Über eine Verallgemeinerung des Satzes von Meusnier.

Von

PAUL FINSLER (Zürich).

(Als Manuskript eingegangen am 27. Februar 1940.)

Der Satz von MEUSNIER über die Krümmung von Flächenkurven lässt verschiedene Verallgemeinerungen auf höhere Räume zu. Er gilt z.B., wie E.E. LEVI[1]) gezeigt hat, auch für die νte Krümmung von Kurven einer m-dimensionalen Fläche in einem n-dimensionalen euklidischen Raum, welche dieselben «regulären» (d.h. nicht in dem durch die vorhergehenden Normalen und den Tangentialraum der Fläche bestimmten Raumelement enthaltenen, insbesondere also die Fläche nicht berührenden) $\nu-1$ ersten Normalen und somit einen gemeinsamen ν-dimensionalen Schmiegungsraum besitzen. Für den Fall, dass dieser Schmiegungsraum zur Fläche normal ist, habe ich den Satz (ohne Kenntnis des genannten Resultates) für Räume mit allgemeiner Massbestimmung hergeleitet und für die Definition der höheren Krümmungen einer Fläche verwendet[2]). Im folgenden soll nun gezeigt werden, dass er sich (etwas verschärft) auch für den Fall beliebiger Schmiegungsräume auf die allgemeine Massbestimmung übertragen lässt. Zuerst werden die benötigten Grundformeln kurz zusammengestellt.

1. Länge und Winkel.

Die Bogenlänge s einer Kurve $\mathfrak{x}=\mathfrak{x}(t)$ des n-dimensionalen Raumes wird durch ein einfaches Integral gemessen:

$$s=\int F(\mathfrak{x},\mathfrak{x}')dt.$$

[1]) E.E. LEVI. Saggio sulla teoria delle superficie a due dimensioni immerse in un iperspazio. Annali R. Scuola Norm. Pisa 10 (1908).

[2]) P. FINSLER. Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen. Dissertation Göttingen (1918), Kap. XIII.

Dabei soll im betrachteten Bereich stets $F > 0$ und für $k > 0$ $F(\mathfrak{x}, k\mathfrak{x}') = kF(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}')$ sein, so dass die Länge nicht von der Parameterdarstellung der Kurve abhängt. Es folgt

$$\sum_{i=1}^{n} x_i' F_{x'_i} = F \text{ und } \sum_{i=1}^{n} x_i' F_{x'_i x'_j} = 0 \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Zur Abkürzung werde

$$\sum_{i,j} u_i v_j F_{x'_i x'_j} = \Phi(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}) \text{ und } \Phi(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}) = \Phi(\mathfrak{u})$$

gesetzt. Es ist $\Phi(\mathfrak{x}') = 0$, es soll aber $\Phi(\mathfrak{u}) > 0$ sein, wenn $\mathfrak{u}$ von $\mathfrak{x}'$ linear unabhängig ist. Diese Bedingung besagt, dass die Indikatrix von Carathéodory, die in dem von den Vektoren $\mathfrak{x}'$ im Punkt $\mathfrak{x}$ aufgespannten n-dimensionalen linearen Tangentialraum die Gleichung $F(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}') = 1$ besitzt, gegen den Grundpunkt zu konkav gekrümmt ist.

Der Winkel φ, unter dem eine Kurve $\mathfrak{x}(t)$ von einer Kurve $\mathfrak{y}(t)$ im Punkte P getroffen wird, kann durch den Cosinus definiert werden. Wenn die vom Grundpunkt P ausgehenden Richtungen $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{y}'$ der beiden Kurven die Indikatrix in den Punkten X und Y treffen und $\overline{Y}$ die transversale Projektion des Punktes Y auf die Gerade PX darstellt, so dass also $Y\overline{Y}$ zu der im Punkt X an die Indikatrix gelegten Tangentialhyperebene parallel ist, so soll gelten:

