Über konvexe Körper mit Mittelpunkt.

Von
JOH. JAK. BURCKHARDT (Zürich).

(Als Manuskript eingegangen am 23. Februar 1940.)

Von A. D. ALEXANDROFF [1]) wurde bewiesen, dass jeder konvexe Körper, der von lauter ebenen zentrierten Vielecken begrenzt ist, einen Mittelpunkt hat. Hierzu wird verwendet, dass jedes ebene konvexe Vieleck, das lückenlos und einfach von lauter zentrierten Vielecken überdeckt ist, einen Mittelpunkt hat. Dieser Satz wurde von MINKOWSKI [2]) nicht nur für die Ebene, sondern für den n-dimensionalen Raum mittels tiefliegender analytischer Hilfsmittel bewiesen. Im folgenden wird zuerst ein elementarer Beweis des Satzes von ALEXANDROFF gegeben, sodann beweisen wir den Satz von MINKOWSKI mit dem Prinzip der eindeutigen Zusammensetzung eines Puzzles. Alle vorkommenden konvexen Vielecke und konvexen Körper liegen ganz im Endlichen.

I. Der Satz von ALEXANDROFF.

Hilfssatz 1: Ein konvexer Körper $\mathfrak{K}$, der von lauter zentrierten ebenen Vielecken begrenzt ist, ist von Paaren kongruenter und parallel liegender Vielecke begrenzt.

Wegen der Konvexität von $\mathfrak{K}$ gibt es zu jedem, notwendig konvexen, begrenzenden Vieleck höchstens ein paralleles begrenzendes Vieleck.

Sei k_1 eine Seite des begrenzenden Vielecks P_1. Das an P_1 längs k_1 anstossende begrenzende Vieleck P_2 besitzt wegen seines Zentrums die zu k_1 parallele und gleich lange Seite k_2. So fortfahrend gelangen wir nach k_1 zurück, denn die Projektion von $\mathfrak{K}$

[1]) A. D. ALEXANDROFF, Ein Theorem über konvexe Vielflächner. Schriften des phys.-math. Institutes von W. A. Steckloff, Math. Abt., Bd. 4, 1932, S. 87. (Russisch.)

[2]) H. MINKOWSKI, Allgemeine Lehrsätze über die konvexen Polyeder, Ges. Abhandlungen, Bd. 2, S. 103 ff.

in Richtung k_1 auf eine nicht zu k_1 parallele Ebene ist ein geschlossenes konvexes Polygon, dessen Ecken die Projektionen der Seiten k_1, k_2, ... sind. Wir können daher sagen, dass durch die Seite k_1 der geschlossene Gürtel $\mathfrak{G}_k$ von begrenzenden Vielecken bestimmt ist.

Nehmen wir eine andere Seite l_1 von P_1, so bestimmt sie den geschlossenen Gürtel $\mathfrak{G}_l$. $\mathfrak{G}_k$ und $\mathfrak{G}_l$ haben ein Vieleck $\overline{P}_1$ gemeinsam, das ein zu k_1 und ein zu l_1 paralleles Seitenpaar von der Länge k_1 bzw. l_1 hat. Daher gibt es zu jedem begrenzenden Vieleck P genau ein paralleles $\overline{P}$. Verbinden wir die Mittelpunkte von P und $\overline{P}$ und blicken $\mathfrak{K}$ in dieser Richtung an, so können wir den von P ausgehenden Gürteln eine Aufeinanderfolge, etwa diejenige im Uhrzeigersinn, erteilen. Von P ausgehend überkreuzen sich wegen der Konvexität von $\mathfrak{K}$ diese Gürtel nur einmal, nämlich in $\overline{P}$, ihre Aufeinanderfolge ist daher in $\overline{P}$ dieselbe wie in P. Somit folgen die Seiten von $\overline{P}$ aufeinander wie die entsprechenden von P, P und $\overline{P}$ sind daher kongruent.

