Systeme symmetrischer Bilinearformen und euklidische Modelle der projektiven Räume.

Von

HEINZ HOPF (Zürich).

(Als Manuskript eingegangen am 9. März 1940.)

Es handelt sich im folgenden um ein Problem aus der reellen Algebra, um ein Problem aus der Topologie und um Zusammenhänge zwischen den beiden Problemen. Gelöst werden die Probleme nicht, es wird aber je ein Beitrag zur Lösung geliefert.

Im § 1 werden Probleme, Sätze und Zusammenhänge formuliert und besprochen; es werden hier nur wenige Beweise geführt, und diese sind ganz elementar. Der § 2 ist der wesentlich topologische Teil der Untersuchung; er enthält den eigentlichen Beweis der beiden Hauptsätze.

§ 1.

1. Das algebraische Problem. In dem weiter unten formulierten Ergebnis zu unserem algebraischen Problem ist als Spezialfall der folgende Satz aus der projektiven Geometrie enthalten, der zur ersten Orientierung über die Fragestellung dienen kann: «In der Ebene gibt es zu je vier reellen Kegelschnitten, im Raume gibt es zu je fünf reellen Flächen 2. Ordnung wenigstens ein reelles Punktepaar, das in bezug auf alle vier Kurven, bezw. auf alle fünf Flächen, konjugiert ist.» Andererseits kann man, wie Beispiele lehren, fünf reelle Kegelschnitte, bezw. sechs reelle Flächen 2. Ordnung, so wählen, dass diese Gebilde kein gemeinsames konjugiertes reelles Punktepaar besitzen.[1])

---

[1]) Wegen der Beweise dieser geometrischen Behauptungen vergl. man die Formeln (6) sowie die im Anschluss an den Satz II (Nr. 7) gemachte Bemerkung über den Fall $k = 2$. Bei dem Versuch, diese Sätze mit den üblichen Methoden der projektiv-algebraischen Geometrie zu beweisen — gewiss ist ein solcher Beweis möglich —, macht, soviel ich sehe, die notwendige Realitäts-Betrachtung einige Schwierigkeit.

Es liegt nahe, nach denjenigen Zahlen zu fragen, welche für die höherdimensionalen Räume der Zahl 5 für die Ebene, der Zahl 6 für den Raum entsprechen. Damit sind wir bei der allgemeinen Fragestellung, die wir jetzt algebraisch, ohne die geometrische Einkleidung, formulieren.

Wir betrachten reelle symmetrische Bilinearformen in zweimal r Unbestimmten $x_1, \ldots, x_r$ und $y_1, \ldots, y_r$:

$$f(x, y) = \sum a_{jk} x_j y_k, \qquad a_{kj} = a_{jk};$$

ein System von n derartigen Formen $f^1, \ldots, f^n$ heisse «definit», wenn das Gleichungssystem

$$f^\nu(x, y) = 0, \qquad \nu = 1, \ldots, n,$$

keine anderen reellen Lösungen $(x_1, \ldots, x_r,\ y_1, \ldots, y_r)$ besitzt als diejenigen mit $x_1 = \cdots = x_r = 0$ und diejenigen mit $y_1 = \cdots = y_r = 0$. Die kleinste Zahl n, für welche es, bei gegebenem r, ein definites System von n Formen gibt, heisse $N(r)$.

Die Bestimmung der Funktion $N(r)$ ist unser algebraisches Problem.

2. Schranken für $N(r)$; Satz I. Für jedes r ist

(1) $$N(r) \leqq 2r - 1;$$

denn man bestätigt leicht, dass die $2r - 1$ Formen

(2) $$f^\nu(x, y) = \sum x_j y_k, \qquad j + k = \nu + 1, \qquad \nu = 1, \ldots, 2r - 1,$$

ein definites System bilden.

Ist r gerade, $r = 2r'$, so lässt sich (1) zu

(3 $$N(r) = N(2r') \leqq 2r - 2$$

verschärfen; denn setzt man

$$x_{2\varrho-1} + i x_{2\varrho} = \xi_\varrho, \quad y_{2\varrho-1} + i y_{2\varrho} = \eta_\varrho, \quad \varrho = 1, \ldots, r',$$

so bilden zunächst, analog zu (2), die komplexen Bilinearformen

$${}^\nu(\xi, \eta) = \sum \xi_j \eta_k, \qquad j + k = \nu + 1, \qquad \nu = 1, \ldots, 2r' - 1,$$

ein definites System, das heisst: aus $\varphi^\nu = 0$ für alle ν folgt, dass entweder alle ξ oder alle η verschwinden; folglich bilden die Real- und Imaginär-Teile der φ^ν ein definites System von $2(2r' - 1) = 2r - 2$ reellen Bilinearformen.