$$\cos \varphi = \frac{P\overline{Y}}{PX}.$$

Diese Definition entspricht der üblichen Deutung des Cosinus am Einheitskreis. Wenn $\mathfrak{y}'$ selbst zu $\mathfrak{x}'$ transversal ist, so wird $\cos \varphi = 0$; die Transversalität entspricht also dem Senkrechtstehen. Die Richtung $\mathfrak{x}'$ ist ausgezeichnet, die Definition ist also nicht symmetrisch, doch kommt dies nur für endlich bleibende Winkel in Betracht. Aus der Gleichung der Indikatrix ergibt sich

$$\cos \varphi = \frac{\sum y_i' F_{x'_i}}{F(\mathfrak{y}, \mathfrak{y}')}.$$

Für kleine Winkel erhält man hieraus durch Reihenentwicklung den Wert

$$\varphi^2 = \frac{1}{F} \Phi(\mathfrak{y}' - \mathfrak{x}') + \cdots$$

oder

$$d\varphi^2 = \frac{1}{F} \Phi(d\mathfrak{x}').$$

Der Winkel ψ zwischen zwei Flächenelementen, die durch die Richtungen $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{u}$, bzw. $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{v}$ festgelegt sind, kann ebenfalls geometrisch definiert werden. Man verlangt, dass in dem durch die Vektoren $\mathfrak{x}', \mathfrak{x}' + \varepsilon\mathfrak{u}, \mathfrak{x}' + \varepsilon\mathfrak{v}$ gebildeten Dreikant für $\varepsilon \to 0$ der Cosinussatz gelten soll und findet so den Ausdruck

$$\cos^2 \psi = \frac{\Phi^2(\mathfrak{u}, \mathfrak{v})}{\Phi(\mathfrak{u})\,\Phi(\mathfrak{v})}\,.$$

Das Normalsein ($\cos \psi = 0$) von zwei solchen Flächenelementen wird also durch

$$\Phi(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}) = 0$$

angegeben. Die Funktion $\Phi(\mathfrak{u}, \mathfrak{v})$ hat Ähnlichkeit mit einem inneren Produkt; für Vektoren, die nicht die Richtung von $\mathfrak{x}'$ besitzen, kann auch aus $\Phi(\mathfrak{u}) = 0$ auf $\mathfrak{u} = 0$ geschlossen werden.

Das von $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{u}$ festgelegte Flächenelement heisse die Ebene des Vektors $\mathfrak{u}$.

Als Winkel zwischen den Normalen einer Kurve, die in P die Richtung $\mathfrak{x}'$ besitzt, soll der Winkel zwischen den Ebenen dieser Normalen gelten. Es ist dies auch der Winkel, den die Normalen in bezug auf eine oskulierende quadratische Indikatrix bilden, welche die gegebene Indikatrix im Punkt X in zweiter Ordnung berührt.

Ebenso ist als Flächennormale einer event. mehrdimensionalen Fläche in bezug auf eine in P gegebene Richtung $\mathfrak{x}'$ der Fläche jeder zu $\mathfrak{x}'$ transversale Vektor $\mathfrak{n}$ zu betrachten, dessen Ebene zu allen $\mathfrak{x}'$ enthaltenden und die Fläche in P berührenden Ebenen normal ist, so dass also $\Phi(\mathfrak{n}, \mathfrak{v}) = 0$ ist für alle Vektoren $\mathfrak{v}$, die die Fläche in P berühren.

2. Die Krümmungen einer Kurve.

Die erste Krümmung einer Kurve lässt sich in einfacher Verallgemeinerung der üblichen Definition erhalten. Umgibt man die Tangente der Kurve $\mathfrak{x}(t)$, also die in P berührende Extremale, mit einem Feld von Kurven $\mathfrak{y}(t)$, so bestimmt dieses in jedem Punkt der Kurve $\mathfrak{x}$ einen Winkel ϑ_1, dessen Ableitung nach der Bogenlänge im Berührungspunkt die Krümmung ergibt:

$$k_1 = \frac{d\vartheta_1}{ds}\,.$$

Man kann auch die Kurve selbst mit einem Kurvenfeld umgeben und den Winkel mit der Tangente nach der Bogenlänge der Tangente ableiten. In beiden Fällen erhält man, wenn der

Parameter t durch $t = t(\mathfrak{x})$ (z. B. $t = x_1$) für alle Kurven einheitlich gewählt ist, das Resultat

$$k_1^2 = \left(\frac{d\vartheta_1}{ds}\right)^2 = \frac{\Phi(\mathfrak{x}'' - \mathfrak{y}'')}{F^3}.$$

Es ist bemerkenswert, dass hier keine eigentliche Parallelverschiebung notwendig ist, um den Winkel ϑ_1 zu bestimmen; es genügt ein beliebiges Kurvenfeld und das Ergebnis ist unabhängig von der speziellen Wahl des Feldes.

