Schlitzabbildungen durch rationale Funktionen.

Von LUDWIG BIEBERBACH (Berlin).

(Als Manuskript eingegangen am 20. Februar 1940.)

1. Satz: Die einzigen rationalen Funktionen $w=f(z)$, welche $|z|<1$ auf einen Schlitzbereich schlicht abbilden, gehen aus

$$\mathfrak{w}=\frac{\mathfrak{z}}{(1-\mathfrak{z})^2}$$

hervor, indem man $\mathfrak{z}$ durch eine lineare Funktion von z ersetzt, die $|z|<1$ auf $|\mathfrak{z}|<1$ abbildet, und indem man w als lineare Funktion von $\mathfrak{w}$ nimmt.

2. Beweis. Es genügt zu zeigen: Die einzige unter den Funktionen

$$(1) \qquad w=z^2+\frac{a_3 z^3+\cdots+a_n z^n}{1+b_1 z+\cdots+b_m z^m},\ m \geqq n-1,$$

welche $Jz>0$ auf einen Schlitzbereich abbildet, ist $w=z^2$.

Die Funktionen (1) haben bei $z=0$ eine Nullstelle und bei $z=\infty$ einen Pol zweiter Ordnung. Diese beiden Punkte 0 und ∞ liefern somit die Schlitzenden bei 0 und ∞. Da (1) die Halbebene $Jz>0$ schlicht abbilden soll, haben die (1) in $Jz>0$ weder Nullstellen noch Pole. Die (1) nehmen weiter auf $Jz=0$ jeden auf der Schlitzgrenze gelegenen Wert w genau zweimal an, und zwar jeden von 0 und ∞ verschiedenen dieser Werte je genau einmal auf $z>0$ und auf $z<0$. (Die übrigen z, für die w auf Punkte der Schlitzgrenze fällt, liegen in $Jz<0$.)

Wir definieren eine Funktion $x=\varphi(\xi)$ für reelle ξ dadurch, dass wir die beiden reellen Werte x und ξ, in denen (1) den gleichen der Schlitzgrenze angehörigen Wert annimmt, einander zuordnen. Genauer: Wir definieren $x = \varphi(\xi)$ als Lösung der Gleichung

$$(2) \qquad x^2 + \frac{a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n}{1 + b_1 x + \cdots + b_m x^m} = \xi^2 + \frac{a_3 \xi^3 + \cdots + a_n \xi^n}{1 + b_1 \xi + \cdots + b_m \xi^m}.$$

Daher ist $\varphi(\xi)$ eine algebraische Funktion. Es ist $\varphi(0) = 0$ und $\lim\limits_{\xi \to \infty} \varphi(\xi) = \infty$. (2) besitzt zwei Lösungen, die diesen Bedingungen genügen. Die eine ist $x = \xi$. Die andere hat bei $\xi = 0$ eine Entwicklung

$$(3) \qquad x = -\xi + c_2 \xi^2 + \cdots$$

Diese ist die weiterhin zu betrachtende. Wir setzen (3) analytisch fort. Dabei erweist sich $\varphi(\xi)$ als eindeutig. Denn hat ξ irgendeine bei 0 beginnende und bei 0 endigende Kurve durchlaufen, so kehrt $\varphi(0)$ zum Werte 0 zurück, mit dem der Umlauf begonnen wurde. Denn anderenfalls müsste $\varphi(0)$ nach dem Umlauf eine der von 0 verschiedenen Nullstellen von

$$(4) \qquad 0 = x^2 + \frac{a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n}{1 + b_1 x + \cdots + b_m x^m}$$

