Über die sog. «Ein-Franken-pro-Todesfall»-Kassen.

Eine versicherungstechnische Studie von
HEINRICH JECKLIN (Zürich).

(Als Manuskript eingegangen am 25. Januar 1940.)

In der versicherungstechnischen Literatur finden die sog. «Ein-Franken-pro-Todesfall»-Kassen so gut wie keine Erwähnung, obwohl man ihnen in der Sterbekassen-Praxis hie und da begegnet. Prof. Dumas bezeichnet diese Kassen in seiner schönen, für nichtmathematischen Leserkreis bestimmten Abhandlung «Répartition ou Capitalisation» als nach einem der Umlage analogen Prinzip aufgebaute Institutionen: «Wenn ein Mitglied stirbt, bezahlt jeder Überlebende an die Kasse einen bestimmten Betrag, z. B. einen Franken, und das Total der Beträge bildet die den Hinterlassenen zustehende Sterbesumme».

Grundsätzlich sind bei derartigen Sterbekassen mit den durch den jeweiligen Todesfall eines Kassenmitgliedes ausgelösten Beiträgen drei Modalitäten denkbar:

a) Es wird pro Todesfall von jedem Überlebenden ein fester Betrag eingehoben; das Total bildet die Sterbesumme, die von Fall zu Fall verschieden hoch ausfallen kann.

b) Es wird eine Sterbesumme bestimmter Höhe ausbezahlt und die erforderlichen Beiträge auf die Überlebenden umgelegt, was variable Beiträge zur Folge hat.

c) Sterbesumme sowohl als Beiträge sind zum voraus fest vereinbart.

Bei den Fällen a) und b) handelt es sich offensichtlich um eine einfache Umlage. Ist beim einzelnen Sterbefall die Zahl der Überlebenden L, der Beitrag P und die Sterbesumme S, so bestimmt sich bei a) die jeweilige Sterbesumme als $S = L \cdot P$, und

bei b) der jeweilige Beitrag als $P = \frac{S}{L}$.

Dabei ist an sich gleichgültig, ob es sich um eine offene, d. h. sich erneuernde, oder um eine geschlossene Gesamtheit handelt. In leztterem Falle wird sich allerdings bald die freiwillige Auflösung der Kasse ergeben wegen Sinkens der Summe resp. Steigens der Prämie. Aber auch im Falle der offenen Gesamtheit muss es von den Mitgliedern zumindest als schwerer Nachteil empfunden werden, dass hinsichtlich der Todesfallsumme bezw. des Prämienaufwandes die Höhe der jeweiligen Leistung nicht feststeht.

Der Fall c) dagegen liegt nicht so einfach und kann wohl einiges theoretisches Interesse beanspruchen, wenn es sich auch nur um mathematische Entwicklungen ganz elementarer Natur handelt. Hier wird im allgemeinen keine Umlage vorliegen, da Prämie und Sterbesumme fest vorausgesetzt sind und daher bei variabler Mitgliederzahl eine Reserve den Ausgleich schaffen muss. Im Gegensatz zur gewöhnlichen Sterbekasse muss sich als Charakteristikum ergeben, dass die Prämie von der absoluten Höhe der Mitgliederzahl abhängig ist.

Es sei die Zahl der Mitglieder zu Beginn des k. Jahres mit H_k bezeichnet. Jedes überlebende Mitglied hat pro Sterbefall die fixe Prämie P zu entrichten. Weiter sei angenommen, dass die Todesfälle und Neueintritte sich innerhalb des Jahres gleichmässig verteilen. Auf jeden Todesfall des k. Jahres sollen Z_k Neueintritte entfallen, welche sofort (gewissermassen als Eintrittsgeld) den Betrag P bezahlen. An Prämien gehen dann innerhalb eines Jahres offenbar ein:

beim ersten Todesfall: $P \cdot (H_k - 1 + Z_k) = P \cdot {}_1H_k$,

beim zweiten Todesfall: $P \cdot ({}_1H_k - 1 + Z_k) = P \cdot {}_2H_k = P \cdot (H_k - 2 + 2\,Z_k)$,

beim dritten Todesfall: $P \cdot ({}_2H_k - 1 + Z_k) = P \cdot {}_3H_k = P \cdot (H_k - 3 + 3\,Z_k)$,

usw.