Insbesondere erhält man auf diese Weise für $r = 2$ das definite System

$$f^1 = x_1 y_1 - x_2 y_2, \qquad f^2 = x_1 y_2 + x_2 y_1;$$

hiermit ist, da für $r > 1$ eine einzelne Bilinearform niemals ein definites System darstellt, die Zahl $N(2)$ bestimmt:

(4) $$N(2) = 2\,.$$

Wichtiger als Abschätzungen der Art (1) und (3) aber ist die Angabe unterer Schranken für $N(r)$; denn aus $N(r) \geqq N'$ folgt, dass für $n < N'$ jedes System von n bilinearen Gleichungen

$$f^1(x, y) = 0\,, \ldots, f^n(x, y) = 0$$

eine nicht-triviale Lösung besitzt. Unser Beitrag zur Bestimmung von $N(r)$ ist nun der folgende Satz:

Satz I. Für $r > 2$ ist

(5) $$N(r) \geqq r + 2\,;$$

mit andern Worten: ist $r > 2$, so gibt es kein definites System, das aus $r+1$ oder weniger symmetrischen Formen in zweimal r Variablen bestünde.

Speziell ergibt sich aus (5) und (1), bezw. aus (5) und (3), die folgende Bestimmung von $N(r)$ für $r = 3$ und $r = 4$:

(6) $$N(3) = 5\,, \quad N(4) = 6\,.$$

Hierin sind die in Nr. 1 ausgesprochenen geometrischen Sätze enthalten.

Den Beweis des Satzes I werden wir erst in Nr. 5 beginnen.

3. Ein Korollar; Anwendung auf die Axiomatik der Algebren. Der aus den Formeln (4) und (5) ersichtliche Unterschied zwischen den Fällen $r = 2$ und $r > 2$ kommt bereits in dem folgenden Korollar des Satzes I zum Ausdruck:

Korollar. In der — übrigens trivialen — Ungleichung $N(r) \geqq r$ tritt der Fall der Gleichheit nur für $r = 2$ ein[2]).

Einerseits lässt sich, wie man sehen wird, dieses Korollar wesentlich leichter beweisen als der Satz I; andererseits ergibt sich aus dem Korollar eine Tatsache, die man zwar vermutlich auch auf anderem Wege ohne grosse Mühe herleiten kann, auf die ich aber doch bei dieser Gelegenheit hinweisen möchte; sie bezieht sich auf Algebren über dem Körper der reellen Zahlen.

Wir ziehen für eine Algebra — oder ein hyperkomplexes System mit endlich vielen Einheiten —, in welcher die Addition als Vektor-Addition im üblichen Sinne erklärt sein soll, die folgenden Postulate für die Multiplikation in Betracht:

a) das distributive Gesetz,

b) das assoziative Gesetz,

---

[2]) Den Fall $r = 1$ lassen wir als trivial beiseite; es ist $N(1) = 1$.

c) das kommutative Gesetz,

d) die Divisions-Eigenschaft, d. h. die Nicht-Existenz von Nullteilern.

Es soll sich nur um Algebren über dem Körper der reellen Zahlen handeln. Man weiss: die einzige Algebra, welche alle vier Postulate erfüllt, ist der Körper der gewöhnlichen komplexen Zahlen; verzichtet man auf gewisse der Postulate, so kommen neue Systeme hinzu. Wir wollen hier jedenfalls an a) und d) festhalten; hält man ausserdem an b) fest, verzichtet aber auf c), so kommt das System der Quaternionen — und nur dieses — hinzu; verzichtet man auf c) und b), so gibt es noch mindestens ein weiteres System: das Cayley'sche System mit 8 Einheiten[3]). Der Umstand, dass dieses Cayley'sche System eine gewisse Rolle in Algebra und Geometrie spielt, zeigt, dass auch der Verzicht auf das assoziative Gesetz b) nicht unberechtigt ist. Daher liegt die Frage nach Systemen nahe, in welchen zwar a), c), d) erfüllt sind, aber nicht b).

Es gilt nun der Satz, dass es kein solches System gibt; also: die Gültigkeit des assoziativen Gesetzes ist für eine Algebra über dem Körper der reellen Zahlen eine Folge der Postulate a), c), d); anders ausgedrückt: auch wenn man die Gültigkeit des assoziativen Gesetzes der Multiplikation nicht ausdrücklich postuliert, ist der Körper der komplexen Zahlen der einzige kommutative Erweiterungskörper endlichen Grades über dem Körper der reellen Zahlen.

