

Das parabolische Spiegelteleskop.

Von

C. CARATHÉODORY (München).

(Mit 3 Abbildungen im Text.)

Seinem alten Freund R. FUETER zum sechzigsten Geburtstag.

(Als Manuskript eingegangen am 13. Januar 1940.)

1. Die Geometrische Optik ist seit ihren ersten Anfängen durch die Bedürfnisse des Instrumentenbaues in hohem Masse beeinflusst worden. Zur Zeit von EULER, von LAGRANGE und selbst von GAUSS wurde von einem Fernrohr nur die Eigenschaft verlangt, sehr kleine Objekte, welche im Fadenkreuz des Instrumentes liegen, richtig abzubilden. Dies hatte zur Folge, dass lediglich der Gang der Strahlen, welche in nächster Nähe der Rotationsachse des Instruments liegen, berücksichtigt zu werden brauchte. Das Problem, diesen Strahlengang in erster Approximation zu bestimmen, welches schon eine lange Geschichte hatte, ist erst von GAUSS mit überraschender Vollständigkeit und unübertroffener Eleganz gelöst worden (1841)¹⁾. Als später, bei Vermehrung der Ansprüche, welche an die optischen Apparate gestellt wurden, die Genauigkeit der Gaussischen Dioptrik nicht mehr hinreichte, entwickelte L. SEIDEL die Theorie der Fehler dritter Ordnung (1853), welche noch heute allgemein benutzt wird²⁾.

2. Für weitwinkelige Objektive mit photographischem Aufnahmegerät ist aber auch die Seidel'sche Theorie unzureichend. In der Praxis wird allerdings dieser Mangel nicht empfunden, weil man physikalische Methoden ausgebildet hat, mit welchen die Fehler der Objektive geprüft und verbessert werden, und weil man ausser-

¹⁾ C. F. GAUSS. Dioptrische Untersuchungen, Werke Bd. V, S. 243—276, Selbstanzeige hierzu, *ibid.* S. 309—312.

²⁾ L. SEIDEL. Zur Dioptrik. *Astr. Nachr.* **37** (1853), S. 105—120, **43** (1856), S. 289—332.

dem seit vielen Jahren die Gewohnheit hat, bei der Entwerfung eines neuen Objektivs, dieses dadurch zu beurteilen, dass man eine grosse Anzahl von Strahlen numerisch durch den ganzen Apparat verfolgt.

Jeder, der diese Verhältnisse einigermassen kennt, muss sich gefragt haben, ob es nicht möglich sein sollte, diese sehr unbeholfene Rechenmethode durch eine andere zu ersetzen, die weniger Mühe verursacht, weniger Hilfskräfte beansprucht und die auch weniger Erfahrung für die Deutung der Resultate voraussetzt. Zur Beantwortung dieser Frage kann man wohl u. a. folgenden Vorschlag machen.

3. Wir betrachten zwei zugeordnete Brennpunkte F' und F auf der Achse des Instrumentes (Abb. 1). Der Punkt F' soll auf der Objektseite liegen; in F soll senkrecht zur Achse die photographische Platte angebracht werden, deren Punkte durch die rechtwinkligen Koordinaten ξ, η bestimmt sind. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass die Abbildung des Punktes F' auf F vollkommen scharf ist, so dass alle Strahlen, die durch F' hindurchgehen und das Instrument durchsetzen, sich in F kreuzen. Wir betrachten eine zweite zur Achse senkrechte Ebene, welche eine Blende des Instrumentes, z. B. die Eintrittspupille trägt. Die Koordinaten der Punkte dieser letzteren Ebene sollen mit x, y bezeichnet werden. Auf dieser Ebene betrachten wir einen Kreis

$$(3.1) \quad x = r \cos \vartheta, \quad y = r \sin \vartheta,$$

dessen Mittelpunkt auf der Rotationsachse liegt.

Die Erzeugenden des Kegels, dessen Basis der Kreis (3.1) ist, und dessen Spitze im Punkte F' liegt, werden nach dem Durchgang durch das Instrument die $\xi\eta$ -Ebene im Punkte $\xi = \eta = 0$ treffen.

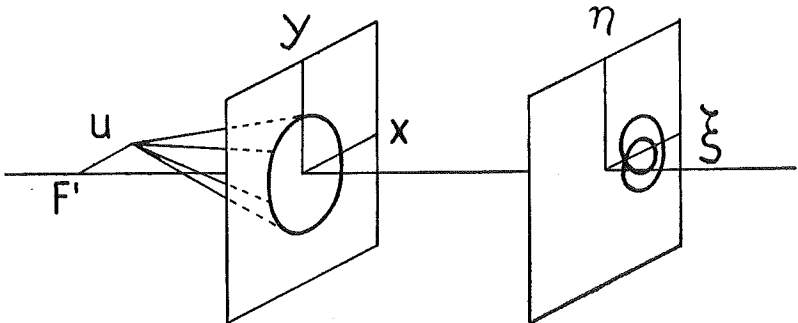


Abb. 1.

