j. Auf Grund der in Abschnitt 3 angegebenen Approximation der in analytischen Polyedern regulären Funktionen approximieren wir jetzt $H^{(j)} - H^{(j-1)}$ durch eine in $\mathfrak{B}$ reguläre Funktion $R^{(j)}$, so dass in $\mathfrak{P}_{(j-1)}$ gilt

$$| H^{(j)} - H^{(j-1)} - R^{(j} | < \varepsilon_j .$$

Die Reihe

$$H^{(1)} + \sum_{j=2}^{\infty} (H^{(j)} - H^{(j-1)} - R^{(j)})$$

konvergiert gleichmässig in jedem ganz in $\mathfrak{B}$ liegenden Bereich nach Abtrennung von jeweils endlich vielen Gliedern. Sie stellt also in $\mathfrak{B}$ eine meromorphe Funktion dar, die in $\mathfrak{P}_j$ mit $H^{(j)}$, also auch mit allen vorgegebenen Ortsfunktionen S-äquivalent ist.

Damit ist gezeigt, dass die erste Cousin'sche Aussage für alle endlichen, endlichblättrigen unverzweigten Regularitätsbereiche zutrifft. Insbesondere gilt dies für alle Regularitätsbereiche dieser Art über der Ebene einer komplexen Veränderlichen. Später werden wir noch zeigen, dass alle Riemann'schen Flächen über der z-Ebene, die endlichblättrig und endlich sind und keine Verzweigungspunkte im Innern enthalten, zu diesen Regularitätsbereichen gehören, so dass für sie alle also die erste Cousin'sche Aussage gilt: d. h. die Gültigkeit des Satzes von MITTAG-LEFFLER in ihnen nachgewiesen ist.

5. **Der Satz von WEIERSTRASS für Regularitätsbereiche unter den Riemann'schen Flächen.** Wir gehen wiederum von der zweiten Cousin'schen Aussage in schlichten Bereichen des Raumes von n komplexen Veränderlichen aus. Sicherlich trifft die zweite Cousin'sche Aussage nicht uneingeschränkt für Regularitätsbereiche im R^{2n} zu. Das hat schon T. H. GRONWALL gesehen am Bereiche $\mathfrak{B}_0$, der entsteht, wenn man aus dem offenen R^4 die Achsen $w=0$, $z=0$ herausnimmt. Schreibt man etwa durch geeignete Ortsfunktionen f_P auf der Fläche

$$\mathfrak{F}: \qquad z = w^i = e^{i \log w}$$

einfache Nullstellen vor und lässt man sonst keine weiteren Nullstellen zu, so gibt es zu dieser zulässigen Verteilung keine eindeutige Lösungsfunktion im Sinne der zweiten Cousin'schen Aussage.[8]) Es gibt nicht einmal eine Lösungsfunktion, von der wir nicht analytisches, sondern nur stetiges Verhalten verlangen, d. h.: Es existiert keine komplexwertige Funktion $a(u, v, x, y)$, die in $\mathfrak{B}_0$ stetig ist und für die jeweils in bezug auf jeden Punkt P aus $\mathfrak{B}_0$ gilt

$$\frac{a(u, v, x, y)}{f_P} \neq 0 \text{ und stetig in } \mathfrak{U}(P).$$

Wir sprechen auch hier von der D-Äquivalenz der Funktionen a und f_P in $\mathfrak{U}(P)$ und ebenso von der D-Äquivalenz der Funktion a mit der Gesamtheit der vorgegebenen Ortsfunktionen.

K. Oka hat nun aber gezeigt[9]): Wenn in einem schlichten endlichen Regularitätsbereich $\mathfrak{B}$ des R^{2n} zu einer vorgegebenen Verteilung von Ortsfunktionen f_P (im Sinne der zweiten Cousin'schen Aussage) eine stetige Funktion $a(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ existiert, die mit der Gesamtheit der vorgegebenen Ortsfunktionen D-äquivalent ist, so gibt es auch eine in ganz $\mathfrak{B}$ reguläre Lösungsfunktion $F(z_1, \ldots, z_n)$. Diese Funktion F kann insbesondere so gewählt werden, dass sie folgende Eigenschaften hat:

(1) $F(z_1, \ldots, z_n)$ lässt sich in eine Schar stetiger Funktionen $F(z_1, \ldots, z_n, t)$, $0 \leq t \leq 1$, einbetten, so dass
$F(z_1, \ldots, z_n, 0) \equiv F(z_1, \ldots, z_n)$,
$F(z_1, \ldots, z_n, 1) \equiv 1$.