Beweis: Die Einheiten des betrachteten Systems seien $\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_r$; die Multiplikation sei durch

$$\mathfrak{n}_j \mathfrak{n}_k = \sum a_{jk}^l \mathfrak{n}_l$$

gegeben; dann ist das Produkt zweier Grössen $\mathfrak{x} = \sum x_j \mathfrak{n}_j$, $\mathfrak{y} = \sum y_k \mathfrak{n}_k$ nach dem distributiven Gesetz:

$$\mathfrak{x}\mathfrak{y} = \sum f^l(x, y) \mathfrak{n}_l ,$$

wobei wir

$$f^l(x, y) = \sum a_{jk}^l x_j y_k , \quad l = 1, \ldots, r ,$$

gesetzt haben. Das kommutative Gesetz bedeutet: die Bilinearformen $f^l(x, y)$ sind symmetrisch. Das Gesetz d) bedeutet: wenn alle $f^l(x, y)$ verschwinden, so verschwindet entweder $\mathfrak{x}$ oder $\mathfrak{y}$; mit anderen Worten: das System der r Formen $f^l(x, y)$ ist definit. Dies ist nach dem oben formulierten Korollar nur für $r = 2$ möglich.[2])

[3]) Man vergl. z.B.: L. E. DICKSON, Algebren und ihre Zahlentheorie (Zürich 1927), § 133.

Die weiteren Schlüsse bis zu dem Ergebnis, dass das System der Körper der komplexen Zahlen ist, dürfen als bekannt gelten.

4. Die Beziehung zu den Sätzen von STIEFEL. Wie die Formeln (6) zeigen, wird für $r=3$ und $r=4$ die durch (5) angegebene untere Schranke von $N(r)$ erreicht. Dass aber im allgemeinen diese Schranke bestimmt nicht die beste ist, sieht man aus einem Satz von E. STIEFEL; zugleich wird durch diese Feststellung unser Problem einer bereits vorhandenen Theorie angegliedert.[4])

In der Stiefel'schen Theorie betrachtet man reelle Bilinearformen $f(x, y)$, welche nicht symmetrisch zu sein brauchen; auch die Anzahl r der Unbestimmten x braucht nicht gleich der Anzahl s der Unbestimmten y zu sein. Für ein System derartiger Formen wird der Begriff der «Definitheit» genau so erklärt, wie wir es in Nr. 1 getan haben. Die kleinste Zahl n, für welche es, bei gegebenen r und s, ein definites System von n Formen gibt, heisse $n(r, s)$. Für die Funktion $n(r, s)$ werden untere Schranken angegeben, die uns hier in dem Fall $r=s$ interessieren, da offenbar

$$N(r) \geqq n(r, r)$$

ist. Der diesen Fall betreffende Satz von STIEFEL lautet: Die Zahl ϱ sei durch

$$2^{\varrho-1} < r \leqq 2^{\varrho}$$

bestimmt; dann ist

$$n(r, r) \geqq 2^{\varrho}.$$

Es ist also erst recht

$$N(r) \geqq 2^{\varrho}. \tag{7}$$

Man sieht, dass die hiermit gewonnene untere Schranke 2^{ϱ} von $N(r)$ für die meisten r grösser — also besser — ist als unsere, durch (5) gelieferte Schranke $r+2$. Lediglich für die Zahlen $r=2^{\varrho}-1$ und $r=2^{\varrho}$ ist unsere Schranke um 1, bezw. um 2 grösser als 2^{ϱ}. Dabei ist immerhin bemerkenswert, dass gerade unser «Korollar» (Nr. 3) nicht aus den Stiefel'schen Sätzen gefolgert werden kann; dies ist prinzipiell unmöglich, da sich diese Sätze ja auch auf

[4]) Von E. STIEFEL selbst sind bisher nur sehr spezielle seiner Sätze veröffentlicht worden: Comment. Math. Helvet. 8 (1936), p. 349; sowie: Verhandlungen d. Schweizer. Naturforschenden Gesellschaft, 1935, p. 277. Den Stiefel'schen Hauptsatz samt einem vollständigen, und zwar rein algebraischen Beweis findet man in der Arbeit von F. BEHREND, Compos. Math. 7 (1939), p. 1—19. Der ursprüngliche, topologische Beweis von STIEFEL für den allgemeinen Satz soll demnächst in der Compos. Math. erscheinen; gleichzeitig werde ich dort einen zweiten, ebenfalls topologischen Beweis mitteilen.

unsymmetrische Formen beziehen, das Korollar aber für unsymmetrische Formen seine Gültigkeit verliert; in der Tat ist $n(r,r)=r$ nicht nur für $r=2$, sondern auch für $r=4$ und $r=8$.[4a])

Übrigens ist unser Beweis des Satzes I von den bekannten Beweisen des Stiefel'schen Satzes wesentlich verschieden.