Wir verrücken jetzt den Punkt F' in irgendeiner zur Rotationsachse senkrechten Richtung um einen Betrag u . Die verschiedenen Erzeugenden des deformierten Kegels werden, wenn man sie durch das Instrument verfolgt, nicht mehr in einem und demselben Punkte der $\xi\eta$ -Ebene zusammenkommen. Die Koordinaten

$$(3.2) \quad \xi = \xi(u, r, \vartheta), \quad \eta = \eta(u, r, \vartheta)$$

dieser verschiedenen Schnittpunkte können nach dem Vorbild der Störungstheorie in nach Potenzen von u fortschreitenden Reihen

$$(3.3) \quad \xi = u\xi_1(r, \vartheta) + u^2\xi_2(r, \vartheta) + \dots, \quad \eta = u\eta_1(r, \vartheta) + u^2\eta_2(r, \vartheta) + \dots$$

entwickelt werden.

Das Intervall, in welchem u variieren soll, hängt einzig und allein vom Gesichtsfeld des Instrumentes ab, das Intervall, in welchem r variiert, vom Durchmesser d der Blende. Es ist wahrscheinlich, dass bei allen praktischen Fällen schon die Berücksichtigung einer kleinen Anzahl von Gliedern der Reihen (3.3) genügt, um ξ und η mit hinreichender Genauigkeit zu berechnen. In diesem Falle können wir die Gleichungen (3.3) durch folgende ersetzen:

$$(3.4) \quad \begin{cases} \xi = u\xi_1(r, \vartheta) + \dots + u^m\xi_m(r, \vartheta), \\ \eta = u\eta_1(r, \vartheta) + \dots + u^m\eta_m(r, \vartheta), \end{cases}$$

und annehmen, dass der Fehler, für alle in Betracht kommenden Werte von u und r gleichmässig klein bleibt.

Bei festgehaltenem u erhalten wir somit für jeden Wert von r eine geschlossene Kurve, die als eine Epizykloide, oder, was auf dasselbe hinauskommt, als eine Lissajous'sche Kurve angesehen werden kann.

4. Der Zweck des obigen Ansatzes ist nun folgender: die Strahlen, die von einem einzelnen Punkt des Objektes ausgehen, entwerfen auf der Aufnahmeplatte ein winzig kleines Bild der Blende. Diese Abbildung ist aber schon bei den einfachsten Instrumenten ausserordentlich kompliziert und schwer zu übersehen. Die Entwicklung (3.4) gibt uns die Möglichkeit, diese Abbildung in eine kleine Anzahl einfacher Elemente zu zergliedern, aus welchen wir die Eigenschaften des betrachteten Instrumentes beurteilen können.

Bei der Berechnung des neuen Spiegelteleskopes von B. SCHMIDT, die ich vor kurzem unternommen habe³⁾, kommt man von selbst auf die Gedanken, die soeben auseinandergesetzt worden sind.

³⁾ C. CARATHÉODORY. Elementare Theorie des B. Schmidt'schen Spiegelteleskops. Hamburger math. Einzelschriften, Heft 27, Leipzig u. Berlin. B. G. Teubner 1940.

Dieses Spiegelteleskop besitzt aber sehr kleine und sehr eigenförmliche Fehler: insbesondere verschwinden die Funktionen $\xi_1(r, \vartheta)$, $\eta_1(r, \vartheta)$ identisch und die nächsten Glieder der Entwicklung (3.3) haben eine sehr einfache Gestalt. Es ist daher nicht verwunderlich, dass in diesem speziellen Falle die Deutung unserer Formeln besonders leicht ist und sehr befriedigend ausfällt.

Eine allgemeine Anwendbarkeit unserer Methode kann man wegen dieser Umstände aus der erfolgreichen Behandlung des Schmidt'schen Teleskops noch nicht erwarten, und der Wunsch, andere einfache Instrumente mit ähnlichen Mitteln zu berechnen, scheint mir berechtigt zu sein.

Auf den folgenden Seiten wird die Theorie des parabolischen Spiegelteleskops nach den obigen Gesichtspunkten durchgeführt. Für den parabolischen Spiegel existiert eine umfangreiche Literatur⁴⁾ und die Eigenschaften dieses Fernrohrs sind besonders gut bekannt⁵⁾. Daher besteht die Möglichkeit, unsere Formeln mit schon längst erprobten Resultaten zu vergleichen.

5. Die Brennweite f des spiegelnden Rotationsparaboloids wollen wir als Längeneinheit wählen. Dann hat die Gleichung des Paraboloids die Gestalt

$$(5.1) \quad 4z_1 = x_1^2 + y_1^2.$$

Hieraus entnimmt man die Relation

$$x_1 dx_1 + y_1 dy_1 - 2dz_1 = 0$$

aus welcher die Gleichungen

$$(5.2) \quad X = x_1 - sx_1, \quad Y = y_1 - sy_1, \quad Z = z_1 + 2s,$$

für die Normale des Paraboloids im Punkte x_1, y_1, z_1 abgeleitet werden. Die Blende soll in der Ebene

$$(5.3) \quad z = h$$

liegen; von einem Punkte dieser Blende mit den Koordinaten

$$(5.4) \quad x, y, h$$

fallen wir ein Lot auf die Normale (5.2). Dem Fusspunkt dieses Lotes entspricht ein Wert des Parameters s , welcher durch die Gleichung

⁴⁾ Vgl. die Zitate auf S. 569 von CZAPSKI-EPPENSTEIN, Grundzüge der Theorie der optischen Instrumente, 3. Auflage, Leipzig, J. A. Barth, 1924.