Finden im Laufe des Jahres T_k Todesfälle statt, so ist die Prämieneinnahme des k. Jahres also

$$P \cdot T_k \cdot \left(H_k - (1 - Z_k) \cdot \frac{T_k + 1}{2} \right).$$

Ist die Sterbesumme auf S angesetzt, so finden im selben Jahre $S \cdot T_k$ Auszahlungen statt.

Bezeichnen wir mit n die Dauer der Versicherungseinrichtung in Jahren (wobei bei unbeschränkter Dauer $n = \infty$ zu setzen ist) und wird die vereinfachende Annahme gemacht, dass Ein- und Auszahlungen durchschnittlich per Jahresmitte erfolgen, so ist P aus der Gleichsetzung der Barwerte von Ein- und Auszahlungen zu bestimmen:

$$(1) \qquad P \cdot \sum_{1}^{n}{}^{k}\, T_k \left(H_k - (1 - Z_k)\, \frac{T_k + 1}{2} \right) \cdot v^{k-1/2} = S \cdot \sum_{1}^{n}{}^{k}\, T_k \cdot v^{k-1/2}.$$

Ist der Altersaufbau der jeweiligen Gesamtheit H_k bekannt, derart, dass also $H_k = \sum_{a}^{w}{}^{x}\, L_x^{(k)}$ ist, wobei die $L_x^{(k)}$ die Besetzungsziffern der einzelnen Altersklassen (mit dem untersten Alter a) zu Beginn des k. Jahres darstellen, und wird eine bestimmte Sterbetafel als unveränderlich geltend vorausgesetzt, so ist die jährliche Erneuerungszahl gegeben durch

$$(2) \qquad Z_k \cdot T_k = \sum_{a}^{w}{}^{x}\, L_x^{(k+1)} - \sum_{a}^{w}{}^{x}\, L_x^{(k)} \cdot p_x = H_{k+1} - H_k - \sum_{a}^{w}{}^{x}\, L_x^{(k)} \cdot q_x =$$
$$= H_{k+1} - H_k - T_k.$$

(q_x bedeutet die einjährige Sterbens-, $p_x = 1 - q_x$ die einjährige Überlebenswahrscheinlichkeit des x-jährigen.)

Es handelt sich hier also um ganz analoge Überlegungen wie bei den ähnlich gelagerten Theoremen der Bevölkerungsvorausberechnung für Sozialversicherungskassen und dergl.[1])

Praktisch ist es nicht möglich, den jeweiligen künftigen Umfang und Altersaufbau einer beliebigen offenen Personengesamtheit zu kennen, man ist gezwungen, gewisse präzisierende Annahmen zu machen. So könnte z. B. die zeitliche Veränderung von H_k durch eine bekannte Funktion $f(k)$ als Wachstumsfaktor festgelegt sein, dergestalt, dass $H_{k+1} = H_k \cdot f(k)$, und ausserdem — gemäss einer oft gemachten Supposition — angenommen werden, dass, abgesehen vom Eröffnungsbestand, Neueintritte nur zum Alter a erfolgen. Die Zahl der jährlichen Neueintritte wäre dann wie folgt festgelegt:

$$(3) \qquad Z_k \cdot T_k = L_a^{(k+1)} = H_{k+1} - \sum_{a+1}^{w}{}^{x}\, L_x^{(k+1)} = H_k \cdot f(k) - \sum_{a}^{w}{}^{x}\, L_x^{(k)} \cdot p_x .$$

Im einzelnen Fall müsste die Funktion $f(k)$ plausibel gewählt werden, und es wäre damit die Berechnung des Beitrages P theoretisch möglich. In der Praxis dürften sich allerdings so mannigfache Schwierigkeiten ergeben, dass die Verwendung eines

[1]) Man vergl. z. B. W. FRIEDLI: „Bevölkerungsstatistische Grundlagen zur Alters- und Hinterlassenenversicherung in der Schweiz". Bern 1928.

derartigen Prämiensystems sich als absolut ungeeignet erweisen müsste.