5. Geometrische Deutung der definiten Systeme. Ein definites System von n symmetrischen Bilinearformen $f^1(x,y),\ldots,f^n(x,y)$ in den Veränderlichen $x=(x_1,\ldots,x_r)$, $y=(y_1,\ldots,y_r)$ sei vorgelegt. Wir fassen x und y als Punkte des $(r-1)$-dimensionalen projektiven Raumes P_{r-1} auf. Daneben betrachten wir den n-dimensionalen euklidischen Raum R_n; seine Koordinaten mögen $z_1,\ldots,z_n$ heissen; im R_n sei S_{n-1} die Sphäre vom Radius 1 um den Nullpunkt.

Aus der Definitheit des Systems der f^ν folgt zunächst, dass für keinen Punkt x des P_{r-1} sämtliche n quadratischen Formen $f^\nu(x,x)$ verschwinden; daher werden durch

$$z_\nu(x)=\frac{f^\nu(x,x)}{\sqrt{\sum\limits_l f^l(x,x)^2}}$$

n stetige Funktionen im P_{r-1} erklärt; sie vermitteln eine eindeutige und stetige Abbildung f des projektiven Raumes P_{r-1} in die Sphäre S_{n-1}.

Wir behaupten weiter: diese Abbildung f ist eineindeutig. In der Tat: aus $f(x)=f(y)$ folgt, dass sich die Formen $f^\nu(x,x)$ von den Formen $f^\nu(y,y)$ nur um einen positiven Faktor unterscheiden, der von dem Index ν nicht abhängt; nennen wir den Faktor λ^2, so ist also

$$f^\nu(y,y)=\lambda^2\cdot f^\nu(x,x),\quad \nu=1,\ldots,n;$$

da die Formen symmetrisch sind, folgt hieraus

$$f^\nu(y+\lambda x, y-\lambda x)=0,\quad \nu=1,\ldots,n;$$

da das System definit ist, ist dies nur für $y=\pm\lambda x$ möglich, also nur dann, wenn im projektiven Raume P_{r-1} der Punkt y mit dem Punkt x identisch ist.

Damit ist gezeigt: zu jedem definiten System von n symmetrischen Bilinearformen in zweimal r Veränderlichen gehört eine topologische Abbildung des projektiven Raumes P_{r-1} in die Sphäre S_{n-1}; und für die Zahl $N(r)$ be-

---

4a) Auf die Frage, welche Verschärfungen der Stiefel'sche Satz gestatte, wenn man sich auf symmetrische Formen beschränkt, hat mich Herr BEHREND hingewiesen.

deutet dies: der projektive Raum P_{r-1} besitzt ein topologisches Bild auf der Sphäre $S_{N(r)-1}$.

6. Beweis des «Korollars» (Nr. 3). Aus dem soeben ausgesprochenen geometrischen Satz ist die — auch aus algebraischen Gründen fast selbstverständliche — Tatsache ersichtlich, dass immer $N(r) \geq r$ ist; wir können jetzt auch leicht feststellen, was die Gleichheit $N(r) = r$ bedeutet.

Es sei $N(r) = r$. Dann besitzt P_{r-1} ein topologisches Bild auf S_{r-1}; da P_{r-1} und S_{r-1} geschlossene Mannigfaltigkeiten der gleichen Dimension $r-1$ sind, muss S_{r-1} mit dem Bild von P_{r-1} identisch, die Mannigfaltigkeiten S_{r-1} und P_{r-1} müssen also homöomorph sein. Für $r-1=1$ ist dies in der Tat der Fall: sowohl der Kreis S_1 als auch die projektive Gerade P_1 ist eine einfach geschlossene Linie. Ist aber $r-1>1$, so ist die Sphäre S_{r-1} einfach zusammenhängend — im Gegensatz zu dem Fall $r-1=1$ —, während der projektive Raum P_{r-1} niemals einfach zusammenhängend ist, da sich in ihm die projektive Gerade nicht in einen Punkt deformieren lässt; die fragliche Homöomorphie liegt also für $r-1>1$ nicht vor.

Damit ist gezeigt: für $r>2$ ist $N(r)>r$. Dies ist das Korollar aus Nr. 3.