⁵⁾ Siehe vor allem H. C. PLUMMER, On the Images formed by a Parabolic Mirror, Monthly Notices of the Royal Astron. Soc. Vol. 62, Nr. 5, March 1902, p. 352—369. — F. THIERSCH, Die Reflexion eines Parallelstrahlenbündels am Paraboloid, Diss. München, Techn. Hochsch. 1914, 60 S., 30 Fig. u. 9 Taf., Halle a. S., E. Karras.

$$x_1(X-x) + y_1(Y-y) - 2(Z-h) = 0$$

bestimmt wird. Mit Hilfe der früheren Relationen findet man hieraus

$$(5.5) \quad s = \frac{x_1(x_1-x) + y_1(y_1-y) + 2(h-z_1)}{4(z_1+1)}.$$

Der Symmetriepunkt von (5.4) an der Normalen (5.2) hat mit diesem Wert von s die Koordinaten

$$(5.6) \quad x_2 = x + 2(X-x), \quad y_2 = y + 2(Y-y), \quad z_2 = h + 2(Z-h),$$

und der Verbindungsstrahl der Punkte (x, y, h) und (x_1, y_1, z_1) geht durch Spiegelung am Paraboloid in den Strahl

$$(5.7) \quad \Xi = x_1 + t(x_2 - x_1), \quad H = y_1 + t(y_2 - y_1), \quad Z = z_1 + t(z_2 - z_1)$$

über. Den Schnittpunkt dieses letzteren Strahls mit der Brennebene $z = 1$ erhält man, indem man in den letzten Gleichungen

$$(5.8) \quad t = \frac{1 - z_1}{z_2 - z_1}$$

nimmt. Dies ist der Abbildungspunkt, den wir suchen; seine Koordinaten ξ und η werden aus den Gleichungen

$$(5.9) \quad (z_2 - z_1)\xi = (z_2 - z_1)x_1 + (1 - z_1)(x_2 - x_1)$$

$$(5.10) \quad (z_2 - z_1)\eta = (z_2 - z_1)y_1 + (1 - z_1)(y_2 - y_1)$$

berechnet.

6. Wir transformieren diese Formeln: aus (5.6) und (5.2) erhalten wir zunächst

$$(6.1) \quad x_2 - x_1 = 2(X-x) - (x_1-x) = (x_1-x) - 2s x_1$$

$$(6.2) \quad y_2 - y_1 = 2(Y-y) - (y_1-y) = (y_1-y) - 2s y_1$$

$$(6.3) \quad z_2 - z_1 = 2(Z-h) - (z_1-h) = (z_1-h) + 4s$$

Durch Einsetzen von (6.1) und (6.3) in die rechte Seite von (5.9) kommt nun

$$(z_2 - z_1)\xi = (z_1 - h)x_1 + 4s x_1 + (1 - z_1)(x_1 - x) - (1 - z_1)2s x_1 \\ = (z_1 - h)x_1 + (1 - z_1)(x_1 - x) + x_1 \cdot 2(1 + z_1)s$$

Mit Benutzung der Gleichung (5.5) findet man schliesslich

$$(6.4) \quad 2(z_2 - z_1)\xi = (2(1 - z_1) + x_1^2)(x_1 - x) + x_1 y_1 (y_1 - y)$$

und ganz ebenso berechnet man die Gleichung

$$(6.5) \quad 2(z_2 - z_1)\eta = x_1 y_1 (x_1 - x) + (2(1 - z_1) + y_1^2)(y_1 - y)$$

Ausserdem bemerke man, dass aus (6.3) und (5.5) folgt

$$(6.6) \quad (1 + z_1)(z_2 - z_1) = (1 - z_1)(h - z_1) + x_1(x_1 - x) + y_1(y_1 - y)$$

7. Wir betrachten jetzt ein Bündel von Lichtstrahlen, welche zur xz -Ebene parallel sind und mit der z -Achse den Winkel α einschliessen. Wir führen die Bezeichnungen

$$(7.1) \quad x_1 - x = w, \quad \operatorname{tg} \alpha = u$$

ein, und beachten die Gleichungen

$$(7.2) \quad y_1 - y = 0, \quad w = u(h - z_1).$$

Durch Einsetzen dieser Grössen in (6.4) und (6.6) entsteht zunächst die Relation

$$2\xi = \frac{(1 + z_1)(2(1 - z_1) + x_1^2)w}{(1 - z_1)(h - z_1) + x_1 w}.$$

Wir multiplizieren Zähler und Nenner dieses Ausdrucks mit u , berücksichtigen die zweite Gleichung (7.2) und erhalten

$$(7.3) \quad 2\xi = \frac{(1 + z_1)(2(1 - z_1) + x_1^2)u}{(1 - z_1) + x_1 u};$$

auf ganz ähnliche Weise bekommen wir

$$(7.4) \quad 2\eta = \frac{(1 + z_1)x_1 y u}{(1 - z_1) + x_1 u}.$$

Diese sehr eleganten Ausdrücke findet man zuerst in einer älteren Arbeit von H. C. PLUMMER, die nirgends — auch nicht im vollständigen Literaturverzeichnis von CZAPSKY-EPPENDORF — erwähnt wird⁶⁾. Sie haben den Vorzug, auch dann einen Sinn zu behalten, wenn die Punkte (x, y, h) und (x_1, y_1, z_1) zusammenfallen. Nach den Gleichungen (7.1) und (7.2) genügt es hierzu $h = z_1$ zu setzen, eine Annahme, welche bedeutet, dass die Blende als krumme Fläche, welche mit der Oberfläche des Spiegels zusammenfällt, gedacht werden soll. In diesem Falle werden die Schlussformeln besonders einfach⁷⁾. Aber dieser Vorteil wird dadurch aufgehoben, dass für die Verteilung der Lichtintensität auf der Aufnahmeplatte Korrektionsglieder berücksichtigt werden müssen, die man vermeidet, wenn man eine ebene Blende benutzt. Wir werden deshalb im folgenden die Ebene der Blende mit der Tangentialebene im

