Una notevole superficie di 5° ordine con soli punti doppi isolati.

Von

EUGENIO G. TOGLIATTI (Genova).

(Als Manuskript eingegangen am 1. Februar 1940.)

1. Sia Φ una forma cubica in uno spazio S_5. Per un punto generico di Φ passa un cono V_2^6 di rette giacenti su Φ; possiamo dunque considerare genericamente una retta r appartenente a Φ. Assunte in S_5 coordinate proiettive omogenee x_i $(i=0,1,\ldots,5)$ per i punti, e collocati su r i punti (000010), (000001), l'equazione di Φ si scriverà:

$$\Phi = x_0\alpha + x_1\beta + x_2\gamma + x_3\delta = 0\,; \tag{1}$$

ove:

$$\alpha = \sum a_{ij}x_ix_j, \quad \beta = \sum b_{ij}x_ix_j, \quad \gamma = \sum c_{ij}x_ix_j, \quad \delta = \sum d_{ij}x_ix_j$$

sono quattro forme quadratiche nelle x_i.

Lo spazio S_4 tangente a Φ in un punto $P\,(0000\,1\,t)$ di r ha per equazione:

$$\sum x_i \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right)_P = 0\,;$$

ma si ha:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_0}\right)_P = \alpha(P) = a_{44} + 2a_{45}t + a_{55}t^2; \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\right)_P = \beta(P) = b_{44} + 2b_{45}t + b_{55}t^2;$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}\right)_P = \gamma(P) = c_{44} + 2c_{45}t + c_{55}t^2; \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_3}\right)_P = \delta(P) = d_{44} + 2d_{45}t + d_{55}t^2;$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_4}\right)_P = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_5}\right)_P = 0\,;$$

perciò quell' S_4 tangente è:

$$A + 2Bt + Ct^2 = 0\,;$$

ove si è posto:

$$A = a_{44} x_0 + b_{44} x_1 + c_{44} x_2 + d_{44} x_3 \; ;$$
$$B = a_{45} x_0 + b_{45} x_1 + c_{45} x_2 + d_{45} x_3 \; ;$$
$$C = a_{55} x_0 + b_{55} x_1 + c_{55} x_2 + d_{55} x_3 \; .$$

Al variare di P su r esso inviluppa di regola un cono quadrico di 3ª specie:

$$AC - B^2 = 0 \, , \tag{2}$$

avente come vertice il piano $A = B = C = 0$ passante per r. Poichè r è semplice per Φ, fa eccezione il caso in cui r contiene un punto doppio O di Φ, perchè allora riescon tutte nulle in O le $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_i}$, sicchè gli iperpiani $A=0$, $B=0$, $C=0$ vengono a stare in un fascio; essi coinciderebbero se r contenesse due punti doppî di Φ; nell'un caso gli S_4 tangenti a Φ nei punti di r formano un fascio, nell'altro caso Φ ha lungo r un S_4 tangente fisso.

Costruiamo ora il contorno apparente di Φ da r su un S_3, ossia il luogo delle tracce sull' S_3 dei piani passanti per r e che tagliano ulteriormente Φ secondo coniche degeneri. Poichè un S_3 generico per r taglia Φ in una superficie cubica la quale è segata, fuori di r, secondo coniche degeneri da 5 piani passanti per r, così il contorno apparente richiesto avrà 5 punti comuni con una retta generica del suo S_3; sarà pertanto una superficie F^5 di 5° ordine.

Analiticamente, si prenda come S_3 quello di equazione $x_4 = x_5 = 0$. Un piano σ per r si ha fissando $x_0 x_1 x_2 x_3$ e lasciando variare $x_4 x_5$; la conica sezione ulteriore di Φ con σ è data quindi dalla (1) ove si facciano variare solo $x_4 x_5$. Annullandone il discriminante si ottiene l'equazione di F^5 sotto la forma seguente:

$$F = \begin{vmatrix} A & B & P \\ B & C & Q \\ P & Q & M \end{vmatrix} = 0 \; ; \tag{3}$$

ove si è posto:

$$\begin{aligned} P = {} & x_0(a_{04} x_0 + \cdots + a_{34} x_3) + x_1(b_{04} x_0 + \cdots + b_{34} x_3) + x_2(c_{04} x_0 + \cdots + c_{34} x_3) \\ & + x_3(d_{04} x_0 + \cdots + d_{34} x_3) \, ; \\ Q = {} & x_0(a_{05} x_0 + \cdots + a_{35} x_3) + x_1(b_{05} x_0 + \cdots + b_{35} x_3) + x_2(c_{05} x_0 + \cdots + c_{35} x_3) \\ & + x_3(d_{05} x_0 + \cdots + d_{35} x_3) \, ; \\ M = {} & x_0 \alpha(x_0 x_1 x_2 x_3 0 0) + x_1 \beta(x_0 x_1 x_2 x_3 0 0) + x_2 \gamma(x_0 x_1 x_2 x_3 0 0) \\ & + x_3 \delta(x_0 x_1 x_2 x_3 0 0) \, . \end{aligned}$$

Si noti che, se $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ son forme quadratiche generiche, i polinomî A, B, C, P, Q, M sono i più generali del loro grado.