sein. Lässt man dann aber ξ einen geschlossenen zum vorigen konjugiert imaginären Weg durchlaufen, so müsste nach dem Spiegelungsprinzip — denn $\varphi(\xi)$ ist für reelle ξ reell — der zum vorher erhaltenen konjugiert imaginäre Wert herauskommen. Auch dieser müsste der Gleichung (4) genügen. Da aber (4), wie eingangs bemerkt wurde, in $Jx > 0$ keine Nullstellen besitzt und da weiter die einzige reelle Lösung von (4) die $x = 0$ ist, so kehrt $\varphi(\xi)$ bei allen analytischen Fortsetzungen von 0 zu 0 wieder zum Nullwert zurück, ist also eindeutig, wie behauptet wurde. Als algebraische Funktion ist daher $\varphi(\xi)$ rational. Da das Gleiche auch für die Umkehrungsfunktion von $\varphi(\xi)$ gilt, ist $\varphi(\xi)$ linear. Wegen $\varphi(0) = 0$ und $\lim\limits_{x \to \infty} \varphi(\xi) = \infty$ ist $\varphi(\xi)$ ganz linear und wegen (3) ist $\varphi(\xi) \equiv -\xi$.

Die Gleichung (2) wird daher für reelle x und ξ durch $x = -\xi$ befriedigt. Daher wird (2) auch für komplexe ξ durch $x = -\xi$ befriedigt. Da nun aber die Gleichung (4) in $Jx \geq 0$ ausser bei $x = 0$ keine Nullstelle hat, kann sie auch in $Jx < 0$ keine Nullstelle haben. Denn aus einer Nullstelle von (4) mit $Jx < 0$ wird durch $x = -\xi$ eine Nullstelle von (4) mit $Jx > 0$. Daher ist (1) mit $w = z^2$ identisch. Denn anderenfalls hat (4) seinem Grad entsprechend stets

Nullstellen mit $x \neq 0$. Nach (1) ist nämlich der Grad von (4) $m+2$, so dass für $m>0$ stets Nullstellen $x \neq 0$ bei (4) auftreten.

3. Verallgemeinerung. Das in dieser Note dargelegte ist zweifellos Spezialfall eines allgemeineren Satzes, der sich auf Schlitzabbildungen durch andere in ihrem Gesamtverlauf eindeutige z. B. meromorphe Funktionen bezieht.

Als Beispiel sei noch kurz bewiesen: Die einzigen bis auf Pole und gewisse in $|z|>1$ gelegene wesentlich singuläre Stellen regulären eindeutigen Funktionen $w=f(z)$, welche $|z|<1$ auf einen Schlitzbereich schlicht abbilden, sind die in 1. bezeichneten. (Das eben gebrauchte Wort „gewisse" wird unten erläutert werden.) Es genügt wieder zu zeigen: Die einzige unter den Funktionen

$$w=f(z)=z^2+a_3 z^3+\cdots, \tag{5}$$

welche bei $z=\infty$ einen Pol zweiter Ordnung haben und im übrigen bis auf gewisse — unter näher zu beschreibende wesentlich singuläre Stellen — regulär und eindeutig sind und die $Jz>0$ schlicht auf einen Schlitzbereich abbildet, ist $w=z^2$.

Die beiden Punkte $z=0$ und $z=\infty$ liefern wieder die Schlitzenden bei 0 und ∞. Da die Halbebene $Jz>0$ durch (5) schlicht abgebildet wird, haben die (5) in $Jz>0$ weder Nullstellen noch Pole. Genau wie in 2. definieren wir eine analytische Funktion $x=\varphi(\xi)$ durch die Gleichung

$$f(x)=f(\xi) \tag{6}$$

mit der Entwicklung (3) bei $\xi=0$. Genau wie in 2. ergibt sich, dass $\varphi(\xi)$ eindeutig ist. In 2. ergab sich die eindeutige algebraische Funktion $\varphi(\xi)$ als rational. So einfach kann man jetzt natürlich nicht schliessen. Wir betrachten die analytische Fortsetzung von $\varphi(\xi)$ ausgehend von dem Funktionselement (3) näher. Wir nehmen einen zu einem Punkt ξ_0 hinzielenden Weg L, auf dem sich $\varphi(\xi)$ ausser in ξ_0 selbst schon als analytisch regulär erwiesen hat. Wir werden zunächst zeigen, dass $\varphi(\xi)$ auch in ξ_0 analytisch ist, wofern nicht ξ_0 ein wesentlich singulärer Punkt von $f(z)$ oder das konjugiert imaginäre eines solchen ist. Ich zeige zuerst, dass

$$\lim_{\substack{\xi \to \xi_0 \\ \xi \subset L}} \varphi(\xi)=x_0 \tag{7}$$

existiert. Anderenfalls kann man auf L zwei Punktfolgen $\xi'_k \to \xi_0$, $\xi''_k \to \xi_0$ so auswählen, dass

$$(8) \qquad \lim_{k\to\infty} \varphi(\xi'_k) = x'_0, \; \lim_{k\to\infty} \varphi(\xi''_k) = x''_0, \; x'_0 \neq x''_0, \; Jx'_0 \cdot Jx''_0 \geqq 0.$$