⁶⁾ H. C. PLUMMER, On the Star-Image formed by a Parabolic Mirror. *Astron. Journ.* Vol 19. Nr. 435 (May, 1898) pp. 21—23. — In derselben Nr. des *Astron. Journ.* pp. 17—21 findet man eine Arbeit von J. M. SCHAEFERLE, Theory of the Aberration in the focal plan of a Parabolic Reflector, die unnötig kompliziert ist. Gleichzeitig mit diesen Abhandlungen ist ausserdem eine sehr schöne Arbeit von C. W. CROQUETT, The parabolic mirror. *Astroph. Journ.* Vol 7, Nr. 5 (May 1898), pp. 362—366 erschienen, die nur wegen ihrer Kürze nicht leicht zu verstehen ist.

⁷⁾ Vgl. die unter ⁵⁾ zitierte Arbeit von PLUMMER, p. 355.

Scheitel des Spiegels zusammenfallen lassen; dazu müssen wir

$$(7.5) \quad h = 0$$

setzen.

8. Mit einer kleinen Änderung in der Bezeichnungswiese des § 3 setzen wir jetzt

$$(8.1) \quad x = 2r \cos \vartheta, \quad y = 2r \sin \vartheta$$

und entwickeln alle unsere Formeln nach Potenzen von u .

Aus (5.1), (7.1) und (7.2) folgt zunächst

$$(8.2) \quad z_1 = \frac{(x+w)^2 + y^2}{4} = r^2 + wr \cos \vartheta + \frac{w^2}{4},$$

und nach (7.2) hat man also auch

$$(8.3) \quad w = u \left(h - r^2 - wr \cos \vartheta - \frac{w^2}{4} \right)$$

Führen wir jetzt die Bezeichnungen ein

$$(8.4) \quad \lambda = ru, \quad w = -ur^2\omega = -\lambda r\omega,$$

so kann man (für $h = 0$) an Stelle von (8.3) schreiben

$$(8.5) \quad \omega = 1 - \omega \lambda \cos \vartheta + \omega^2 \frac{\lambda^2}{4}.$$

Es folgt hieraus

$$\omega = \frac{1}{1 + \lambda \cos \vartheta - \frac{\lambda^2}{4} \omega};$$

Setzt man also

$$(8.6) \quad \omega = 1 - \lambda \cos \vartheta + \lambda^2 A,$$

so erhält man

$$(8.7) \quad A = \frac{\cos^2 \vartheta + \frac{\omega}{4} (1 - \lambda \cos \vartheta)}{1 + \lambda \cos \vartheta - \frac{\lambda^2}{4} \omega}.$$

Nun ist aber, wie wir noch sehen werden, λ eine sehr kleine Zahl, welche 0,0004 nicht übersteigt, und folglich, ω nahezu gleich Eins. Man kann also ohne merklichen Fehler annehmen, dass

$$(8.8) \quad \frac{1}{4} \leq A \leq \frac{5}{4}$$

ist.

9. Um nun ξ mit Hilfe der Gleichung (7.3) zu bestimmen, benutzen wir die Gleichungen

$$(9.1) \quad x_1 = x + w = 2r \cos \vartheta - \lambda r \omega,$$

$$(9.2) \quad z_1 = r^2 \omega.$$

Wir setzen ferner

$$(9.3) \quad 1 + z_1 = 1 + r^2 - \lambda r^2 \cos \vartheta + \lambda^2 r^2 A$$

$$(9.4) \quad 1 - z_1 + \frac{x_1^2}{2} = 1 + r^2 \cos 2\vartheta - \lambda r^2 \cos \vartheta + \lambda^2 r^2 B$$

$$(9.5) \quad \frac{1}{1 - z_1 + x_1 u} = \frac{1}{1 - r^2} - \lambda \frac{(2 + r^2) \cos \vartheta}{(1 - r^2)^2} + \lambda^2 C$$

und finden, dass die Relationen

$$(9.6) \quad \frac{1}{4} \leq B \leq \frac{3}{4}, \quad 1 \leq C \leq 5$$

mit derselben Approximation stattfinden, die wir für die Grösse A haben gelten lassen. Durch gliedweise Multiplikation der drei Gleichungen (9.3) bis (9.5) erhält man schliesslich

$$(9.7) \quad \xi = u \xi_1 + u^2 \xi_2 + u^3 r^2 R_\xi,$$

wobei

$$(9.8) \quad \xi_1 = \frac{(1 + r^2)(1 + r^2 \cos 2\vartheta)}{1 - r^2},$$

$$(9.9) \quad \xi_2 = \frac{-r \cos \vartheta}{(1 - r^2)^2} (2 + 5r^2 - r^6 + 2(1 + 2r^2)r^2 \cos 2\vartheta)$$

sind.