(2) $F(z_1, \ldots, z_n, t)$ verschwindet in keinem $(2n+1)$-dimensionalen Raumstück.

(3) Es ist
$F(z_1, \ldots, z_n, t) \equiv \lambda(z_1, \ldots, z_n, t) \cdot ([1-t] \cdot a(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) + t)$,
dabei ist $\lambda(z_1, \ldots, z_n, t)$ eine stetige und nichtverschwindende Funktion, wenn $(z_1, \ldots, z_n)$ in $\mathfrak{B}$ und t unabhängig davon im Intervall $0 \leq t \leq 1$ läuft. Insbesondere ist:
$\lambda(z_1, \ldots, z_n, 1) \equiv 1$.

Auf diesen Satz stützen wir uns nun.

Gegeben sei uns eine endliche, endlichblättrige Riemann'sche Fläche $\mathfrak{R}$ ohne Verzweigungspunkte im Innern, dazu eine zulässige Verteilung von Ortsfunktionen $f_P \equiv (z - z_P)^{\nu_P}$ im Sinne der zweiten Cousin'schen Aussage. Wir wollen zunächst zeigen, dass in $\mathfrak{R}$ eine

---

[8]) Siehe K. Stein, Über das zweite Cousin'sche Problem und die Quotientendarstellung meromorpher Funktionen mehrerer Veränderlichen. Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Math.-Nat. Abt. Jahrgang 1939, S. 139.

[9]) Siehe [4]).

stetige Funktion $a(x, y)$ existiert, die mit der Gesamtheit der Ortsfunktionen D-äquivalent ist. Hierzu approximieren wir $\mathfrak{R}$ durch zellenmässig zerlegte Teilflächen $\mathfrak{T}_N$, $N=1, \ldots, \mathfrak{T}_N ((\mathfrak{T}_{N+1}$, mit folgenden Eigenschaften:

1) Die zellenmässige Zerlegung von $\mathfrak{T}_N$ ist eine Quadratteilung, die aus einer achsenparallelen Quadratteilung der Ebene durch Durchdrücken auf $\mathfrak{T}_N$ entsteht.
2) Kein $\mathfrak{T}_N$ besitzt Randkomponenten, die in $\mathfrak{R} - \mathfrak{T}_N$ beranden.
3) Auf dem Rand von $\mathfrak{T}_N$ liegt keine der vorgeschriebenen Nullstellen.

Wir konstruieren die gesuchte Funktion zunächst in $\mathfrak{T}_1$. Zu diesem Zweck nehmen wir aus $\mathfrak{T}_1$ kleine Kreise um die dort vorgeschriebenen Nullstellen heraus. Diese Kreise sollen so klein gewählt sein, dass sie den Rand von $\mathfrak{T}_1$ nicht treffen. Das Restgebilde $\mathfrak{T}_1^*$ ist gleichfalls ein Zellenkomplex. Auf denjenigen Randstücken von $\mathfrak{T}_1^*$, die von den Rändern der aus $\mathfrak{T}_1$ herausgenommenen Kreise gebildet werden, schreiben wir nun jeweils mittelst der zugehörigen Ortsfunktionen $f_P \equiv (z - z_P)^{\nu_P}$ komplexe Werte vor. Dadurch ist eine stetige Abbildung dieser Randstücke in die im Nullpunkt punktierte Ebene $\mathfrak{F}^2 - 0$ der komplexen Zahlen definiert. Diese Abbildung lässt sich zu einer stetigen Abbildung von ganz $\mathfrak{T}_1^*$ in $\mathfrak{F}^2 - 0$ erweitern. Denn da $\mathfrak{T}_1^*$ ausser den Kreisrändern noch weitere Randstücke besitzt (nämlich den Rand von $\mathfrak{T}_1$), kann es keine in $\mathfrak{T}_1^*$ nullhomologe $1-$Kette (in bezug auf jeden Koeffizientenbereich) geben, die lediglich aus gewissen Kreisrändern, jeder mit einer bestimmten Vielfachheit versehen, besteht (natürlich die Nullkette ausgenommen). Damit sind die Voraussetzungen eines Abbildungssatzes von H. HOPF erfüllt.[10]) Die so in $\mathfrak{T}_1^*$ gewonnene stetige Funktion $a(x, y)$ wird nun noch in den aus $\mathfrak{T}_1$ herausgenommenen Kreisscheiben ergänzt, dadurch dass wir sie dort jeweils gleich $(z - z_P)^{\nu_P}$ setzen. So haben wir eine in $\mathfrak{T}_1$ stetige Funktion, die mit den dort vorgegebenen analytischen Ortsfunktionen D-äquivalent ist.