Wir setzen noch

$$x'_k = \varphi(\xi'_k).$$

Um die eben ausgesprochene Behauptung (8) zu beweisen, bemerke ich zunächst, dass aus der Nichtexistenz des Grenzwertes (7) sofort die Existenz zweier Punktfolgen sich ergibt, für die die Behauptung bis auf $Jx'_0 \cdot Jx''_0 \geqq 0$ richtig ist. Wenn für diese beiden Punktfolgen aber $Jx'_0 \cdot Jx''_0 < 0$ ist, so muss das durch $x = \varphi(\xi)$ erhaltene Bild des Teilbogens (ξ'_k, ξ''_k) von L für genügend grosse k die reelle x-Achse treffen. Daher gibt es auf L zwischen ξ'_k und ξ''_k einen Punkt ξ'''_k, für den $\varphi(\xi'''_k)$ reell ausfällt. Aus diesen Punkten wählen wir eine Teilfolge aus, für die $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi(\xi'''_k)$ existiert und verwenden diese Punktfolge ξ'''_k statt ξ''_k neben der Folge ξ'_k. Für diese beiden Folgen gilt dann die Behauptung (8). Ist nun $Jx'_0 \geqq 0$ und $Jx''_k \geqq 0$ und gilt nur in höchstens einer dieser Abschätzungen das Gleichheitszeichen, so ist auch $f(x'_0) \neq f(x''_0)$, da $f(z)$ die Halbebene $Jz > 0$ schlicht abbildet. Ergibt sich aber, dass $Jx'_0 = 0$ und $Jx''_0 = 0$, so stelle man folgende Überlegung an: Man nehme irgend eine x'_0 und x''_0 trennende Gerade g. Die Bilder der Bögen (ξ'_k, ξ''_k) von L treffen dann für genügend grosse k alle die Gerade g in Punkten $\varphi(\xi'''_k) = x'''_k$. Aus diesen wähle man eine konvergente Folge aus $x'''_k \to x'''_0$, und nehme wahlweise ξ'''_k statt ξ''_k. Ist $Jx'''_0 > 0$, so gilt $f(x'''_0) \neq f(x'_0)$. Ist auch $Jx'''_0 = 0$, so beachte man, dass $f(z)$ nicht in den drei verschiedenen Punkten x'_0, x''_0, x'''_0 der reellen Achse den gleichen Wert annehmen kann, so dass für mindestens zwei der drei Punktfolgen $\xi^{(i)}_k$ auf L gilt, dass $f(z)$ in den Grenzpunkten der $x^{(i)}_k$ verschiedene Werte annimmt. Erweist sich schliesslich $Jx'''_0 < 0$, so haben wir einen gleich noch zu erledigenden Fall vor uns. Vorab sei noch bemerkt: Aus

$$f(x'_k) = f(\xi'_k)$$
$$f(x''_k) = f(\xi''_k)$$
$$f(x'_0) \neq f(x''_0)$$

folgt

$$\lim_{k\to\infty} f(\xi'_k) \neq \lim_{x\to\infty} f(\xi''_k)$$

Daher ist ξ_0 eine wesentlich singuläre Stelle von $f(z)$. Es bleibt nun noch der Fall zu erörtern, dass $Jx'_0 \leqq 0, Jx''_0 \leqq 0$. (Darauf führt auch der vor wenigen Zeilen zurückgestellte Fall.) Dann betrachte man

$$\bar{\xi}_k', \ \bar{\xi}_k'', \ \bar{x}_k' = \varphi(\bar{\xi}_k'), \ \bar{x}_k'' = \varphi(\bar{\xi}_k'').$$