Ganz ähnlich bekommt man

$$(9.10) \quad \eta = u \eta_1 + u^2 \eta_2 + u^3 r^4 R_\eta$$

$$(9.11) \quad \eta_1 = \frac{1 + r^2}{1 - r^2} r^2 \sin 2\vartheta$$

$$(9.12) \quad \eta_2 = \frac{-r^3 \sin \vartheta}{(1 - r^2)^2} (3 + 4r^2 - r^4 + 2(1 + 2r^2)r^2 \cos 2\vartheta)$$

Die Zahlen R_ξ und R_η kann man sehr leicht abschätzen; für die Werte von r und u , die in Betracht kommen, hat man immer

$$(9.13) \quad |R_\xi| < 6, \quad |R_\eta| < 6.$$

10. Die Öffnung $d:f$ eines Parabolspiegels muss man immer ziemlich klein wählen, nicht nur, weil die Koma sehr schnell mit dieser Öffnung zunimmt (vgl. § 16), sondern auch weil das Auflösungsvermögen des Teleskops, bei gegebenem Durchmesser des Spiegels, mit der Brennweite wächst.

So besitzt z. B. das kleinere der beiden grossen Instrumente des Mount Wilson Observatoriums einen Spiegeldurchmesser von 60 Zoll und eine Brennweite von 300 Zoll; also ist hier

$$(10.1) \quad \frac{d}{f} = 0,2,$$

und das 100zöllige Fernrohr derselben Sternwarte hat ungefähr dieselbe Öffnung. Der Krümmungsradius eines Meridianschnittes des grossen 200zölligen Spiegels, der augenblicklich auf Palomar Mountain in Süd-Kalifornien errichtet wird, beträgt dagegen nur 111 Fuss ⁸⁾. Die Öffnung dieses Instruments ist also besonders gross, nämlich gleich

$$(10.2) \quad \frac{d}{f} = \frac{200}{666} = 0,3 .$$

Der Parameter r , der in den Gleichungen (8.1) vorkommt, muss dann zwischen Null und

$$(10.3) \quad r_0 = \frac{d}{4f} = 0,075$$

variieren, und man hat

$$(10.4) \quad r_0^2 = 0,0056, \quad r_0^3 = 0,00042, \quad r_0^4 = 0,000032 .$$

Mit diesen Zahlen werden wir weiterhin rechnen.

Der Gesichtswinkel eines solchen Instruments kann nicht viel mehr als einen halben Grad betragen. Also wird der Einfallswinkel α , dessen Tangente u ist, höchstens 1000'' gross sein, und man hat daher immer

$$(10.5) \quad u < u_0, \quad u_0 = 0,005, \quad u_0^2 = 0,000025 .$$

Vernachlässigt man in den Formeln (9.7) und (9.10) das letzte Glied, so begeht man einen Fehler, der wegen (9.13) höchstens $6 u_0^3 r_0^2$ bzw. $6 u_0^3 r_0^4$ beträgt.

Anderseits ist die Grössenordnung des Durchmessers des Lichtflecks, auf welchen die Blende abgebildet wird, $3 u_0 r_0^2$; die relative Genauigkeit, die man erhält, wenn man unsere Formeln benutzt, ist also gleich

$$2u_0^2 = 0,00005$$

und für alle praktischen Zwecke weitaus hinreichend.

11. Die Ausdrücke des § 9 sollen jetzt zerlegt werden. Wir setzen

$$(11.1) \quad \xi_{10} = 1, \quad \eta_{10} = 0$$

$$(11.2) \quad \xi_{11} = \frac{2r^2}{1-r^2}, \quad \eta_{11} = 0$$

⁸⁾ W. S. ADAMS, The 200 inch Telescope, Nature, 1939, p. 317. Vgl. auch die ausgezeichnete Beschreibung dieses Teleskops von P. ROUSSEAU, Voici le plus puissant télescope du monde, La Science et la Vie, Nr. 248, Févr. 1938, p. 85.

$$(11.3) \quad \xi_{12} = \frac{(1+r^2)r^2}{1-r^2} \cos 2\vartheta, \quad \eta_{12} = \frac{(1+r^2)r^2}{1-r^2} \sin 2\vartheta$$

$$(11.4) \quad \xi_{21} = -\frac{r(2+5r^2-r^6)}{(1-r^2)^2} \cos \vartheta, \quad \eta_{21} = -\frac{r^3(3+4r^2-r^4)}{(1-r^2)^2} \sin \vartheta$$

$$(11.5) \quad \xi_{22} = -\frac{2r^3(1+2r^2)}{(1-r^2)^2} \cos 2\vartheta \cos \vartheta, \quad \eta_{22} = -\frac{2r^3(1+2r^2)}{(1-r^2)^2} \cos 2\vartheta \sin \vartheta$$

Mit diesen Bezeichnungen hat man

$$(11.6) \quad \begin{cases} \xi = u(\xi_{10} + \xi_{11} + \xi_{12}) + u^2(\xi_{21} + \xi_{22}) \\ \eta = u(\eta_{10} + \eta_{11} + \eta_{12}) + u^2(\eta_{21} + \eta_{22}) \end{cases}$$

Aus den letzten Formeln ersieht man sofort, dass es nicht möglich ist, in den Entwicklungen von ξ und η die linearen Glieder in u von den quadratischen zu trennen und die Formeln noch mehr abzukürzen, als wir es getan haben. Das Verhältnis

$$\frac{u^2(\xi_{21} + \xi_{22})}{u(\xi_{11} + \xi_{12})}$$

ist nämlich von der Grössenordnung

$$(11.7) \quad \frac{u}{r}$$

und kann bei jedem Wert von u beliebig gross werden, wenn nur r hinreichend klein ist. Dies hindert aber nicht die verschiedenen Glieder einzeln zu untersuchen.