S a t z 1: Ein konvexer Körper $\mathfrak{K}$, der von lauter zentrierten ebenen Vielecken begrenzt ist, besitzt einen Mittelpunkt.

Nach Hilfssatz 1 gibt es zu jedem begrenzenden Vieleck P ein kongruentes und parallel liegendes $\overline{P}$. P und $\overline{P}$ haben das Symmetriezentrum O. Längs k bzw. $\overline{k}$ mögen die Vielecke Q bzw. $\overline{Q}$ mit dem Symmetriezentrum O' stossen. (Dass $\overline{Q}$ an $\overline{P}$ längs $\overline{k}$ stösst, beweist man wie in Hilfssatz 2, indem man $\mathfrak{K}$ in Richtung k auf eine Ebene projiziert.) k und $\overline{k}$ liegen sowohl in bezug auf O als auch in bezug auf O' symmetrisch, folglich fallen O und O' zusammen. In dieser Weise fortfahrend erkennt man, dass O Mittelpunkt von $\mathfrak{K}$ ist.

II. Der Satz von MINKOWSKI.

H i l f s s a t z 2: Ein von Paaren gleich langer und paralleler Strecken begrenztes ebenes konvexes Vieleck hat einen Mittelpunkt.

Wir können diesen Hilfssatz als das Analogon von Satz 1 für die Ebene auffassen. Um ihn unabhängig zu beweisen, sei die Seite a bzw. b parallel und gleich lang wie $\overline{a}$ bzw. $\overline{b}$, und schliesse die Seite b etwa im Uhrzeigersinn an die Seite a an. Wir zeigen zuerst, dass dann auch $\overline{b}$ an $\overline{a}$ im Uhrzeigersinn angeheftet ist. Würde $\overline{b}$ vor $\overline{a}$ kommen, so würde eine Tangente, die das Vieleck im Uhrzeigersinn umläuft, ihre Richtung entweder nicht monoton ändern oder sich bei einem ganzen Umlauf um mehr als 2π ändern, das Vieleck wäre daher nicht konvex. Folge daher $\overline{b}$ im Uhrzeigersinn auf $\overline{a}$ und liege $\overline{c}$ dazwischen. Die zu $\overline{c}$ parallele Seite c

muss nach dem eben bewiesenen auf a folgen und b muss auf c folgen. Ein solches c gibt es nach Voraussetzung nicht, somit ist $\bar{b}$ an $\bar{a}$ angeheftet. Besteht daher ein konvexes Vieleck aus Paaren paralleler und gleich langer Seiten, so schliessen sie paarweise aneinander.

Ist O das Symmetriezentrum von a und $\bar{a}$, O' dasjenige von b und $\bar{b}$, so fallen O und O' zusammen, weil sie je das Zentrum entsprechender Ecken sind. So weiterfahrend folgt, dass O der Mittelpunkt des Vielecks ist.

Satz 2: Jedes aus lauter zentrierten Vielecken P einfach und lückenlos zusammengesetzte Vieleck $\mathfrak{P}$ besitzt einen Mittelpunkt.

Wir werden zeigen, dass es zu jeder Seite s von $\mathfrak{P}$ eine parallele und gleich lange Seite $\bar{s}$ von $\mathfrak{P}$ gibt. An die Seite s stossen ein oder mehrere zentrierte Vielecke. Sind es mehrere, so zerteilen wir s in die Stücke $t_1, \ldots, t_n$, deren jedes eine auf s liegende Seite eines Vielecks P ist, und zu dem daher je ein Mittelpunkt gehört. Jede Strecke t_r spiegeln wir am zugehörigen Mittelpunkt. Aus der Strecke t_r, die Seite des Vielecks $P^{(1)}$ sei, werde dadurch die Seite $t_r^{(1)}$. Liegt $t_r^{(1)}$ nicht bereits auf dem Rand $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{P}$, dann ist $t_r^{(1)}$ einerseits Seite von $P^{(1)}$, andererseits nimmt es teil an der Begrenzung gewisser Vielecke $P_1^{(2)}, \ldots, P_{(\nu)}^{(2)}$. Die auf $P_\varepsilon^{(2)}$ liegende Strecke spiegeln wir am Mittelpunkt von $P_\varepsilon^{(2)}$. Dies führen wir aus für alle ε und für alle nach der ersten Spiegelung erhaltenen Strecken, die nicht bereits auf $\mathfrak{R}$ liegen. So fahren wir mit Zerlegen und Spiegeln fort, bis alle erhaltenen Strecken auf dem Rand $\mathfrak{R}$ liegen. Dabei ist es nicht möglich, dass wir auf die Seite s zurückkommen, denn bei jeder Spiegelung einer Strecke gelangt man auf die andere Seite der durch den Mittelpunkt hindurchgehenden parallelen Geraden.