Der Vektor $\mathfrak{x}'' - \mathfrak{y}''$, der in der Formel für k_1^2 auftritt, legt, sofern k_1 nicht verschwindet, mit $\mathfrak{x}'$ zusammen die Schmiegungsebene der Kurve fest. Um diese geometrisch zu definieren, kann man die folgende, auch sonst brauchbare Bemerkung verwenden:

Wenn sich zwei Kurven in einem Punkt P treffen oder in beliebiger Ordnung berühren, so besitzen alle zweidimensionalen Flächen, welche die Kurven enthalten, in P dasselbe Flächenelement. Wird insbesondere die eine Kurve auf die andere durch eine beliebige Kurvenschar projiziert, so gehört immer die Projektionsrichtung, d. h. die Richtung der durch P gehenden Kurve der Schar, diesem Flächenelement an.

Wenn die beiden Kurven die gegebene Kurve und ihre Tangente sind, so definiert dieses Flächenelement die Schmiegungsebene, und die Extremalen, welche sie in P berühren, bilden die Schmiegungsfläche; diese wird von der Kurve in mindestens zweiter Ordnung berührt.

Um nun weiter die zweite Krümmung oder Torsion einer Kurve zu finden, ist es zweckmässig, von der üblichen Definition etwas stärker abzuweichen.

Man projiziert die Kurve $\mathfrak{x}$ normal auf die Schmiegungsfläche, d. h. die Projektionsrichtung in P soll mit $\mathfrak{x}'$ zusammen ein Flächenelement festlegen, das zur Schmiegungsebene normal ist, und man erhält so eine Kurve $\mathfrak{y}_2$, die von $\mathfrak{x}$ ebenfalls in mindestens zweiter Ordnung berührt wird. Wenn man jetzt wieder die Kurve $\mathfrak{x}$ mit einem Kurvenfeld umgibt und den Winkel ϑ_2 betrachtet, den die Kurven des Feldes mit $\mathfrak{y}_2$ bilden, so verschwindet die erste Ableitung von ϑ_2 nach der Bogenlänge s; die zweite Ableitung aber ergibt das Produkt von Krümmung und Torsion:

$$k_1 k_2 = \frac{d^2\vartheta_2}{ds^2},$$

und man erhält die Formel:

$$(k_1 k_2)^2 = \frac{\Phi(\mathfrak{x}''' - \mathfrak{y}_2''')}{F^5}.$$

Man sieht jetzt leicht, wie man die höheren Krümmungen finden kann. Eine Fläche, oder eine Projektionsrichtung, die $\mathfrak{x}$ mit $\mathfrak{y}_2$ verbindet, definiert in P für $k_1 k_2 \neq 0$ ein Flächenelement, das mit der Schmiegungsebene zusammen ein bestimmtes Raumelement festlegt. Die Extremalen, welche dieses Raumelement in P berühren, geben den dreidimensionalen Schmiegungsraum, der von der Kurve in mindestens dritter Ordnung berührt wird. Die normale Projektion der Kurve $\mathfrak{x}$ auf diesen Schmiegungsraum liefert eine Kurve $\mathfrak{y}_3$ und diese trifft das Kurvenfeld unter einem Winkel ϑ_3, dessen dritte Ableitung das Produkt der drei ersten Krümmungen liefert:

$$(k_1 k_2 k_3)^2 = \left(\frac{d^3\vartheta_3}{ds^3}\right)^2 = \frac{\Phi(\mathfrak{x}'''' - \mathfrak{y}_3'''')}{F^7}.$$