2. Anche nelle ipotesi più generali circa Φ, supponendo quindi Φ del tutto priva di punti multipli, la superficie F^5 ammette dei punti doppî. Tali sono intanto tutti i punti le cui coordinate annullano tutti i minori di 2° ordine del determinante (3); essi son quelli che risolvono le tre equazioni:

$$AC-B^2=0\,,\quad AQ-BP=0\,,\quad AM-P^2=0\,, \tag{4}$$

senza annullare A. Ciò risulta da noti teoremi sui determinanti; e anche dal fatto che la (3), sviluppata, diviene:

$$F\equiv M(AC-B^2)-(AQ^2-2BPQ+CP^2)\,;$$

da cui si deduce appunto, con calcolo immediato:

$$AF\equiv(AC-B^2)\,(AM-P^2)-(AQ-BP)^2. \tag{5}$$

Ora, la 1ª e la 2ª delle (4) rappresentano, nel modo più generale, un cono quadrico ed una superficie cubica aventi in comune una retta, la $A=B=0$, lungo la quale non sono fra loro tangenti, ed intersecantisi perciò ancora in una curva di 5° ordine C^5 passante per il vertice del cono quadrico ed avente in comune con la retta $A=B=0$ due punti H, K; questi sono i punti $A=B=P=0$, perchè il piano $A=0$ taglia le due superficie rispett. secondo la retta $A=B=0$ contata due volte e secondo una cubica spezzata nella retta stessa $A=B=0$ e nella conica $A=P=0$. La 3ª delle (4) dà invece una superficie di 4° ordine che incontra la C^5 in 20 punti, tra cui anche H, K; anzi, questa 3ª superficie è tangente al piano $A=0$ lungo la conica $A=P=0$; sicchè le tangenti alla C^5 in H, K, che stanno nel piano $A=0$ tangente ivi al cono quadrico, riescono tangenti in H, K anche alla superficie quartica. Dunque H, K assorbono due intersezioni ciascuno della C^5 con la superficie quartica; restano pertanto solo 16 punti che risolvono le (4) senza stare sul piano $A=0$.

Allo stesso risultato, che abbiamo ritrovato direttamente solo per comodità del lettore, si può giungere del resto applicando una nota formola che dà il numero dei punti che annullano i minori d'un dato ordine di un determinante simmetrico i cui elementi sono forme di ordini noti [1]).

La nostra F^5 ha dunque 16 punti doppî situati sulla C^5:

$$\left\|\begin{matrix} A & B & P \\ B & C & Q \end{matrix}\right\| = 0\,. \tag{6}$$

[1]) G. Z. Giambelli, Atti Accad. Torino, 41 (1905), p. 102; C. Segre, Enzykl. d. math. Wiss., III C 7, pp. 930—931.

Si rilevi pure che la (3) è la più generale F^5 tangente ad un cono quadrico lungo una C^5 come quella di equazioni (6). Infatti, la più generale F^6 tangente al cono quadrico (2) lungo la linea composta di quella C^5 e della retta $A=B=0$, che insieme dànno l'intersezione del cono stesso con la superficie cubica $AQ-BP=0$, è la seguente:

$$H(AC-B^2)-(AQ-BP)^2=0;$$

ove H è una forma generica di 4° grado. Se da questa F^6 si stacca il piano $A=0$, cioè se $H+P^2$ è divisibile per A, cioè se H è della forma $AM-P^2$, con M forma cubica, si ritrova precisamente la (5).

La superficie F^5 non può avere altri punti multipli sul cono (2) oltre i 16 sopra considerati. Si scrivano infatti le derivate prime di F:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}=(CM-Q^2)\cdot A^{(i)}-2(BM-PQ)\cdot B^{(i)}+(AM-P^2)\cdot C^{(i)}$$
$$+2(BQ-CP)\cdot P^{(i)}-2(AQ-BP)\cdot Q^{(i)}+(AC-B^2)\cdot M^{(i)},$$

ove $A^{(i)}, B^{(i)}, C^{(i)}, P^{(i)}, Q^{(i)}, M^{(i)}$ sono le derivate di A, B, C, P, Q, M rispetto ad x_i. Un punto multiplo di F^5 situato sul cono (2) dovrebbe stare sulla curva (6), cioè dovrebbe annullare anche $AQ-BP$, $BQ-CP$ oltre $AC-B^2$; ma allora, dovendo esso annullare tutte le $\frac{\partial F}{\partial x_i}$, se non annullasse anche $CM-Q^2$, $BM-PQ$, $AM-P^2$, cioè se non rientrasse tra i 16 punti doppî già considerati, dovrebbe riuscir nullo il Jacobiano di A, B, C; cioè i tre piani $A=0$, $B=0$, $C=0$ starebbero in un fascio, o coinciderebbero, il che vorrebbe dire che su r vi sono dei punti doppî di Φ, contro l'ipotesi.