Besonders einfach gestaltet sich die Sachlage, wenn gefordert wird, dass die Versichertengesamtheit einen konstanten Umfang haben soll. Es ist dann also $H_k = H =$ konst., was im vorherigen gleichbedeutend ist mit $f(k) = 1$. Bezüglich der jährlichen Erneuerungszahl muss dann gelten:

$$(4)\; Z_k \cdot T_k = H - \sum_a^w {}^x L_x^{(k)} \cdot p_x = H - \sum_a^w {}^x L_x^{(k)} \cdot (1 - q_x) = \sum_a^w {}^x L_x^{(k)} q_x = T_k.$$

Also folgt $Z_k = 1$, d. h. jeder Abgang zufolge Todes wird sofort durch einen Neueintritt wettgemacht. Die Bestimmungsgleichung (1) für die Prämie vereinfacht sich auf $P \cdot H = S$, der Beitrag ist also hier eine reine Umlage der konstanten Sterbesumme S auf die konstante Mitgliederzahl H. Dies ist offenbar die Sachlage, wie sie der ursprünglichen primitiven Idee der Gründer von «Ein-Franken-pro-Todesfall»-Kassen entspricht. Es ist nicht nötig zu betonen, dass ein derartiges Finanzsystem ausserordentlich labil und die strikte Durchhaltung kaum möglich ist. Die Zahl der vom einzelnen Mitglied jährlich zu entrichtenden Beiträge $T_k \cdot P$ schwankt natürlich mit der Änderung des Altersaufbaues von H. — Wird auch hier wieder die spezielle Annahme getroffen, dass die Neueintretenden einheitlich das Alter a aufweisen sollen, so wird die Gesamtheit in ihrem Altersaufbau einem Beharrungszustand entgegenstreben und schliesslich eine natürliche stationäre Gesamtheit darstellen in dem von SAXER beschriebenen Sinne.[2]) Es ist dann $H = c \cdot \sum_a^w {}^x l_x$ (worin c eine Konstante und l_x die Lebendenzahlen der vorausgesetzten Absterbeordnung bedeuten), die jährliche Erneuerungszahl ist $T = c \cdot \sum_a^w {}^x l_x \cdot q_x = c \cdot \sum_a^w {}^x d_x = c \cdot l_a$, und der einzelne Beitrag $P = \dfrac{S}{c \cdot \sum l_x}$. Die vom Einzelmitglied pro Jahr zu machende Aufwendung stellt sich auf $T \cdot P = c \cdot l_a \cdot P = \dfrac{l_a \cdot S}{\sum_a^w {}^x l_x}$.

Dies ist aber die Nettoprämie für eine lebenslängliche Todesfallversicherung mit Eintrittsalter a und unter Nullsetzung des tech-

[2]) W. SAXER: „Zur Frage des Beharrungszustandes". Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, Heft 27.

nischen Zinsfusses. Es zeigt sich hier wieder eklatant, um wieviel ungünstiger sich die Umlage für die Versicherten schlussendlich stellt als das Kapitaldeckungsverfahren.

Abschliessend soll der Fall betrachtet werden, dass keine Neueintritte stattfinden. Es ist also $Z_k = O$, und der Versichertenbestand stellt eine geschlossene, sich durch Absterben auflösende Gesamtheit dar. Die Bestimmungsgleichung (1) vereinfacht sich hier zu

$$(5) \qquad P \cdot \sum_1^w {}^k T_k \cdot \left(H_k - \frac{T_k + 1}{2} \right) \cdot v^{k - 1/2} = S \cdot \sum_1^w {}^k T_k \cdot v^{k - 1/2}.$$

Hiebei ist $H_k = \sum_{a+k-1}^w {}^x L_x^{(k)} = \sum {}^x L_x^{(1)} \cdot {}_k p_x$ und $T_k = \sum_{a+k-1}^w {}^x L_x^{(k)} \cdot q_x$.