Ebenso erhält man das Produkt der ν ersten Krümmungen aus

$$(k_1 k_2 \ldots k_\nu)^2 = \left(\frac{d^\nu\vartheta_\nu}{ds^\nu}\right)^2 = \frac{\Phi(\mathfrak{x}^{(\nu+1)} - \mathfrak{y}_\nu^{(\nu+1)})}{F^{2\nu+1}}.$$

Der Vektor $\mathfrak{x}^{(\nu+1)} - \mathfrak{y}_\nu^{(\nu+1)}$ legt, wenn er nicht verschwindet, mit $\mathfrak{x}'$ zusammen die Ebene der νten Normale fest. Die νte Normale der Kurve liegt in dieser Ebene transversal zur Richtung $\mathfrak{x}'$.

3. Die erste Krümmung von Flächenkurven.

Es werden Kurven betrachtet, die auf m-dimensionalen Flächen im n-dimensionalen Raum verlaufen und in einem Punkt P dieselbe Richtung, also dieselbe Tangente $\mathfrak{y}$ besitzen.

Wenn die Schmiegungsebenen zweier solcher Kurven $\mathfrak{x}$ und $\bar{\mathfrak{x}}$ in P zur Fläche normal sind, so ist

$$\Phi(\mathfrak{x}'' - \mathfrak{y}'', \mathfrak{v}) = 0 \quad \text{und} \quad \Phi(\bar{\mathfrak{x}}'' - \mathfrak{y}'', \mathfrak{v}) = 0$$

für jeden Vektor $\mathfrak{v}$, der in P die Fläche berührt. Da aber die beiden Kurven sich berühren und der Fläche angehören, so ist $\mathfrak{x}'' - \bar{\mathfrak{x}}''$ ein solcher Vektor $\mathfrak{v}$, und durch Einsetzen und Subtrahieren ergibt sich $\Phi(\mathfrak{x}'' - \bar{\mathfrak{x}}'') = 0$, und hieraus folgt[3] $\mathfrak{x}'' = \bar{\mathfrak{x}}''$. Alle solchen Kurven (zu denen auch die berührende geodätische Linie gehört) berühren sich also in zweiter Ordnung und besitzen in P dieselbe Krümmung und dieselbe Schmiegungsebene.

---

[3]) Aus $t = t(\mathfrak{x}) = t(\bar{\mathfrak{x}})$ und $\mathfrak{x}' = \bar{\mathfrak{x}}'$ folgt $\sum_i t_{x_i}(x_i'' - \bar{x}_i'') = 0$; der Vektor $\mathfrak{x}'' - \bar{\mathfrak{x}}''$ berührt also in P die Fläche $t = \text{const}$ und hat deshalb nicht die Richtung von $\mathfrak{x}'$. Bei Berührung νter Ordnung zwischen $\mathfrak{x}$ und $\bar{\mathfrak{x}}$ gilt dasselbe für den Vektor $\mathfrak{x}^{(\nu+1)} - \bar{\mathfrak{x}}^{(\nu+1)}$.

Es zeigt sich daher, dass auch für $m < n-1$ durch ein Linienelement einer Fläche nur ein Flächenelement geht, das zur Fläche normal und zugleich Schmiegungsebene einer Flächenkurve ist; man kann es die Schmiegungsnormalebene der Fläche nennen. Die gemeinsame Krümmung der betrachteten Kurven ist die Normalkrümmung $\varkappa$ der Fläche.

Es sei jetzt die Schmiegungsebene der Kurve $\mathfrak{x}$ zur Fläche normal, die von $\bar{\mathfrak{x}}$ aber beliebig. Für die Krümmungen $\varkappa$ und k von $\mathfrak{x}$ und $\bar{\mathfrak{x}}$ gilt dann

$$\varkappa^2 = \frac{\Phi(\mathfrak{x}''-\mathfrak{y}'')}{F^3} \quad \text{und} \quad k^2 = \frac{\Phi(\bar{\mathfrak{x}}''-\mathfrak{y}'')}{F^3},$$

und der Winkel ψ zwischen den Schmiegungsebenen der beiden Kurven bestimmt sich aus

$$\cos^2\psi = \frac{\Phi^2(\mathfrak{x}''-\mathfrak{y}'', \bar{\mathfrak{x}}''-\mathfrak{y}'')}{\Phi(\mathfrak{x}''-\mathfrak{y}'')\,\Phi(\bar{\mathfrak{x}}''-\mathfrak{y}'')}.$$

Nun ist wie oben $\Phi(\mathfrak{x}''-\mathfrak{y}'', \mathfrak{x}''-\bar{\mathfrak{x}}'') = 0$.