Da bei jeder Spiegelung eine Strecke in eine parallele und gleich lange übergeht, erhalten wir, von s ausgehend, auf $\mathfrak{R}$ gewisse Strecken $\bar{s}_1, \ldots, \bar{s}_m$, die parallel zu s sind und deren Längensumme gleich der Länge von s ist. Wir behaupten:

a) die Strecken $\bar{s}_1, \ldots, \bar{s}_m$ liegen alle auf derselben Geraden,

b) sie überdecken eine Strecke $\bar{s}$ von der Länge s lückenlos,

c) sie überdecken die Strecke $\bar{s}$ einfach.

a) und b) folgen unmittelbar aus der Konvexität von $\mathfrak{P}$, c) folgt aus der Tatsache, dass die Vielecke P sich nicht überdecken.

$\bar{s}$ ist eine Seite von $\mathfrak{P}$. Denn sei $\bar{s}$ nur Teilstück einer Seite $\bar{a}$. Wir wenden auf $\bar{a}$ unser obiges Spiegelungsverfahren an und erhalten eine parallele und gleich lange Seite a auf dem Rand $\mathfrak{R}$.

a fällt auf s, ist aber länger als s, somit wäre s keine Seite von $\mathfrak{P}$ entgegen der Voraussetzung. Nach Hilfssatz 2 besitzt daher $\mathfrak{P}$ einen Mittelpunkt.

Satz 3: Ein konvexer Körper $\mathfrak{K}$, der aus lauter zentrierten Körpern K einfach und lückenlos zusammengesetzt ist, besitzt einen Mittelpunkt.

Der Beweis verläuft ähnlich wie derjenige von Satz 2, er beruht auf einer genauen Untersuchung der beim Spiegelungsverfahren auftretenden Vielecke. Die Körper K nennen wir auch Bausteine von $\mathfrak{K}$.

a) Zu jedem Begrenzungsvieleck F von $\mathfrak{K}$ gibt es ein paralleles von gleichem Flächeninhalt. F ist lückenlos und einfach von gewissen Vielecken f überdeckt, die Begrenzungsvielecke von Bausteinen sind. Jedes derselben spiegeln wir am Mittelpunkt des zugehörigen Körpers, wodurch es in ein paralleles und flächengleiches übergeht. Mit jedem dieser verfahren wir wie mit F und fahren so fort, bis alle erhaltenen Flächenstücke auf der Oberfläche von $\mathfrak{K}$ liegen. Sie fallen nicht in F, liegen wegen der Konvexität von $\mathfrak{K}$ in derselben Ebene und erfüllen ein Vieleck $\bar{F}$ lückenlos und einfach. $\bar{F}$ ist ein Begrenzungsvieleck von $\mathfrak{K}$, denn wäre es nur ein Teil eines Begrenzungsvielecks $\bar{G}$, so üben wir auf $\bar{G}$ den Spiegelungsprozess aus und erhalten ein in der Ebene von F liegendes, aber grösseres Begrenzungsvieleck G, was gegen die Voraussetzung ist.