12. In der Entwicklung von ξ, η stellt das erste Glied

$$(12.1) \quad u\xi_{10} = u, \quad u\eta_{10} = 0$$

Die Komponenten eines Vektors dar, dessen Länge bei weitem alle übrigen Glieder überwiegt. Wegen $u = \operatorname{tg} \alpha$, stellt also die Abbildung in erster Approximation eine Zentralprojektion der Himmelsgegend, die man photographiert, dar.

Den Maßstab dieser Abbildung erhält man in irgendeiner Längeneinheit, indem man u durch uf ersetzt. Da auf dem Einheitskreis ein Bogen von der Länge Eins 206265'' enthält, ist die Länge des Bildes einer Bogensekunde gleich

$$(12.2) \quad \frac{f}{206265} = 0,000\,004\,848\,f$$

Nach diesen Angaben erhält man auf der Bildplatte des grossen Instruments von Palomar Mountain

$$(12.3) \quad 121'', 9 \text{ pro cm}, \quad 309'', 7 \text{ pro Zoll.}$$

Diese Zahlen bedürfen aber einer Korrektur, weil die Sterne nicht auf Punkte der Bildplatte abgebildet werden. Den Ort des Bildes eines Sternes muss man eben mit dem Schwerpunkt der Lichtverteilung innerhalb des durch die Blende projizierten Lichtflecks zusammenfallen lassen. Bezeichnet man mit m die Gesamtintensität des Lichtes, welches die Blende durchsetzt, so wird also das erwähnte Korrektionsglied durch die Formel

$$\frac{1}{m} \int (\xi - u) dm$$

dargestellt. Setzt man für ξ den Ausdruck (11.6) ein, so erhält man das durch u dividierte Korrektionsglied aus der Gleichung

$$(12.4) \quad \frac{1}{\pi r_0^2} \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \frac{2r^2}{1-r^2} r dr d\vartheta = r_0^2 + \frac{2}{3} r_0^4 + \dots$$

Diese Korrektion hängt also von der Öffnung des Instruments ab. Für die Öffnung 0,3 des grossen Teleskops beträgt sie 0,005646 und an Stelle der Zahlen (12.3) erhält man

$$(12.5) \quad 121'',25 \text{ pro cm, } 308'',0 \text{ pro Zoll.}$$

An der Randzone einer Platte von etwa 15 cm Durchmesser macht das schon einen Unterschied von $0^{\text{mm}}42$ aus.

Diese Zahlen haben aber vorerst nur einen theoretischen Wert. Durch die Silhouettierung der innerhalb des Fernrohrs angebrachten Apparate werden sie ein wenig vergrössert. Andererseits gelten sie nur für Objekte, deren Lichtstärke einen gewissen Betrag übertrifft. Für sehr lichtschwache Objekte wird ein Teil der Spiegeloberfläche nicht gut ausgenutzt (vgl. § 15), und das Korrektionsglied muss verkleinert werden. Dies ist eine altbekannte Erscheinung: PLUMMER hat unter diesem Gesichtspunkt eine (allerdings nicht sehr gute) Platte ausgemessen und eine Diskrepanz zwischen den lichtstarken und lichtschwachen Sternen gefunden⁹⁾. Diese Verschiebung der helleren Sterne gegenüber den schwächeren hängt in besonderem Masse von den chemischen Eigenschaften der Aufnahmeplatte ab. Ist aber das Material bekannt, so geben unsere Formeln immerhin eine Handhabe, um diesen Effekt abzuschätzen.

13. Wir betrachten jetzt die nächsten Glieder unserer Entwicklung. Durch die Gleichungen

⁹⁾ H. C. PLUMMER, On the Images formed by a Parabolic Mirror. 2d Paper. Monthl. Not. of the Roy. Astron. Soc. Vol. 63 (Nov. 1902), p. 16—26.

$$(13.1) \quad \xi_{11} + \xi_{12} = \frac{2r^2}{1-r^2} + \frac{(1+r^2)r^2}{(1-r^2)} \cos 2\vartheta,$$

$$\eta_{11} + \eta_{12} = \frac{(1+r^2)r^2}{(1-r^2)} \sin 2\vartheta$$

wird eine Kreisschar dargestellt, die vom Parameter r abhängt. Die Enveloppe dieser Kreisschar erhält man, indem man in diese Formeln

$$(13.2) \quad \cos 2\vartheta = -\frac{1+2r^2-r^4}{2}, \quad \sin 2\vartheta = \pm \frac{1-r^2}{2} \sqrt{(1+r^2)(3-r^2)}$$

setzt. Sie wird somit durch die Gleichungen

$$\xi_1^* = \frac{r^2(3-r^4)}{2}, \quad \eta_1^* = \pm \frac{r^2(1+r^2)}{2} \sqrt{(1+r^2)(3-r^2)}$$

dargestellt. Hieraus entnimmt man

$$\frac{\eta_1^*}{\xi_1^*} = \pm \frac{(1+r^2)^{\frac{3}{2}}(3-r^2)^{\frac{1}{2}}}{3-r^4} = \frac{\pm 1}{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{4}{3}r^2 + \frac{4}{9}r^4 + \dots \right)$$

Der Parameter r variiert im Intervall

$$0 \leq r \leq r_0$$

und für den Wert (10.3) von r_0 erhält man

$$1 < \sqrt{3} \frac{|\eta_1^*|}{\xi_1^*} \leq 1,0075.$$

Innerhalb dieser Grenzen kann also die Enveloppe unserer Kreise durch zwei Geraden dargestellt werden, welche sich unter 60° schneiden, und wir erhalten die bekannte Erscheinung der Koma (Abb. 2).