Dies zu $\Phi(\mathfrak{x}''-\mathfrak{y}'', \bar{\mathfrak{x}}''-\mathfrak{y}'')$

addiert gibt $\Phi(\mathfrak{x}''-\mathfrak{y}'')$, also wird

$$\cos^2\psi = \frac{\Phi(\mathfrak{x}''-\mathfrak{y}'')}{\Phi(\bar{\mathfrak{x}}''-\mathfrak{y}'')} = \frac{\varkappa^2}{k^2}$$

oder

$$\varkappa^2 = k^2\cos^2\psi.$$

Für $\varkappa \neq 0$ haben die Krümmungen gleiches Vorzeichen. Es ergibt sich somit der Satz von Meusnier für allgemeine Räume in der folgenden Form:

Satz I. Alle Kurven einer m-dimensionalen Fläche im n-dimensionalen Raum, welche in einem Punkt P eine gemeinsame Tangente und zur Fläche normale Schmiegungsebenen besitzen, haben in P dieselbe Krümmung (die Normalkrümmung $\varkappa$) und dieselbe Schmiegungsebene (die Schmiegungsnormalebene der Fläche). Ist k die Krümmung einer Flächenkurve, welche in P dieselbe Tangente besitzt und deren Schmiegungsebene mit der Schmiegungsnormalebene der Fläche den Winkel ψ einschliesst, so ist $\varkappa = k\cos\psi$.

4. Die zweite Krümmung von Flächenkurven.

Wir betrachten jetzt Flächenkurven, die in P eine gemeinsame Schmiegungsebene besitzen; diese soll nicht dem Tangentialraum der Fläche angehören und die Normalkrümmung soll nicht verschwinden; die «Asymptotenrichtungen» der Fläche werden also ausgeschlossen. Es folgt, dass die betrachteten Kurven in P auch dieselbe Tangente besitzen, da die Schmiegungsebene nur eine Richtung mit der Fläche gemeinsam hat. Dabei muss aber hier und im folgenden festgesetzt werden, dass, sofern nicht identisch $F(\mathfrak{x}, -\mathfrak{x}') = F(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}')$ ist, mit der Richtung $\mathfrak{x}'$ nicht zugleich auch die Richtung $-\mathfrak{x}'$ dem betrachteten Bereich angehören soll, damit durch ein Linienelement nur eine Extremale festgelegt wird. Die Richtungen der Kurven sind dann also stets im gleichen Sinne positiv anzunehmen.

Sind $\mathfrak{x}$ und $\bar{\mathfrak{x}}$ zwei der Kurven, so haben sie nach Satz I dieselbe Krümmung k_1, berühren sich daher in zweiter Ordnung und der Vektor $\mathfrak{x}''' - \bar{\mathfrak{x}}'''$ berührt in P die Fläche. Sind weiter $\mathfrak{y}_2$ und $\bar{\mathfrak{y}}_2$ normale Projektionen der beiden Kurven auf die Schmiegungsfläche, so berühren auch diese sich in zweiter Ordnung und der Vektor $\bar{\mathfrak{y}}_2''' - \mathfrak{y}_2'''$ berührt in P die Schmiegungsfläche. Die Torsionen von $\mathfrak{x}$ und $\bar{\mathfrak{x}}$ ergeben sich aus

$$(k_1 k_2)^2 = \frac{\Phi(\mathfrak{x}''' - \mathfrak{y}_2''')}{F^5} \quad \text{und} \quad (k_1 \bar{k}_2)^2 = \frac{\Phi(\bar{\mathfrak{x}}''' - \bar{\mathfrak{y}}_2''')}{F^5}.$$

