Die Green'sche Funktion der Differentialgleichung der Wärmeleitung auf der Kugelfläche.

Von

ALFRED KIENAST (Küsnacht, Zürich).

(Als Manuskript eingegangen am 1. Februar 1940.)

Die Differentialgleichung der Wärmeleitung transformiert in die Koordinaten φ, ψ auf der Einheitskugel lautet

$$(1) \qquad \Delta u = \sin^{-1}\psi \left\{ \frac{\partial}{\partial\varphi} (u_\varphi \sin^{-1}\psi) + \frac{\partial}{\partial\psi} (u_\psi \sin\psi) \right\} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

wo $u(P, t)$ die Temperatur ist zur Zeit t im Punkte $P(\varphi, \psi)$, (vgl. COURANT und HILBERT [2] [1]) Kap. V § 9,4; KNESER [7] § 42). Wenn die ganze Kugelfläche als Gebiet genommen wird, in dem die Wärmeausbreitung stattfindet, dann hat man als Randbedingung für u anzusehen die Forderung, dass sich u in jedem Punkte der Kugel regulär verhalten soll (HILBERT [6] S. 237, Randbedingung V*).

Um die Lösung von (1) aus Partikularlösungen $f(P)g(t)$ aufzubauen, erhält man für $f(P)$ die Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$. Hierzu und zu der soeben erwähnten Randbedingung gehört das System der normierten Eigenfunktionen

$$\varphi_{0,0} = (2\sqrt{\pi})^{-1}; \; \varphi_{\varkappa,\lambda}, \; \lambda = 0, 1, \dots 2\varkappa; \; \varkappa = 1, 2, 3, \dots$$

und der zugehörigen Eigenwerte $\lambda_\varkappa = \varkappa(\varkappa+1)$, $\varkappa = 0, 1, 2, \dots$

Bildet man aus diesen Funktionen für die Koordinaten der beiden Punkte $P(\varphi, \psi)$, $Q(\varphi', \psi')$ die Reihe

$$(2) \qquad H(P, Q, t) = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \left(\sum_{\nu=0}^{2\varkappa} \underset{\varkappa\nu}{\varphi}(P) \underset{\varkappa\nu}{\varphi}(Q) \right) e^{-\varkappa(\varkappa+1)t}$$

$$= (4\pi)^{-1} \sum_{\varkappa=0}^{\infty} (2\varkappa+1) P_\varkappa(\cos\gamma) e^{-\varkappa(\varkappa+1)t}$$

wo $\cos\gamma = \cos\psi \cos\psi' + \sin\psi \sin\psi' \cos(\varphi - \varphi')$,

---

[1]) Derartige Nummern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluss.

so gilt der

(Haupt-) Satz: Die Reihe $H(P, Q, t)$ stellt die Green'sche Funktion für das soeben angegebene Problem der Wärmeleitung dar und es ist

$$H \geqq 0$$

für alle Punkte der Kugel und $0 \leqq t$.

Zum Beweis zeige ich, dass (2) folgende Eigenschaften besitzt:

(a) $\Delta H = \frac{\partial H}{\partial t}$; $t > 0$;

(b) H ist für $t > 0$ auf der ganzen Kugel regulär;

(c) $\lim\limits_{t \to 0} H = 0$, $P \neq Q$;

(d) $\lim\limits_{t \to 0} \int\limits_K H(P, Q, t)\, df_P = 1$ (Bedingung der Singularität in Q).

Diese Bedingungen sind der analytische Ausdruck für die durch physikalische Überlegungen geformte Definition der Green'schen Funktion (vgl. H. WEBER [9] Bd. 2. § 51; CARSLAW [1] Chap. X, S. 169 und 171).

Bezüglich (a) und (b) hat man: Da $P_\varkappa(1) = 1$ so ergibt sich, dass die Reihe (unter Weglassung des Terms mit $\lambda_0 = 0$) konvergiert:

$$\sum_{\varkappa=1}^{\infty} \left(\sum_{v=0}^{2\varkappa} \varphi_{\varkappa v}^2(P) \right) \lambda_\varkappa^{-2} = (4\pi)^{-1} \sum_{\varkappa=1}^{\infty} (2\varkappa + 1)\varkappa^{-2}(\varkappa + 1)^{-2}$$

Folglich konvergiert die Reihe (2) für jedes $t > 0$ gleichmässig für beliebige P und Q auf der Kugel.