Der gleiche Schluss führt dazu, dass $\bar{\xi}_0$ eine wesentlich singuläre Stelle von $f(z)$ ist. (Bis auf das Analogen zu dem gerade eben zurückgestellten Fall, der aber nun wieder auf ξ_0 als wesentlich singuläre Stelle führt.) Wir haben damit bewiesen: Wenn der Weg L in einem Punkt ξ_0 mündet, der weder eine wesentlich singuläre Stelle von $f(z)$ noch Spiegelbild einer solchen ist, und wenn $\varphi(\xi)$ auf L überall (ausser in ξ_0) analytisch ist, so existiert

$$\lim_{\substack{\xi \to \xi_0 \\ \xi \subset L}} \varphi(\xi) = x_0$$

Ich setze $x_0 = \varphi(\xi_0)$. Ich zeige weiter, dass $\varphi(\xi)$ in ξ_0 analytisch ist. Ist zunächst auch x_0 keine wesentlich singuläre Stelle von $f(z)$, so ergibt sich $x = \varphi(\xi)$ durch Auflösung von (6) mit der Anfangsbedingung $x_0 = \varphi(\xi_0)$, als analytische Funktion algebraischen Charakters in ξ_0. Da aber $\varphi(\xi)$ als eindeutig schon bekannt ist, ist $\varphi(\xi)$ in ξ_0 von rationalem Charakter. Ist aber x_0 eine wesentlich singuläre Stelle von $f(z)$, also $Jx_0 < 0$, so betrachte man $\bar{\xi}_0$ und $\bar{x}_0 = \varphi(\bar{\xi}_0)$. Da $J\bar{x}_0 > 0$, so ist $\bar{x}_0$ keine wesentlich singuläre Stelle von $f(z)$. Daher ist nach dem eben durchgeführten Schluss $\varphi(\xi)$ in $\bar{\xi}_0$ von rationalem Charakter. Nach dem Spiegelungsprinzip ist daher $\varphi(\xi)$ auch in ξ_0 von rationalem Charakter. Als singuläre Stellen der eindeutigen Funktion $\varphi(\xi)$ kommen somit ausser Polen nur die wesentlich singulären Stellen von $f(z)$ und deren Spiegelbilder in Betracht. Die gleiche Aussage gilt auch für die Umkehrungsfunktion von $\varphi(\xi)$. Daher ist $\varphi(\xi)$ nicht nur eine eindeutige, sondern auch eine einwertige Funktion. Daher kann sie weder mehrere Pole noch isolierte wesentlich singuläre Stellen besitzen. So ergibt sich wie in 3., dass $x = \varphi(\xi)$ mit $x = -\xi$ identisch ist, immer dann, wenn die wesentlich singulären Stellen von $f(z)$ z. B. nur in endlicher Anzahl auftreten, oder wenn die Menge der wesentlich singulären Stellen von $f(z)$ keine in sich dichte Teilmenge enthält. Aber auch dann gilt der lineare Charakter von $\varphi(\xi)$, wenn man die wesentlich singulären Stellen (also die Nichtpole) von $f(z)$ in geschlossene Kurven beliebig kleiner Gesamtlänge einschliessen kann. Denn für diesen Fall lässt sich die bei der Behandlung der sogenannten hebbaren Singularitäten übliche Schlussweise übertragen. Damit hat das zu Beginn von 3. gebrauchte Wort „gewisse“ seine Erläuterung gefunden.

Der Beweis der eingangs von 3. ausgesprochenen Behauptung ist nun rasch beendigt. Aus dem über $\varphi(\xi)$ bewiesenen ergibt sich nämlich wie in 3., dass

$$f(z) = f(-z)$$

für alle z. Daher bildet $f(z)$ auch die Halbebene $Jz < 0$ schlicht ab. $f(z)$ bildet daher die volle z-Ebene auf eine zweiblättrige Riemann'sche Fläche ab und ist daher eine zweiwertige Funktion. Daher ist sie rational und wegen ihrer übrigen Eigenschaften mit z^2 identisch.