Der Vektor $\mathfrak{x}''' - \mathfrak{y}_2'''$ bestimmt mit $\mathfrak{x}'$ zusammen die Ebene der zweiten Normale (Binormale) von $\mathfrak{x}$; wenn diese zur Fläche normal ist, so gilt

$$\Phi(\mathfrak{x}''' - \mathfrak{y}_2''',\ \mathfrak{x}''' - \bar{\mathfrak{x}}''') = 0 \quad \text{und} \quad \Phi(\mathfrak{x}''' - \mathfrak{y}_2''',\ \bar{\mathfrak{y}}_2''' - \mathfrak{y}_2''') = 0.$$

Ist nun ψ der Winkel zwischen den (Ebenen der) Binormalen der Kurven $\mathfrak{x}$ und $\bar{\mathfrak{x}}$, so ist

$$\cos^2 \psi = \frac{\Phi^2(\mathfrak{x}''' - \mathfrak{y}_2''', \bar{\mathfrak{x}}''' - \bar{\mathfrak{y}}_2''')}{\Phi(\mathfrak{x}''' - \mathfrak{y}_2''')\,\Phi(\bar{\mathfrak{x}}''' - \bar{\mathfrak{y}}_2''')}.$$

Durch Addition der vorhergehenden Ausdrücke zu der im Zähler stehenden Funktion erhält man

$$\Phi(\mathfrak{x}''' - \mathfrak{y}_2''',\ \bar{\mathfrak{x}}''' - \bar{\mathfrak{y}}_2''') = \Phi(\mathfrak{x}''' - \mathfrak{y}_2''',\ \mathfrak{x}''' - \bar{\mathfrak{y}}_2''') = \Phi(\mathfrak{x}''' - \mathfrak{y}_2'''),$$

also

$$\cos^2 \psi = \frac{\Phi(\mathfrak{x}''' - \mathfrak{y}_2''')}{\Phi(\bar{\mathfrak{x}}''' - \bar{\mathfrak{y}}_2''')} = \left(\frac{k_2}{\bar{k}_2}\right)^2$$

oder

$$k_2 = \bar{k}_2 \cos \psi.$$

Wenn die Binormale der Kurve $\bar{\mathfrak{x}}$ ebenfalls zur Fläche normal ist, so gilt

$$\Phi(\bar{\mathfrak{x}}''' - \bar{\mathfrak{y}}_2''',\ \mathfrak{x}''' - \bar{\mathfrak{x}}''') = 0 \quad \text{und} \quad \Phi(\bar{\mathfrak{x}}''' - \bar{\mathfrak{y}}_2''',\ \bar{\mathfrak{y}}_2''' - \mathfrak{y}_2''') = 0;$$

dies von den entsprechenden Ausdrücken für $\mathfrak{x}$ subtrahiert, ergibt $\Phi(\mathfrak{x}''' - \mathfrak{y}_2''' - (\bar{\mathfrak{x}}''' - \bar{\mathfrak{y}}_2'''), \mathfrak{x}''' - \bar{\mathfrak{x}}''') = 0$ und $\Phi(\mathfrak{x}''' - \mathfrak{y}_2''' - (\bar{\mathfrak{x}}''' - \bar{\mathfrak{y}}_2'''), \bar{\mathfrak{y}}_2''' - \mathfrak{y}_2''') = 0$, und durch Addition dieser Gleichungen folgt

$$\Phi(\mathfrak{x}''' - \mathfrak{y}_2''' - (\bar{\mathfrak{x}}''' - \bar{\mathfrak{y}}_2''')) = 0$$

und

$$\mathfrak{x}''' - \mathfrak{y}_2''' = \bar{\mathfrak{x}}''' - \bar{\mathfrak{y}}_2''' .$$

Die beiden Kurven $\mathfrak{x}$ und $\bar{\mathfrak{x}}$ haben dann also denselben dreidimensionalen Schmiegungsraum und dieselbe Torsion.