7. Zurückführung des algebraischen Satzes I auf den topologischen Satz II; ein topologisches Problem. Wir können uns jetzt auf die Fälle $r>2$ beschränken. Nach Nr. 6 ist dann $N(r)>r$; folglich ist das topologische Bild des P_{r-1}, das nach Nr. 5 auf der $S_{N(r)-1}$ existiert, nur ein echter Teil der $S_{N(r)-1}$, und man kann es daher von einem nicht zu ihm gehörigen Punkt der Sphäre aus stereographisch in einen euklidischen Raum $R_{N(r)-1}$ projizieren. Damit sehen wir: für $r>2$ besitzt der projektive Raum P_{r-1} ein topologisches Bild im euklidischen Raum $R_{N(r)-1}$ der Dimension $N(r)-1$.

Damit sind wir zu der Frage gekommen, in welche euklidischen Räume R_d sich ein projektiver Raum P_k topologisch einbetten lässt. Die kleinste Dimensionszahl d, für welche dies möglich ist, heisse $D(k)$. Der soeben festgestellte Zusammenhang mit der Zahl $N(r)$ ist der folgende:

$$D(r-1) \leq N(r)-1 \quad \text{für } r>2. \tag{8}$$

Die Bestimmung der Funktion $D(k)$ ist das topologische Problem, auf das hier hingewiesen werden soll. Ausser den Beschränkungen

$$D(k) \leqq 2k \quad \text{für beliebiges } k,^{5)}$$
$$D(k) \leqq 2k-1 \text{ für ungerades } k>1,$$

die sich aus (8) und (1), bezw. (8) und (3) ergeben, ist unser — leider einziger — Beitrag zur Lösung des Problems der folgende Satz:

Satz II. Für $k>1$ ist

(9) $$D(k) \geqq k+2;$$

mit anderen Worten: für $k>1$ besitzt der k-dimensionale projektive Raum P_k kein topologisches Bild im $(k+1)$-dimensionalen euklidischen Raum R_{k+1}.

Aus (9) und (8) folgt (5); also wird mit dem Satz II zugleich der Satz I bewiesen sein.

Für $k=2$ darf der Satz II als bekannt gelten; denn die projektive Ebene P_2 ist eine nicht-orientierbare geschlossene Fläche, und eine solche lässt sich nicht ohne Selbst-Durchdringungen, also nicht topologisch, im gewöhnlichen Raum R_3 realisieren. Damit ist auf Grund von (8) bereits bewiesen, dass $N(3)>4$ ist; dies ist gleichbedeutend mit dem Satz über die vier Kegelschnitte, der in Nr. 1 formuliert worden ist.

Derselbe Schluss bleibt bekanntlich für alle geraden k gültig: bei geradem k ist der projektive Raum P_k eine nicht-orientierbare geschlossene Mannigfaltigkeit, und daher besitzt er im euklidischen R_{k+1} kein topologisches Bild[6]. Ferner ist der Satz II für die Dimensionszahlen $k=4m-1$ von W. Hantzsche bewiesen worden[7]. Neu ist der Satz also nur für die Dimensionszahlen $k=4m+1$. Der Beweis, den wir jetzt führen werden, gilt aber ohne Fallunterscheidungen gleichzeitig für alle Dimensionszahlen.

§ 2.

8. Verallgemeinerung des Satzes II. Der Beweis des Satzes II wird im Rahmen der Homologie- und Schnitt-Theorie der Mannigfaltigkeiten geführt werden. Als Koeffizientenbereich legen wir den Restklassenring modulo 2 zugrunde. Jeder Mannigfaltigkeit M ist dann ein Ring $\mathfrak{R}(M)$ zugeordnet: seine additive Gruppe ist die direkte Summe der Betti'schen Gruppen der verschiedenen

[5]) Dies ist nur ein Spezialfall des Satzes von E. R. van Kampen (Abh. Math. Seminar Hamburg 9 (1932), p. 72—78), welcher besagt, dass sich jede k-dimensionale Pseudomannigfaltigkeit in den R_{2k} einbetten lässt.

[6]) Man vergl. z.B. Alexandroff-Hopf, Topologie I (Berlin 1935), p. 390.

[7]) W. Hantzsche, Math. Zeitschrift 43 (1937), p. 38—58.

Dimensionen, und die Multiplikation ist durch die Schnittbildung erklärt. Die Mannigfaltigkeiten sollen geschlossen sein; Orientierbarkeit wird nicht vorausgesetzt.