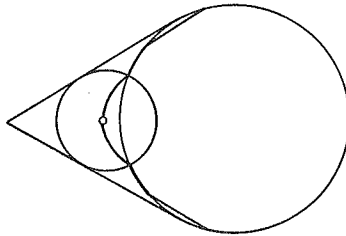


Abb. 2.

14. In den vollständigen Formeln (11.6) kann man die letzten Glieder ξ_{22} und η_{22} , die relativ zu den übrigen sehr klein sind, streichen. Dann wird das Bild eines Kreises der Blende die Projektion einer räumlichen Epizykloide sein. Der aufgesetzte Kreis wird parallel zu sich selbst mitgeführt und die Winkelgeschwindigkeit des Punktes, der die Epizykloide beschreibt, ist die Hälfte der-

jenigen, mit welcher der Mittelpunkt des aufgesetzten Kreises den Kreis (13.1) durchwandert.

Lässt man r variieren, so erhält man eine Schar von geschlossenen Kurven, deren Gestalt sich fortwährend verändert, und die wiederholt gezeichnet worden sind¹⁰⁾. Wir wollen uns mit diesen Dingen nicht weiter beschäftigen, und nur noch einige Bemerkungen über die Ausnutzung der Blende und über die Seidel'sche Theorie machen.

15. Die Abbildung der Blende auf den Lichtfleck der Aufnahmeebene, welcher durch einen Stern hervorgerufen wird, ist ausserordentlich kompliziert. Wir wollen deshalb nur die linearen Glieder in u berücksichtigen und noch ausserdem in (13.1) die vierte Potenz von r vernachlässigen. Ausserdem wollen wir die Bezeichnungen einführen

$$(15.1) \quad \begin{cases} r' = \frac{4f}{d} r, & x' = r' \cos \vartheta, & y' = r' \sin \vartheta, \\ \xi' = \frac{4f}{d^2 u} \xi, & \eta' = \frac{4f}{d^2 u} \eta, \end{cases}$$

und erhalten die Gleichungen

$$(15.2) \quad \begin{cases} \xi' = r'^2(2 + \cos 2\vartheta) = 3x'^2 + y'^2 \\ \eta' = r'^2 \sin 2\vartheta = 2x'y'. \end{cases}$$

Dann wird das Bild der Blende die Gestalt der Abb. 2 annehmen und der äusserste Kreis hat den Radius Eins. Das Innere dieses letzteren Kreises wird von den kleineren Kreisen der Schar einfach überdeckt. Der übrig bleibende Teil der Figur, der ein Kreisbogendreieck bildet, wird dagegen doppelt überdeckt. Ausserdem wird jeder Kreis der Abb. 2 doppelt umschrieben, wenn der Punkt x', y' einen zum Mittelpunkt der Blende konzentrischen Kreis beschreibt, weil zwei zum Mittelpunkt der Blende symmetrische Punkte auf einen und denselben Punkt der Diffraktionsfigur abgebildet werden. Also wird die Oberfläche der Blende in sechs Felder zerlegt werden können, von denen zwei auf das Innere des äussersten Kreises der Abb. 2 und vier auf das Kreisbogendreieck abgebildet werden.

Um diese Felder zu bestimmen, bemerken wir zuerst, dass die gemeinsamen Tangenten der Kreise der Abb. 2 beschrieben

¹⁰⁾ Vgl. die Fig. 4 u. 5 (p. 365) in der angeführten Arbeit von CROQUETT, die Fig. 2 (p. 362) in der unter ⁵⁾ zitierten Arbeit von PLUMMER und ganz besonders die Fig. 29 (p. 59) in der grossen Abhandlung von THIERSCH.

werden, wenn man in (15.2) den Winkel ϑ gleich $\pm 60^\circ$ oder $\pm 120^\circ$ nimmt. Die Punkte des Geradenpaares

$$(15.3) \quad 3x'^2 - y'^2 = 0$$

werden also auf Punkte des Randes der Abb. 2 abgebildet. Setzen wir nun

$$(15.4) \quad x' = \frac{y''}{\sqrt{3}}, \quad y' = \sqrt{3}x''$$

so erhält man aus (15.2)

$$(15.5) \quad \xi' = 3x''^2 + y''^2, \quad \eta' = 2x''y''$$

Hieraus folgt insbesondere, dass der Kreis

$$(15.6) \quad x'^2 + y'^2 = 1$$

und die Ellipse

$$(15.7) \quad 9x'^2 + y'^2 = 3$$

gleichzeitig auf den Rand des äussersten Kreises der Komafigur abgebildet werden.

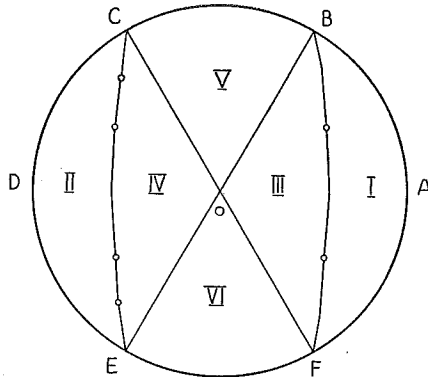


Abb. 3.