Es ist noch zu zeigen, dass unter den betrachteten Kurven mit gleicher Schmiegungsebene für $n > m + 1$ immer auch solche vorhanden sind, deren Binormale zur Fläche normal ist. Obschon im allgemeinen Fall (Nr. 5) enthalten, dürfte es deutlicher sein, dies besonders auszuführen.

Es gibt im n-dimensionalen Raum $n - m - 1$ linear unabhängige Richtungen, die im Punkt P in bezug auf die Richtung $\mathfrak{x}'$ zu der m-dimensionalen Fläche und zugleich zur gegebenen Schmiegungsebene normal sind. Diese Richtungen bestimmen mit der Schmiegungsebene zusammen ein $(n - m + 1)$-dimensionales Raumelement, und die Extremalen, welche dieses in P berühren, bilden einen $(n - m + 1)$-dimensionalen Raum, welcher die m-dimensionale Fläche nach einer Kurve $\mathfrak{x}$ schneidet.

Diese Kurve besitzt in P die gegebene Richtung $\mathfrak{x}'$, denn dies ist die einzige Richtung, die dem konstruierten Raum und der Fläche zugleich angehört. Sie besitzt aber auch die gegebene Schmiegungsebene, denn wenn $\bar{\mathfrak{x}}$ eine der gegebenen Flächenkurven ist, so gehören die Vektoren $\mathfrak{x}'' - \mathfrak{y}''$ und $\bar{\mathfrak{x}}'' - \mathfrak{y}''$ und daher auch ihre Differenz $\mathfrak{x}'' - \bar{\mathfrak{x}}''$ dem konstruierten Raum an, die letztere aber zugleich der gegebenen Fläche, ohne doch die Richtung $\mathfrak{x}'$ zu besitzen[4]). Es folgt also $\mathfrak{x}'' = \bar{\mathfrak{x}}''$.

Da die Kurve $\mathfrak{x}$ in dem oben konstruierten $(n - m + 1)$-dimensionalen Raum verläuft, so muss ihre Binormale für $n - m + 1 \geqq 3$ dem zugehörigen Raumelement und, da sie zur Schmiegungsebene normal ist, dem zuerst konstruierten Normalraum der Fläche angehören und ist daher selbst zur Fläche normal. Nur wenn die Torsion der Kurve verschwindet, ist die Richtung der Binormale nicht eindeutig festgelegt; sie kann aber auch in diesem Fall zur Fläche normal angenommen werden.

Es ergeben sich also die in Satz II (s. u.) für $v = 2$ enthaltenen Resultate.

---

[4]) Vgl. Fussnote [3]).

5. Die höheren Krümmungen von Flächenkurven.

Es seien jetzt $\mathfrak{x}$ und $\bar{\mathfrak{x}}$ zwei Flächenkurven, deren $\nu-1$ erste Krümmungen in P nicht verschwinden und die dort denselben ν-dimensionalen Schmiegungsraum besitzen. Dieser soll mit der gegebenen Fläche in P nur eine (positive) Richtung gemeinsam haben, die also mit $\mathfrak{x}'$ und $\bar{\mathfrak{x}}'$ zusammenfallen muss. Die Kurven haben somit dieselbe Tangente.

Wenn sich ferner die beiden Kurven in mindestens μter Ordnung berühren und $\mu<\nu$ ist, so berühren sie sich auch in $(\mu+1)$-ter Ordnung. Die Ebenen der μten Normalen werden nämlich durch die Vektoren $\mathfrak{x}^{(\mu+1)}-\mathfrak{y}_\mu^{(\mu+1)}$ und $\bar{\mathfrak{x}}^{(\mu+1)}-\bar{\mathfrak{y}}_\mu^{(\mu+1)}$ festgelegt, die ebenso wie ihre Differenz $\mathfrak{x}^{(\mu+1)}-\bar{\mathfrak{x}}^{(\mu+1)}-(\mathfrak{y}_\mu^{(\mu+1)}-\bar{\mathfrak{y}}_\mu^{(\mu+1)})$ dem gemeinsamen Schmiegungsraum angehören müssen. Da nun die Kurven $\mathfrak{y}_\mu$ und $\bar{\mathfrak{y}}_\mu$ in dem Schmiegungsraum verlaufen und sich in μter Ordnung berühren, so gehört auch der Vektor $\mathfrak{y}_\mu^{(\mu+1)}-\bar{\mathfrak{y}}_\mu^{(\mu+1)}$ und folglich $\mathfrak{x}^{(\mu+1)}-\bar{\mathfrak{x}}^{(\mu+1)}$ zu diesem Raum. Dies wäre aber eine von $\mathfrak{x}'$ verschiedene, mit der Fläche gemeinsame Richtung. Es folgt also, dass sich alle solchen Kurven in νter Ordnung berühren, dieselben $\nu-1$ ersten Normalen und dieselben Krümmungen $k_1,\ldots,k_{\nu-1}$ besitzen.