Wir werden die folgende Verallgemeinerung des Satzes II beweisen:

Satz II'. Dafür, dass die k-dimensionale geschlossene Mannigfaltigkeit M_k topologisch in den euklidischen Raum R_{k+1} eingebettet werden kann, ist die folgende Bedingung notwendig:

Die additive Gruppe aller Homologieklassen positiver Dimension von M_k — also die direkte Summe der 1., 2., ... , k-ten Betti'schen Gruppen, ohne die 0-te Betti'sche Gruppe — ist die direkte Summe zweier Ringe (welche Unterringe von $\mathfrak{R}(M_k)$ sind, in welchen also das Produkt durch die Schnittbildung erklärt ist). [8])

Um zu zeigen, dass dies eine Verallgemeinerung des Satzes II ist, stellen wir fest, dass der projektive Raum P_k mit $k > 1$ die im Satz II' ausgesprochene Bedingung nicht erfüllt. Bekanntlich hat der Ring $\mathfrak{R}(P_k)$ modulo 2 die folgende Struktur: in jeder Dimension r, $0 \leq r \leq k$, besteht die Betti'sche Basis aus genau einem Element; es wird durch einen r-dimensionalen projektiven Unterraum P_r von P_k repräsentiert; das k-dimensionale Element ist die Eins des Ringes; das $(k-1)$-dimensionale Element heisse z; dann ist für jedes r das r-dimensionale Basiselement die $(k-r)$-te Potenz z^{k-r} von z. Es sei nun $k > 1$; dann hat z positive Dimension. Wäre die Bedingung aus dem Satz II' erfüllt, so wäre z, da es das einzige, von 0 verschiedene Element seiner Dimension $k-1$ ist, in einem der beiden genannten Ringe, etwa in $\mathfrak{R}_1$, enthalten; da $\mathfrak{R}_1$ ein Ring ist, wäre dann aber auch jede Potenz von z, also insbesondere das Element z^k, das durch einen Punkt repräsentiert wird, in $\mathfrak{R}_1$ enthalten — entgegen der Annahme, dass $\mathfrak{R}_1$ nur Elemente positiver Dimension enthält.

Damit ist gezeigt, dass in der Tat der Satz II in dem Satz II' enthalten ist. [9])

---

[8]) Satz und Beweis bleiben für orientierbare Mannigfaltigkeiten unverändert gültig, wenn man als Koeffizientenbereich statt des Ringes mod. 2 den Restklassenring mod. m mit beliebigem $m > 2$ oder den rationalen Körper zugrundelegt.

[9]) Ebenso ergibt sich aus dem Satz II' die Tatsache, dass der k-dimensionale komplexe projektive Raum, der eine (orientierbare) Mannigfaltigkeit der Dimension $2k$ ist, für $k > 1$ nicht in den R_{2k+1} eingebettet werden kann

Das Prinzip des Beweises für den Satz II' ist das folgende. Wir nehmen an, dass M_k im R_{k+1} liegt. Der Raum R_{k+1} wird durch M_k in zwei Gebiete zerlegt; diese geometrische Zerlegung bewirkt eine Zerfällung der Gesamtheit der Homologieklassen des Komplementärraumes $R_{k+1} - M_k$ in zwei Teile. Die zwischen den Homologie-Eigenschaften von $R_{k+1} - M_k$ und denen von M_k herrschende Dualität, welche durch den Alexander'schen Dualitätssatz und seine Gordon'sche Verfeinerung geklärt ist, hat zur Folge, dass eine ähnliche Zerfällung in zwei Teile auch für den Ring $\mathfrak{R}(M_k)$ vorliegt, und zwar gerade eine solche Zerfällung, wie sie im Satz II' formuliert worden ist.

9. Der Gordon'sche Ring. Ich erinnere hier kurz an die von I. Gordon herrührenden Begriffe und Sätze, die wir soeben erwähnt haben und aus denen sich der Beweis des Satzes II' ergeben wird. [10])

a) Es sei G eine offene Menge im euklidischen R_n. Sind X, Y zwei berandungsfähige [11]) Zyklen in G, so gibt es Komplexe A, B in R_n mit [12]) $\dot{A} = X$, $\dot{B} = Y$. Der Rand des Schnittes $A \cdot B$ ist

$$(A \cdot B)^{\cdot} = X \cdot B + Y \cdot A\,;$$

er ist also, da $X \subset G$ und $Y \subset G$ ist, selbst ein (berandungsfähiger) Zyklus in G; man sieht leicht, dass seine Homologieklasse in G erstens bei festen X, Y unabhängig von der Willkür bei der Wahl von A, B ist, und dass sie sich zweitens auch nicht ändert, wenn man X, Y in ihren Homologieklassen von G variiert. Bezeichnet