Um die gewonnene stetige Funktion $a(x, y)$ in die $\mathfrak{T}_N$, $N > 1$, fortzusetzen, gehen wir folgendermassen vor. In dem Zwischengebiet $\mathfrak{T}_2 - \mathfrak{T}_1$ (bzw. den Zwischengebieten) umgeben wir wieder alle durch die f_P vorgeschriebenen Nullstellen mit kleinen Kreisen, die so gewählt sind, dass sie den Rand von $\mathfrak{T}_2 - \mathfrak{T}_1$ nicht treffen. Nunmehr können wir wie vorhin, weil $\mathfrak{T}_2 - \mathfrak{T}_1$ triangulierbar ist und die Randkomponenten von $\mathfrak{T}_2 - \mathfrak{T}_1$, die Ränder von $\mathfrak{T}_1$ sind,

[10]) Siehe ALEXANDROFF-HOPF, Topologie I, Seite 516.

in $\mathfrak{T}_2 - \mathfrak{T}_1$ nicht beranden, eine stetige Funktion in $\mathfrak{T}_2 - \mathfrak{T}_1$ finden, die dort mit den vorgegebenen Ortsfunktionen D-äquivalent ist und an die Funktion $a(x, y)$ in den $\mathfrak{T}_2 - \mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_1$ gemeinsamen Randstücken stetig anschliesst. So haben wir $a(x, y)$ stetig in $\mathfrak{T}_2$ fortgesetzt. Das können wir wiederholen, und so eine gesuchte stetige Funktion $a(x, y)$ auf ganz $\mathfrak{R}$ finden.

Um nun auch zu einer analytischen Funktion zu gelangen, die auf $\mathfrak{R}$ mit der vorgegebenen Verteilung von Ortsfunktionen D-äquivalent ist, approximieren wir $\mathfrak{R}$ durch analytische Polyeder $\mathfrak{P}_\nu$. Dazu müssen wir voraussetzen, dass $\mathfrak{R}$ ein Regularitätsbereich ist. (Später beweisen wir, wie schon bei der Behandlung des ersten Cousin'schen Problems angekündigt, dass diese Voraussetzung immer erfüllt ist.) Wir ordnen wieder jedem $\mathfrak{P}_\nu$ eine 2-dimensionale analytische Fläche $\mathfrak{F}$ zu, die schlicht im $R^{2(2+p_\nu)}$ liegt und wie im Abschnitt 2 eingebettet ist in ein schlichtes analytisches Polyeder $\mathfrak{P}_\nu^*$ dieses Raumes. Die Ortsfunktionen f_P und die ihnen zugeordnete stetige Funktion $a(x, y)$ übertragen sich auf $\mathfrak{P}_\nu^*$. In $\mathfrak{P}_\nu^*$ sind also Ortsfunktionen

$$f_P^*(z^*, z_1^*, \ldots, z_{p_\nu}^*) \equiv f_P(z^*)$$

gegeben und dazu die mit ihnen D-äquivalente stetige Funktion

$$a^*(x^*, y^*, x_1^*, y_1^*, \ldots, x_{p_\nu}^*, y_{p_\nu}^*) \equiv a(x^*, y^*) .$$