Unter diesen Kurven lässt sich für $\nu<n-m+1$ eine finden, deren νte Normale zur Fläche normal ist. Man betrachte das $(n-m-\nu+1)$-dimensionale Raumelement, das in P in bezug auf die Richtung $\mathfrak{x}'$ zur gegebenen m-dimensionalen Fläche und zugleich zum gegebenen ν-dimensionalen Schmiegungsraum normal ist, und verbinde es mit diesem Schmiegungsraum durch ein $(n-m+1)$-dimensionales Raumelement. Die Extremalen, welche dieses in P berühren, bilden einen $(n-m+1)$-dimensionalen Raum, welcher die gegebene Fläche nach einer Kurve $\mathfrak{x}$ schneidet.

Diese Kurve hat die verlangten Eigenschaften. Ist nämlich $\bar{\mathfrak{x}}$ eine der gegebenen Kurven, so gehören die Schmiegungsräume von $\mathfrak{x}$ und $\bar{\mathfrak{x}}$ bis zum ν-dimensionalen dem $(n-m+1)$-dimensionalen Raumelement an, das nach Konstruktion mit der gegebenen Fläche nur die Richtung $\mathfrak{x}'$ gemeinsam hat. Man kann daher für die Kurven $\mathfrak{x}$ und $\bar{\mathfrak{x}}$ in gleicher Weise wie oben zeigen, dass sie sich in νter Ordnung berühren, so dass also die Kurve $\mathfrak{x}$ selbst zu der gegebenen Schar gehört. Die νte Normale von $\mathfrak{x}$ gehört aber für $n-m+1\geqq\nu+1$ dem genannten $(n-m-\nu+1)$-dimensionalen zur Fläche normalen Raumelement an und ist daher selbst zur Fläche normal.

Die unter 4. für die Torsionen und die Binormalen gefundenen Beziehungen lassen sich jetzt ganz entsprechend auf die νten Krümmungen und die νten Normalen übertragen; an Stelle von $\mathfrak{y}_2'''$ tritt $\mathfrak{y}_\nu^{(\nu+1)}$ usf. Es ergibt sich also bei allgemeiner Massbestimmung die folgende Verallgemeinerung des Satzes von MEUSNIER:

Satz II. Alle Kurven einer m-dimensionalen Fläche im n-dimensionalen Raum, die in einem Punkt P bei nichtverschwindenden $\nu-1$ ersten Krümmungen einen gemeinsamen ν-dimensionalen Schmiegungsraum besitzen, welcher mit der Fläche in P nur eine (positive) Richtung gemeinsam hat (so dass also $\nu \leqq n-m+1$ ist), berühren sich in wenigstens νter Ordnung und haben dieselben $\nu-1$ ersten Normalen und dieselben Krümmungen $k_1, \ldots, k_{\nu-1}$. Diejenigen unter den Kurven, deren νte Normalen zur Fläche normal sind (es gibt solche für $\nu < n-m+1$), haben auch dieselbe νte Normale und dieselbe νte Krümmung k_ν; wenn aber die νte Normale mit der eben genannten den Winkel ψ einschliesst, so besitzt die Kurve eine νte Krümmung $\bar{k}_\nu$ mit

$$k_\nu = \bar{k}_\nu \cos \psi .$$