---

(für $k = 1$ ist er eine Kugelfläche); auch dies war bisher nur für die geraden k bekannt (Hantzsche, a.a.O.). — Ferner folgt aus Satz II' z. B., bei Benutzung rationaler Koeffizienten: Die m-te Betti'sche Gruppe einer $M_{2m} \subset R_{2m+1}$ ist direkte Summe zweier Gruppen, von denen sich jede bei der Schnitt-Multiplikation selbst annulliert. Dies ist, infolge des Poincaré-Veblen'schen Dualitätssatzes, eine Verschärfung der bekannten Tatsache (Hantzsche, a.a.O.), dass die m-te Betti'sche Zahl gerade sein muss.

[10]) I. Gordon, Ann. of Math. (2) 37 (1936), p. 519—525. — Die Gordon'schen Sätze können als Verfeinerungen des Alexander'schen Dualitätssatzes angesehen werden; letzterer ist das wesentliche Hilfsmittel in der Arbeit von Hantzsche; aus dieser Arbeit entsteht bei Vornahme der Gordon'schen Verfeinerung ziemlich zwangsläufig der Beweis unseres Satzes II'.

[11]) Berandungsfähig sind ausser allen Zyklen positiver Dimension diejenigen 0-dimensionalen Zyklen, in welchen die Koeffizientensumme der Punkte gleich 0 ist; modulo 2 also diejenigen, die aus einer geraden Anzahl von Punkten bestehen. Man vergl. Alexandroff-Hopf [6]), p. 179.

[12]) Ein oben angesetzter Punkt bedeutet die algebraische Randbildung.

man die Homologieklasse von $(A \cdot B)^{\cdot}$ mit $[X, Y]$, so kann man daher $[X, Y]$ als «Produkt» zweier Homologieklassen deuten. Diese Multiplikation ist assoziativ, und sie ist mit der Betti'schen Addition distributiv verknüpft. Somit sind die berandungsfähigen Homologieklassen von G zu einem Ring verschmolzen; wir nennen ihn $P(G)$.

Haben X, Y die Dimensionszahlen p bezw. q, so hat $[X, Y]$ die Dimensionszahl $p+q+1-n$.[13])

b) Es sei M_k eine, im allgemeinen «krumme»[14]), k-dimensionale geschlossene Mannigfaltigkeit im R_n. Jeder berandungsfähigen p-dimensionalen Homologieklasse X von $R_n - M_k$ wird durch die folgende Vorschrift eine $(p-n+k+1)$-dimensionale Homologieklasse $x = \Gamma(X)$ von M_k zugeordnet: «Für jede $(n-1-p)$-dimensionale Homologieklasse von M_k ist die Verschlingungszahl mit X gleich der Schnittzahl mit x.» Dass die Zuordnung Γ eindeutig ist, ergibt sich leicht aus den Dualitätssätzen von ALEXANDER und von POINCARÉ-VEBLEN.

Man kann — bei Zuhilfenahme einiger simplizialer Approximationen — Γ auch so erklären: «$\Gamma(X)$ ist diejenige Homologieklasse von M_k, in welcher sich die Schnittzyklen $A \cdot M_k$ der von X berandeten Komplexe A mit der Mannigfaltigkeit M_k befinden.» Die Äquivalenz mit der vorigen Definition wird leicht bestätigt.

c) Aus den soeben genannten Dualitätssätzen ergibt sich ferner ohne weiteres, dass Γ eine eineindeutige und additiv isomorphe Abbildung des Ringes $P(R_n - M_k)$ auf den Ring $\mathfrak{R}(M_k)$ ist. Es gilt aber sogar der Gordon'sche Dualitätssatz: Γ ist auch ein multiplikativer Isomorphismus.

Die Gültigkeit dieses Satzes erkennt man leicht auf Grund der zweiten Definition von Γ, die unter b) ausgesprochen wurde: ist

$$A^{\cdot} = X, \quad B^{\cdot} = Y, \quad [X, Y] = (A \cdot B)^{\cdot},$$

so ist nach dieser Definition

$$\Gamma(X) = A \cdot M_k, \quad \Gamma(Y) = B \cdot M_k, \quad \Gamma[X, Y] = (A \cdot B) \cdot M_k,$$

und man hat zum Beweise des Gordon'schen Dualitätssatzes nur

---

[13]) Die hier und im folgenden vorkommenden Zyklen und Homologieklassen sollen immer homogen-dimensional sein. (Ein Komplex heisst homogen r-dimensional, wenn jedes seiner Simplexe entweder r-dimensional ist oder auf einem r-dimensionalen Simplex liegt; eine Homologieklasse heisst homogen-dimensional, wenn sie homogen-dimensionale Zyklen enthält.)