3. Ammettiamo ora che Φ possa avere tutt'al più dei punti doppî isolati del tipo più generale. Possiamo ovviamente supporre che nessuno di essi stia su r, nè sul piano vertice del cono (2); ma neppure sul cono stesso. Infatti, se un punto doppio O di Φ stesse su quel cono, ma non sul suo piano vertice, esso starebbe sugli S_4 tangenti a Φ in due punti di r tra loro infinitamente vicini; ed allora questi due punti starebbero sulla prima polare di O, che riuscirebbe tangente ad r. Ora, affinchè una retta r di Φ sia tangente al contorno apparente di Φ stessa da uno dei suoi punti doppî, essa deve verificare una condizione; la circostanza anzidetta non potrà quindi presentarsi per una retta generica di Φ.

Un punto doppio o di Φ si proietta da r in un punto doppio di F^5. Infatti, un S_3 generico per r ed O taglia Φ in una superficie cubica con O doppio, per la quale quindi due dei cinque piani che la tagliano, fuori di r, in una conica degenere coincidono col piano rO.

Per confermare la cosa analiticamente, collochiamo in O il punto (000100); si avranno le condizioni:

$$d_{33}=0\,; \quad a_{33}+2d_{03}=b_{33}+2d_{13}=c_{33}+2d_{23}=d_{43}=d_{53}=0\,; \tag{7}$$

ma dovrà essere:

$$d_{44}d_{55}-d_{45}^2 \neq 0\,. \tag{8}$$

Il coefficiente di x_3^5 nella (3), che vale:

$$D=\begin{vmatrix} d_{33} & d_{34} & d_{35} \\ d_{43} & d_{44} & d_{45} \\ d_{53} & d_{54} & d_{55} \end{vmatrix}, \tag{9}$$

riuscirà senz'altro nullo. Il coefficiente di x_3^4 nella (3) è invece:

$$\begin{aligned} &D_{33}[(a_{33}+2d_{03})x_0+(b_{33}+2d_{13})x_1+(c_{33}+2d_{23})x_2]+\\ &+D_{44}(a_{44}x_0+b_{44}x_1+c_{44}x_2)+2D_{45}(a_{45}x_0+b_{45}x_1+c_{45}x_2)+\\ &+D_{55}(a_{55}x_0+b_{55}x_1+c_{55}x_2)+\\ &+2D_{34}[(a_{34}+d_{04})x_0+(b_{34}+d_{14})x_1+(c_{34}+d_{24})x_2]+\\ &+2D_{35}[(a_{35}+d_{05})x_0+(b_{35}+d_{15})x_1+(c_{35}+d_{25})x_2]; \end{aligned}$$

esso pure riesce nullo per le (7), e perchè le (7) stesse dànno $D_{34}=D_{35}=D_{45}=D_{44}=D_{55}=0$. Dunque il punto (0001) è doppio per F^5.

Viceversa, supponiamo che il punto (0001) sia doppio per F^5. Sarà nullo anzitutto il determinante (9), perciò il piano $x_0=x_1=x_2=0$ taglierà Φ, all'infuori di r, in una conica degenere. Se supponiamo che il punto doppio considerato su F^5 non stia sul cono (2), sarà verificata la (8); il determinante (9) avrà caratteristica 2; la conica degenere anzidetta si comporrà di due rette distinte, le quali, sempre per la (8), non si potranno incontrare su r. Spostando i due punti fondamentali delle coordinate che stanno su r, e collocando il punto (000100) nel punto doppio di quella conica degenere, si fanno assumere a questa le equazioni $x_0=x_1=x_2=x_4x_5=0$; risulterà cioè: $d_{33}=d_{34}=d_{35}=d_{44}=d_{55}=0$, $d_{45}\neq 0$. Ed allora, annullando identicamente il coefficiente di x_3^4 nella (3), si ritrovano le (7).

Concludendo: S e Φ ha solo dei punti doppî isolati, ed r è generica su Φ, la superficie F^5 ha come punti doppî le proiezioni da r dei punti doppî di Φ, ed inoltre 16 punti doppî sul cono $AC-B^2=0$.

Si vede anche subito che il cono tangente ad F^5 in un punto doppio O' del primo tipo è la traccia su S_3 del cono circoscritto da r al cono tangente a Φ nel punto doppio O corrispondente; perciò se O è punto doppio di tipo generico per Φ, ed r è generica su Φ, anche O' è per F^5 un punto doppio ordinario.

In particolare, supponiamo che Φ abbia il massimo numero possibile di punti doppî isolati, cioè 15 punti doppî[2]); allora F^5 avrà $16+15=31$ punti doppî; è il massimo numero di punti doppî che, per quanto mi è noto, si sia riusciti sinora ad imporre ad una superficie di 5° ordine.

---

[2]) E. G. Togliatti, Scritti matematici offerti a L. Berzolari, Pavia, 1936, pp. 577—593; Atti del 1° Congr. dell'Unione matem. ital., Firenze, 1937, pp. 254–258.