Die beiden Bögen FB und CE der Ellipse (15.7) und die beiden Durchmesser EB und CF begrenzen die sechs Felder der Blende, von denen wir gesprochen haben (Abb. 3). Von diesen wird jedes der Gebiete I und II auf das Innere des äussersten Kreises und jedes der Gebiete III bis VI auf das Kreisbogendreieck der Abb. 2 abgebildet. Alle sechs Gebiete besitzen denselben Flächeninhalt, wie man direkt nachrechnen kann, oder auch aus den Eigenschaften der Funktionaldeterminante (16.1) ohne Rechnung erschliesst.

Der Inhalt des äussersten Kreises der Diffraktionsfigur ist aber gleich π , der Inhalt des Kreisbogendreiecks gleich $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$; das Verhältnis dieser beiden Zahlen ist

$$\frac{\pi}{\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}} = 4,5872 \dots$$

Es folgt hieraus, dass für alle Sterne, die auf der ξ -Achse der Aufnahmeplatte abgebildet werden, der mittlere Teil der Blende, welcher zwischen den beiden Ellipsenbögen liegt, im Mittel mehr als vier ein halb Mal besser ausgenutzt wird als der übrige Teil.

Beachtet man, dass für diese Sterne der äusserste Kreis der Komafigur abgeblendet wird, wenn man die Teile I und II des Spiegels verdeckt, so scheint es, dass man die Erscheinung, von der am Ende des § 13 die Rede war, auf folgendem Wege besser beurteilen können, als es PLUMMER mit einer zufälligen Platte getan hat: man nehme dieselbe Gegend des Himmels auf, einmal mit vollem Spiegel, das zweite Mal nach Ablendung der Teile I und II des Spiegels und vergleiche die Verschiebungen, die bei den Sternpositionen durch diese Massnahme entstanden sind.

16. Auch die Isophoten sind bei den letzten vereinfachenden Annahmen sehr leicht zu bestimmen, sowohl auf der Blende als auf der Komafigur. In seiner unter ⁹⁾ zitierten Arbeit, hat PLUMMER diese letzteren Isophoten richtig berechnet, es ist ihm aber entgangen, dass die Gleichung $\varrho^2 \cos 3\varphi = a^2 \cos \varphi$, welche er für diese Kurven gefunden hat, eine Schar von Hyperbeln darstellt, und seine Abb. 2 ist deshalb missglückt.

Aus den Gleichungen (15.2) erhält man nun

$$(16.1) \quad \frac{\partial(\xi', \eta')}{\partial(x', y')} = 4(3x'^2 - y'^2)$$

$$(16.2) \quad (\xi'^2 - 3\eta'^2) = (3x'^2 - y'^2)^2$$

Bezeichnet man also mit i_0 die (gleichförmige) Intensität des auffallenden Lichtes auf der Blende und mit i die entsprechende Zahl für einen Punkt des Lichtflecks, so findet man

$$(16.3) \quad \frac{d^4 u^2}{128 f^2} \cdot \frac{i_0}{i} = |3x'^2 - y'^2| = +\sqrt{\xi'^2 - 3\eta'^2},$$

falls der Punkt x', y' in einem der Felder I und II der Abb. 2 liegt. Der mit Hilfe von (15.5) berechnete Wert von i muss aber verdoppelt werden, falls (x', y') in einem der übrigen vier Felder

enthalten ist. Auf der Komafigur bestehen also die Isophoten, falls sie ganz im äussersten Kreise liegen, aus einem einzigen Hyperbelbogen. Im andern Fall bestehen sie aus einer gebrochenen Linie, welche aus zwei Hyperbelbögen und einem Kreisbogen oder aus drei Hyperbelbögen und zwei Kreisbögen zusammengesetzt ist. Eine dieser Isophoten ist in der Abb. 2 eingezeichnet worden.

17. In der Seidel'schen Theorie werden nur die Fehler dritter Ordnung berücksichtigt. In den Entwicklungen des § 11 müssen wir also nur die Glieder berücksichtigen, welche die Faktoren ur^2 und u^2r enthalten. Wir erhalten auf diese Weise die Formeln

$$(17.1) \quad \begin{cases} \xi = \xi' + \xi'' , & \eta = \eta' + \eta'' \\ \xi' = ur^2(2 + \cos \vartheta) , & \eta' = ur^2 \sin 2\vartheta \\ \xi'' = -u^2r 2 \cos \vartheta , & \eta'' = 0 . \end{cases}$$

Für $\vartheta = 0$ entnehmen wir hieraus die Zahlen

$$(17.2) \quad \xi'_0 = 3ur^2 , \quad \xi''_0 = -2u^2r$$

Diese beiden Zahlen stimmen genau mit den beiden Fehlern dritter Ordnung zusammen, die man aus der Seidel'schen Theorie für den Parabolspiegel berechnet. Die eine stellt die Koma, die andere die Bildwölbung dar; die drei übrigen Fehler dritter Ordnung sind bekanntlich hier gleich Null¹¹⁾. Multipliziert man die aus (17.2) gefundenen Zahlen mit 206 265, um alles in Bogensekunden zu berechnen, so erhält man die Tabelle, die SCHWARZSCHILD auf S. 11 der soeben zitierten Arbeit mit einer völlig verschiedenen Normierung der Einheiten berechnet hat, und alles stimmt bis auf die letzte Dezimale.

¹¹⁾ K. SCHWARZSCHILD. Untersuchungen zur geometrischen Optik II, Theorie der Spiegelteleskope. Astron. Mitt. d. Kgl. Sternw. zu Göttingen, 10ter Theil, 1905, S. 11.