[14]) ALEXANDROFF-HOPF[6]), p. 149.

zu zeigen, dass $(A \cdot B) \cdot M_k$ dem Schnitt von $A \cdot M_k$ mit $B \cdot M_k$ auf M_k homolog ist.[15])

10. Zusatz zur Gordon'schen Theorie. Wir machen einen Zusatz zu Nr. 9 a). Die offene Menge G zerfalle in Komponenten $G^{(i)}$:

$$G = G' + G'' + \cdots.$$

Da für zwei Zyklen X, Y aus $G^{(i)}$ das Produkt $[X, Y]$ offenbar davon unabhängig ist, ob man die Multiplikation in $P(G^{(i)})$ oder in $P(G)$ betrachtet, ist $P(G^{(i)})$ ein Unterring von $P(G)$. Ferner ist klar, dass $P(G^{(i)})$ und $P(G^{(j)})$ für $i \neq j$ kein von 0 verschiedenes Element gemeinsam haben; folglich enthält $P(G)$ die direkte Summe

$$P^*(G) = P(G') + P(G'') + \cdots;$$

sie ist eine additive Untergruppe von $P(G)$.

Da $G^{(i)}$ zusammenhängend ist, berandet in $G^{(i)}$ jeder berandungsfähige 0-dimensionale Zyklus, und er stellt daher das Null-Element der Betti'schen Gruppen dar; mithin besteht der Ring $P(G^{(i)})$, der ja nur berandungsfähige Homologieklassen enthält, nur aus Elementen positiver Dimension; folglich haben auch alle Elemente von $P^*(G)$ positive Dimension[16]). Umgekehrt: ist X ein Zyklus positiver Dimension in G, so ist er von der Form

$$X = X' + X'' + \cdots, \quad X^{(i)} \subset G^{(i)},$$

wobei die $X^{(i)}$ Zyklen derselben positiven Dimension sind; die Homologieklasse von $X^{(i)}$ ist Element von $P(G^{(i)})$, und daher die Homologieklasse von X Element von $P^*(G)$. Somit besteht $P^*(G)$ aus allen Elementen positiver Dimension von $P(G)$.

Das Ergebnis ist: Die Gruppe $P^*(G)$ aller Homologieklassen positiver Dimension von G ist die direkte Summe von g Unterringen des Ringes $P(G)$; dabei ist g die Anzahl der Komponenten von G.

11. Beweis des Satzes II'. Es sei M_k eine geschlossene Mannigfaltigkeit im R_{k+1}; ihre offene Komplementärmenge zerfällt nach dem Jordan-Brouwer'schen Satz in zwei Gebiete:

$$R_{k+1} - M_k = G' + G''.$$

---

[15]) Ersetzt man die Mannigfaltigkeit M_k durch ein beliebiges Polyeder (oder sogar ein beliebiges Kompaktum) Q, so lässt sich der Gordon'sche Dualitätssatz aufrechterhalten, wenn man in Q statt des Schnittringes den Alexander-Kolmogoroff'schen Homologiering der oberen Zyklen heranzieht; dies ist von H. Freudenthal, Ann. of Math. (2), 38 (1937), p. 647—655, und von A. Komatu, Tôhoku Math. Journal 43 (1937), p. 414—420, bewiesen worden.

[16]) Dem Null-Element kommt jede Dimension zu, es gehört also auch zu den Elementen positiver Dimension.

Nach Nr. 10 bilden die Homologieklassen positiver Dimension von $R_{k+1} - M_k$ eine additive Gruppe, die direkte Summe zweier Ringe ist:

$$P^*(R - M) = P(G') + P(G'') .$$

Der Gordon'sche Isomorphismus Γ ist, da $n = k + 1$ ist, nach Nr. 9b) dimensionstreu. Folglich ist auch in dem Ring $\mathfrak{R}(M_k)$ die Gruppe der Elemente positiver Dimension direkte Summe zweier Ringe, nämlich der Ringe $\Gamma P(G')$ und $\Gamma P(G'')$.[17])

---

[17]) Setzt man von M_k einige Regularität — etwa Simplizialität oder Differenzierbarkeit — voraus, so zeigt man leicht: $\Gamma P(G')$ besteht aus denjenigen Zyklen von M_k, welche in G'' beranden, $\Gamma P(G'')$ aus denjenigen, die in G' beranden.