Der aus der Potentialtheorie bekannte Satz von HARNACK über gleichmässig konvergierende Reihen von regulären Partikularlösungen (d. h. Lösungen, die nebst den Ableitungen erster Ordnung, sowie denjenigen Ableitungen zweiter Ordnung, die in der Differentialgleichung vorkommen, stetig sind) gilt auch hier (vgl. PASCAL's Repertorium I, 3 (1929), 1175–1188) und somit stellt (2) eine auf der Kugel und für $t > 0$ reguläre Lösung von (1) dar, womit (a) und (b) nachgewiesen sind.

In Bezug auf (c) braucht man folgende bekannte Resultate:

Es sei c_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ eine Folge reeller Zahlen; die iterierten Partialsummen sind

$$C_n^0 = c_1 + c_2 + \cdots + c_n$$

$$\ldots\ldots$$

$$C_n^v = C_1^{v-1} + C_2^{v-1} + \cdots C_n^{v-1}$$

und die entsprechenden Riesz'schen Summen sind

$$L^v(\omega) = \sum_{\lambda<\omega} (\omega-\lambda)^v c_\lambda .$$

L. FEJÉR [3] bewies:

Lemma 1: Der zweite Cesàro'sche Mittelwert

$$c_n^{(2)} = C_n^2 \Big/ \binom{n+1}{2}$$

gebildet für die Folge $(2k+1)P_k(\cos\gamma)$, $k=0,1,2\ldots$ strebt zur Grenze null, gleichmässig für $0<\delta\leqq\gamma\leqq\pi$.

Aus den Resultaten von RIESZ, C.R. 1911, p. 1651—54, entnimmt man:

Lemma 2: Wenn die Koeffizienten c_n der Folge von 2 Gruppen von Variabeln abhängen, die durch die Punkte P, Q repräsentiert sind, enthalten in einem abgeschlossenen Gebiet A, wenn k eine ganze Zahl ist, und wenn

$$\lim_{n\to\infty} n^{-k} C_n^k = c$$

existiert, gleichmässig in A, für $|P-Q|\geqq\delta>0$, dann gilt für die stetige reelle Variable u

$$\lim_{u\to\infty} u^{-k} L^k(u) = c$$

gleichmässig im gleichen Gebiet.

Zur Folge obiger Eigenwerte λ_k gehört als Riesz'sche Summe, wenn man ω ersetzt durch $u(u-1)$, die Grösse

$$Q^k(u) = \sum_{\lambda<u} [(u-1)u-(\lambda-1)\lambda]^k c_\lambda$$

Da $(u-1)u-(\lambda-1)\lambda = (u-\lambda)[2u-1-(u-\lambda)]$, so folgt

$$u^{-2k} Q^k(u) = \sum_{\varrho=0}^{k} \binom{k}{\varrho} (2-u^{-1})^{k-\varrho} (-1)^\varrho u^{-k-\varrho} L^{k+\varrho}(u) \cdot$$

Hieraus ergibt sich

Lemma 3: Wenn die Koeffizienten c_n der Folge von 2 Gruppen von Parametern abhängen, die durch die Punkte P, Q repräsentiert werden, enthalten in einem abgeschlossenen Gebiet A, und wenn

$$\lim_{u\to\infty} u^{-k} L^k(u) = c,$$

gleichmässig in A für $|P-Q|\geqq\delta>0$, dann gilt

$$\lim_{u\to\infty} u^{-2k} Q^k(u) = c$$

gleichmässig im gleichen Gebiet.

Theorem 23 im Tract von HARDY und RIESZ [5] p. 39 lautet:

Wenn $\sum c_n$ summierbar ist $(\lambda, \varkappa)$ dann ist $\sum c_n e^{-\lambda_n t}$ gleichmässig summierbar im Winkelraum definiert durch $|\operatorname{am} t| \leqq \alpha < \frac{1}{2}\pi$.

Letzteres Theorem, Lemma 2 und Lemma 3 angewandt auf die Reihe $\sum c_n e^{-n(n+1)t}$ ergeben

Lemma 4: Wenn die Voraussetzungen von Lemma 2 erfüllt sind und wenn

$$\lim_{n \to \infty} n^{-k} C_n^k = c$$

gleichmässig in A für $|P - Q| \geqq \delta > 0$, dann gilt

$$\lim_{t \to 0} \sum c_n e^{-n(n+1)t} = c$$

gleichmässig im gleichen Gebiet.

Durch Lemma 4 und Lemma 1 folgt:

1. Satz: Der Grenzwert

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{4} \pi^{-1} \sum_{0}^{\infty} (2v + 1) P_v(\cos \gamma) e^{-v(v+1)t} = 0$$

besteht gleichmässig für $0 < \delta \leqq \gamma \leqq \pi$.