Nach dem am Anfang dieses Abschnittes zitierten Satzes von K. Oka gibt es also in $\mathfrak{P}_\nu^*$ eine analytische Funktion $H_\nu^*(z^*, z_1^*, \ldots, z_{p_\nu}^*$, die mit den f_P D-äquivalent ist. H_ν^* lässt sich ferner einbetten in eine Schar $H_\nu^*(z^*, z_1^*, \ldots, z_{p_\nu}^*, t)$, $0 \leqq t \leqq 1$, stetiger Funktionen

$$[H_\nu^*(z^*, z_1^*, \ldots, z_{p_\nu}^*, 0) \equiv H_\nu^* z(^*, z_1^*, \ldots, z_{p_\nu}^*),\; H_\nu^*(z^*, z_1^*, \ldots, z_{p_\nu}^*, 1) \equiv 1]$$

so dass gilt:

$$H_\nu^*(z^*, z_1^*, \ldots, z_{p_\nu}^*, t) \equiv \lambda_\nu^*(z^*, z_1^*, \ldots, z_{p_\nu}^*, t) \cdot ([1-t] \cdot a^* + t),$$

dabei ist λ_ν^* eine stetige, nichtverschwindende Funktion. Durch Anwendung einer Substitution (1) (vgl. Abschnitt 4) gewinnen wir aus $H_\nu^*(z^*, z_1^*, \ldots, z_{p_\nu}^*, t)$ eine Funktion $H_\nu(z, t)$. Dabei ist $H_\nu(z, 0)$ regulär und eindeutig in $\mathfrak{P}_\nu$ und dort D-äquivalent mit den Lokalfunktionen f_P, besitzt also in $\mathfrak{P}_\nu$ die vorgeschriebenen Nullstellen in vorgeschriebener Ordnung.

Aus den $H_\nu(z, 0)$ setzen wir jetzt eine Funktion $H(z)$ zusammen, die regulär in $\mathfrak{R}$ ist und dort genau die vorgeschriebenen Nullstellen hat. Wir bilden das formale Produkt

$$H_1(z, 0) \cdot \frac{H_2(z, 0)}{H_1(z, 0)} \cdot \ldots \cdot \frac{H_{\nu+1}(z, 0)}{H_\nu(z, 0)} \cdot \ldots \;.$$

Konvergiert dieses Produkt gleichmässig in jedem ganz in $\mathfrak{R}$ gelegenen Teilbereich (jeweils nach Abtrennung endlich vieler Glieder), so stellt es eine gesuchte analytische Lösungsfunktion in $\mathfrak{R}$ dar. Andernfalls bilden wir in $\mathfrak{P}_\nu$

$$L_\nu(z) = \log \frac{H_{\nu+1}(z, 0)}{H_\nu(z, 0)}.$$

Dieser Logarithmus ist in $\mathfrak{P}_\nu$ eindeutig. Denn es ist

$$\frac{H_{\nu+1}(z, t)}{H_\nu(z, t)} = \frac{H_{\nu+1}(z, t)}{(1-t)\,a+t} \cdot \frac{(1-t)\cdot a+t}{H_\nu(z, t)} = \frac{\lambda_{\nu+1}(z, t)}{\lambda_\nu(z, t)}.$$

Dabei sind $\lambda_{\nu+1}$ und λ_ν stetig und von Null verschieden und es gilt

$$\lambda_{\nu+1}(z, 1) \equiv \lambda_\nu(z, t) \equiv 1.$$

Wir entwickeln nun $L_\nu(z)$ in $\mathfrak{P}_\nu$ gemäss Abschnitt 3 nach Funktionen, die in ganz $\mathfrak{R}$ regulär sind. Es sei $g_\nu(z)$ eine solche approximierende Funktion, für die in $\mathfrak{P}_\nu$ gilt

$$| L_\nu(z) - g_\nu(z) | < \frac{1}{2^\nu}.$$

Dann gilt auch

$$e^{-\frac{1}{2^\nu}} < \left| \frac{H_{\nu+1}(z, 0)}{H_\nu(z, 0)} \cdot e^{-g_\nu(z)} \right| < e^{\frac{1}{2^\nu}}.$$

Das unendliche Produkt

$$H_1(z, 0) \cdot \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{H_{\nu+1}(z, 0)}{H_\nu(z, 0)} \cdot e^{-g_\nu(z)}$$

konvergiert gleichmässig nach Abspaltung von je endlich vielen Gliedern in jedem $\mathfrak{P}_\nu$, stellt also in $\mathfrak{R}$ eine analytische Funktion mit den vorgeschriebenen Nullstellen dar.