Nehmen wir insbesondere an, dass es sich um gleichaltrige Mitglieder, also gewissermassen um einen Jahrgängerverein, handle, so kann voriger Gleichung die Gestalt gegeben werden

$$P \cdot \sum_1^w {}^k \left\{ \frac{L_{a+k-1} - L_{a+k}}{2} (L_{a+k-1} + L_{a+k} - 1) \cdot v^{k - 1/2} \right\} =$$
$$= S \cdot \sum_1^w {}^k (L_{a+k-1} - L_{a+k}) \cdot v^{k - 1/2}.$$

Nun ist hier $L_{a+k} = c \cdot l_{a+k}$, wobei $c = \frac{L_a}{l_a}$

und $L_{a+k-1} - L_{a+k} = c \cdot (l_{a+k-1} - l_{a+k}) = \frac{L_a}{l_a} d_{a+k-1}$.

Mithin kann weiter umgeformt werden auf (Erweiterung mit $\frac{l_a}{L_a} \cdot v^{a + 1/2}$)

$$P \cdot \sum_1^w {}^k d_{a+k-1} \cdot (L_{a+k-1} + L_{a+k} - 1) \cdot v^{a+k} = 2\, S \cdot \sum_1^w {}^k d_{a+k-1} \cdot v^{a+k},$$

respektive, unter Benützung der üblichen Symbole der Kommutationszahlen,

$$P \cdot \sum_1^w {}^k \left\{ (C_{a+k-1} \cdot l_{a+k-1} + C_{a+k-1} \cdot l_{a+k}) \frac{L_a}{l_a} - C_{a+k-1} \right\} =$$
$$= 2S \sum_1^w {}^k C_{a+k-1},$$

oder auch

$$P \cdot \left\{ \frac{L_a}{l_a} \cdot \sum_1^w {}^k (v \cdot D_{a+k-1} \cdot l_{a+k-1} - D_{a+k} \cdot l_{a+k}) - M_a \right\} = 2 \cdot S \cdot M_a.$$

Setzt man, wie oft gebräuchlich,

$$D_a \cdot l_a = D_{a,\,a} \quad \text{und} \quad \sum_{0}^{w} {}^k D_{a+k,\,a+k} = N_{a,\,a},$$

so erhält man schliesslich

$$P = S \frac{2 \cdot M_a}{(v \cdot N_{a,\,a} - N_{a+1,\,a+1}) \cdot \dfrac{L_a}{l_a} - M_a}. \tag{6}$$

Man ersieht auch hier wieder deutlich die Abhängigkeit der Beitragshöhe vom absoluten Personenumfang der Kasse (bezw. der anfänglichen Mitgliederzahl L_a).

Die Versicherungskombination ist im vorliegenden Falle dem Wesen nach eine lebenslängliche Todesfallversicherung, fussend auf dem Kapitaldeckungsverfahren, mit fallender Prämie, derart, dass die Jahresprämie den absoluten jährlichen Totenzahlen der Gesamtheit proportional ist (mit Proratazahlung im Todesjahr bis zum eigenen Tode). Es ist einleuchtend, dass eine derartige Regelung für praktische Belange, insbesondere auch zur Aufstellung der technischen Bilanzen, ungeeignet ist. Die nach den üblichen Prinzipien berechnete Todesfallversicherung, mit konstanter oder nach einfachem Gesetz variabler Prämie, erfüllt den Zweck einfacher und besser.

In kurzer Zusammenfassung können wir feststellen, dass die „Ein-Franken-pro-Todesfall“-Kassen als Fürsorge-Einrichtung abzulehnen sind.