Dies ist die Eigenschaft (c) erweitert um die Aussage der Gleichmässigkeit.

Die Eigenschaft (d) folgt daraus, dass die Konstante $\varphi_{00} = (2\sqrt{\pi})^{-1}$ Eigenfunktion ist. Daher bestehen die Gleichungen $\int\limits_K \varphi_{00} \varphi_{\varkappa\lambda}(P) df_P = 0$, die infolge der gleichmässigen Konvergenz von (2) für alle $t > 0$

$$\int\limits_K H(P, Q, t)\, df_P = 1$$

zur Folge haben. Diese Gleichung drückt aus, dass für alle $t > 0$ die gesamte Wärmemenge, die sich auf der Kugel befindet, dieselbe ist; die Wärme kann sich ja nur längs der Fläche verschieben; sie kann die Fläche nicht verlassen.

Was die letzte der Behauptungen des (Haupt-) Satzes anbelangt, geht die Lösung $(2\sqrt{\pi t})^{-3} e^{-1/4 r^2 t^{-1}}$, wo $r = |P - Q|$ ist, für die Differentialgleichung (1) über in die Funktion

$$E = (2\sqrt{\pi t})^{-3} e^{-1/4(1-\cos\gamma)t^{-1}},$$

sodass man erhält

$$H(P, Q, t) = E - F(P, Q, t),$$

wo nun F eine Lösung von (1) ist, die für $t \geqq 0$ auf der ganzen Kugel stetig ist. Aus (2) folgt $H(Q, Q, t) \geqq 0$, $t \geqq 0$.

Ferner ist auch $E \geqq 0$ für $t \geqq 0$.

Aus Satz 1, der analogen Eigenschaft von E und daraus, dass F für $t \geqq 0$ stetig ist, folgt

$$\lim_{t \to 0} F = 0, \text{ gleichmässig für alle } P, Q \text{ auf der Kugel.}$$

Somit gibt es zu beliebig gegebenem $\varepsilon > 0$ ein δ derart, dass $|F| \leqq \varepsilon$ für $0 < t \leqq \delta(\varepsilon)$ und dies hat zur Folge, dass

(3) $$H(P, Q, t) \geqq -\varepsilon \text{ für } 0 < t \leqq \delta.$$

Nun ist aber $H(Q, Q, t) \geqq 0$ für $t > 0$. Betrachtet man jetzt das Gebiet $G(\delta, \tau)$ gebildet aus den Punkten: P auf Kugel, $0 < \delta \leqq t \leqq \tau$, dessen Begrenzung $Z_1 + Z_2$ besteht aus

Z_1 aus den Punkten P auf Kugel, $t = \delta$

Z_2 aus den Punkten $P = Q$, $\delta \leqq t \leqq \tau$,

dann ist

(4) $$H(P, Q, t) \geqq -\varepsilon \text{ für } P \text{ auf } Z_1 + Z_2.$$

Weiter besitzt nach dem Satze von E. E. LEVI [8] und M. GEVREY [4] eine in $G(\delta, \tau)$ reguläre Lösung von (1) Maximum und Minimum auf dem Rande; daher folgt aus (4)

$$H(P, Q, t) \geqq -\varepsilon \text{ für } P \text{ in } G(\delta, \tau).$$

Dies und (3) ergeben

$$H(P, Q, t) \geqq -\varepsilon \text{ für } t > 0.$$

ε ist willkürlich und somit folgt die Behauptung.

Dies Ergebnis lässt sich auch direkt aus (2) berechnen, indem man $P_k(\cos\gamma)$ durch eine der Mehlerschen Formeln darstellt, Summation und Integration vertauscht und nun die unter dem Integral erscheinende Summe als Ableitung einer Thetafunktion darstellt.

Literaturverzeichnis.

1. H. S. CARSLAW, Math. theory of the conduction of heat in solids. sec. ed. 1921.
2. R. COURANT und D. HILBERT, Methoden der math. Physik. I. 1924.
3. L. FEJÉR, Math. Ann. 67 (1909), 76—109.
4. M. GEVREY, J. d. Math. pures et app. (6), 9 (1913), 10 (1914).
5. G. H. HARDY and M. RIESZ, The general theory of Dirichlets series. Cambridge tract No. 18, 1915.
6. D. HILBERT, Grundzüge etc. 2-te Mitteil., Göttinger Nachr. (1904), math.-phys. Kl.
7. A. KNESER, Die Integralgleichungen 1922.
8. E. E. LEVI, Ann. di Mat. (3) 14 (1908), 187—264.
9. H. WEBER-RIEMANN, Die part. Diffgl. d. math. Physik, 1901.