6. Jede endliche, endlichblättrige Riemann'sche Fläche $\mathfrak{R}$ ohne Verzweigungspunkte im Innern ist Regularitätsbereich. Wir stützen uns auf einen Satz von P. KOEBE: Zu jeder nichtgeschlossenen Riemann'schen Fläche gibt es eine Funktion $f(z)$, die sie als ihren Meromorphiebereich hat. Dabei kann $f(z)$ so gewählt werden, dass seine Polstellen beliebig wenig vom Rande der Fläche entfernt sind.[11])

Zum Beweise unserer Aussage approximieren wir $\mathfrak{R}$ durch eine unendliche Folge von ganz in $\mathfrak{R}$ gelegenen Teilbereichen

---

[11]) Siehe P. KOEBE. Fonction potentielle et fonction analytique ayant un domaine d'existence donné à un nombre quelconque fini ou infini de feuillets. C. R. (1909), und [3]).

$\mathfrak{R}_\nu, \mathfrak{R}_\nu ((\mathfrak{R}_{\nu+1}$. Diese $\mathfrak{R}_\nu$ sind unter unserer Voraussetzung alle beschränkt. Wir geben ausserdem noch eine Folge positiver Zahlen ε_ν mit $\lim \varepsilon_\nu = 0$ vor. Auf die $\mathfrak{R}_\nu$ wenden wir den Satz von KOEBE an. Wir konstruieren gemäss dem Verfahren von FREUNDLICH zu $\mathfrak{R}_\nu$ eine Funktion $f_\nu(z)$, die $\mathfrak{R}_\nu$ als Meromorphiebereich hat und in $\mathfrak{R}_\nu$ nur Pole aufweist, die um weniger als ε_ν vom Rande entfernt sind. Die Regularitätsbereiche der f_ν seien mit $\mathfrak{R}_\nu^*$ bezeichnet. Die $\mathfrak{R}_\nu^*$ sind laut Definition Teilbereiche der $\mathfrak{R}_\nu$ und weisen keine Randpunkte auf, die um mehr als ε_ν vom Rande der $\mathfrak{R}_\nu$ entfernt sind. Also ist

$$\lim \mathfrak{R}_\nu^* = \mathfrak{R}\,.$$

Die Riemann'sche Fläche $\mathfrak{R}$, von der wir ausgegangen sind, ist also von innen durch Regularitätsbereiche approximierbar. Nun aber gilt allgemein: Jeder endliche, endlichblättrige unverzweigte Bereich über dem Raum von n komplexen Veränderlichen, der Grenzbereich einer Folge von Regularitätsbereichen ist, ist selbst Regularitätsbereich.[12]) $\mathfrak{R}$ ist also Regularitätsbereich. Die Überlegungen der vorstehenden Abschnitte gelten daher für alle endlichen, endlichblättrigen Riemann'schen Flächen ohne Verzweigungspunkte im Innern.

Fassen wir unsere Ergebnisse zusammen!

I. Zu jeder endlichen, endlichblättrigen im Innern unverzweigten Riemann'schen Fläche $\mathfrak{R}$ gibt es eine Funktion $f(z)$, die in $\mathfrak{R}$ überall regulär und über $\mathfrak{R}$ hinaus nicht fortsetzbar ist.

II. Werden in einer Punktfolge P_ν einer endlichen, endlichblättrigen nichtverzweigten Riemann'schen Fläche $\mathfrak{R}$ unter der Voraussetzung, dass sich die P_ν im Innern von $\mathfrak{R}$ nicht häufen, Polstellen mit Hauptteilen vorgegeben, so gibt es eine Funktion $f(z)$, die sich in den P_ν in vorgeschriebener Weise verhält und im übrigen auf $\mathfrak{R}$ regulär ist.

III. Schreiben wir in einer solchen Punktfolge P_ν Nullstellen mit zugehörigen Ordnungen vor, so gibt es eine in $\mathfrak{R}$ reguläre Funktion, die in den P_ν in vorgeschriebener Weise verschwindet und sonst ungleich Null ist.

---

[12]) Siehe H. BEHNKE und K. STEIN, Konvergente Folgen von Regularitätsbereichen und die Meromorphiekonvexität. Math. Ann. 116, Satz 2 (für schlichte beschränkte Bereiche). Zur Erweiterung dieses Satzes siehe [5]) und eine demnächst erscheinende Arbeit.