b) $\mathfrak{K}$ ist somit begrenzt von Paaren paralleler Ebenen. Seien E_1 und $\bar{E}_1$, E_2 und $\bar{E}_2$ zwei solche Paare. Liege ferner auf der Schnittgeraden e von E_1 und E_2 die Kante k von $\mathfrak{K}$. Lassen wir nun eine Stützebene von $\mathfrak{K}$, die stets parallel zu e ist, aus der Anfangslage E_1 um $\mathfrak{K}$ herumdrehen. Ihr Drehsinn auf $\mathfrak{K}$ sei derjenige von E_1 um e nach E_2. Würde die Ebene $\bar{E}_2$ vor $\bar{E}_1$ kommen, so würde sich die Richtung dieser Stützebene entweder nicht monoton ändern oder bis zu ihrer Drehung nach E_1 um mehr als 2π ändern, was wegen der Konvexität von $\mathfrak{K}$ unmöglich ist. Würde $\bar{E}_2$ nicht unmittelbar auf $\bar{E}_1$ folgen, so läge eine Ebene $\bar{E}$ dazwischen. Die zu $\bar{E}$ parallele Ebene E müsste nach dem eben bewiesenen nach E_1 und vor E_2 kommen entgegen der Annahme. Somit gibt es zu jeder Kante k von $\mathfrak{K}$ eine parallele $\bar{k}$, und ihre Aufeinanderfolge ist dieselbe wie die der Ebenen.

c) Wir verschärfen die unter a) durchgeführte Ueberlegung und zeigen, dass es zu jedem Begrenzungsvieleck F ein kongruentes $\bar{F}$ gibt, das nicht nur in einer parallelen Ebene liegt, sondern dessen Seiten überdies parallel den entsprechenden Seiten von F sind. Sei f ein in F liegendes Begrenzungsvieleck des Bausteines K. Wir spiegeln f am Mittelpunkt von K und erhalten die zu f kongruente und spiegelbildlich gelegene Begrenzungsfläche $\bar{f}$ von K. $\bar{f}$ liegt, falls es nicht bereits auf der Oberfläche von $\mathfrak{K}$ liegt, auf Begrenzungsflächen gewisser weiterer Bausteine, deren Seiten auf $\bar{f}$ eine Polygoneinteilung hervorrufen. g sei eines der Polygone. Bevor wir, wie unter a), auf g und alle entsprechenden Polygone dasselbe Verfahren durchführen wie für f, spiegeln wir die Polygoneinteilung von $\bar{f}$ am Mittelpunkt von K auf f zurück. Dieses erweiterte Spiegelungsverfahren setzen wir fort, bis alle erhaltenen Polygone auf der Oberfläche von $\mathfrak{K}$ liegen, wobei wir jeweils die erhaltene Polygoneinteilung bis auf F zurückspiegeln. Wie in a) gezeigt, liegen alle erhaltenen Vielecke in derselben Ebene und bilden das Vieleck $\bar{F}$. Wir können überdies feststellen: F und $\bar{F}$ sind aus lauter Vielecken v bzw. $\bar{v}$ zusammengesetzt, wobei es zu jedem v ein kongruentes $\bar{v}$ in $\bar{F}$ gibt, dessen Seiten den entsprechenden Seiten von v parallel sind, und umgekehrt.

Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Nehmen wir an, man könne die Vielecke v nur auf eine Weise zu einem konvexen Vieleck F zusammensetzen, wie dies bei einem Puzzle der Fall ist. Dann kann man auch die Vielecke $\bar{v}$ nur auf eine Art zu einem konvexen Vieleck $\bar{F}$ zusammensetzen.

2. Falls man aus den Vielecken v verschiedene konvexe Vielecke zusammensetzen kann, so betrachten wir an Stelle von $\mathfrak{K}$, der aus den Bausteinen K zusammengesetzt ist, einen zu $\mathfrak{K}$ kongruenten Körper $\mathfrak{K}'$, der aus anderen zentrierten Bausteinen besteht. $\mathfrak{K}'$ geht aus $\mathfrak{K}$ durch eine „Verkeilung" hervor, die derart vorgenommen wird, dass für die Begrenzungsvielecke von $\mathfrak{K}'$ die Zusammensetzung aus den Vielecken v' eindeutig wird. Die Verkeilung wird folgendermassen vorgenommen:

Sei F ein Begrenzungsvieleck von $\mathfrak{K}$, in dessen Innern die Vielecke f_1 und f_2 längs s zusammenstossen, f_1 gehöre zum Baustein K_1, f_2 zu K_2. g sei die durch s gehende Ebene, die K_1 und K_2 trennt. Sei P ein Parallelepiped mit den Paaren von Seitenflächen p, $\bar{p}$; q_1, q_3; q_2, q_4. Wir schneiden aus K_1 und K_2 je parallelepipedische Ausschnitte P_1 und P_2 heraus so, dass wir P einsetzen können. Dabei falle p in die Fläche F und das Flächenpaar q_1, q_3 sei parallel zu g. Damit $\mathfrak{K}'$ aus zentrierten Körpern aufgebaut ist, müssen wir aus K_1 das zu P_1 symmetrische Parallelepiped $\bar{P}_1$ ausschneiden, ebenso aus K_2 das zu P_2 symmetrische $\overline{P}_2$. P muss ausserdem so lang sein, dass es mit allen vier Flächen q_1, q_3; q_2, q_4 ganz in einen dritten Baustein K_3 hineinreicht. Indem wir p klein genug wählen, können wir erreichen, dass P ausser in K_1 und K_2 nur noch in K_3 hineinreicht. Zu dem hierdurch in K_3 herausgeschnittenen Stück muss das symmetrische herausgeschnitten werden, damit der angeschnittene Körper zentriert bleibt. Diesen Prozess setzen wir an allen beteiligten Körpern fort, wobei wir annehmen dürfen, p sei von Anfang an so klein gewählt, dass stets nur ein einziger Baustein angeschnitten wird. Endlich gelangen wir mit dieser Verkeilung zu einem Baustein K_n, der an $\overline{F}$ stösst. In diesen ist zuletzt ein Parallelepiped auszuschneiden, das mit einer zu p kongruenten und parallel gerichteten Fläche in $\overline{F}$ liegt. In alle parallelepipedischen Ausschnitte setzen wir endlich Parallelepipede ein, $\mathfrak{K}'$ besteht somit aus lauter zentrierten Bausteinen. Ferner haben wir erreicht, dass auf p und dem entsprechenden Parallelogramm in $\overline{F}$ durch den Spiegelungsprozess c) keine weitere Unterteilung zu liegen kommt. Wir verkeilen unseren konvexen Körper $\mathfrak{K}$ solange, bis sich die Puzzle in den Begrenzungsvielecken nur auf eine Weise zu konvexen Vielecken zusammensetzen lassen, was möglich ist, da der Winkel des Parallelogramms p beliebig gewählt werden darf und auch seine Lage auf der betreffenden Seite s einen Freiheitsgrad enthält. Wir müssen noch darauf achten, dass sich keine Verkeilungen durchdringen, was wiederum möglich ist.

d) Da entsprechende Seiten der Puzzle v und $\overline{v}$ parallel sind, liegen entsprechende Seiten von F und $\overline{F}$ parallel. F und $\overline{F}$ müssen daher entweder durch Spiegelung an einem Punkt oder durch Parallelverschiebung auseinander hervorgehen. Letzteres ist nicht möglich, denn in b) ist gezeigt, dass sich die Kanten folgen wie die Ebenen. Liege daher F_1 spiegelbildlich in bezug auf den Punkt O_1 zu $\overline{F}_1$. Die längs der entsprechenden Kanten k und $\overline{k}$ anstossenden Vielecke F_2 und $\overline{F}_2$ liegen spiegelbildlich bezüglich O_2. k und $\overline{k}$ liegen daher sowohl bezüglich O_1 als auch O_2 spiegelbildlich zueinander, und daher fallen O_1 und O_2 zusammen. So weiterfahrend, erkennt man, dass O_1 der Mittelpunkt des betrachteten konvexen Körpers ist.