# Über die Axiome des Gruppoids.

Von

H. BRANDT (Halle a. d. Saale).

(Als Manuskript eingegangen am 11. Januar 1940.)

1. Bei der Einführung des Gruppoidbegriffes hatte ich auch ein Axiomensystem angegeben.[1] Dies sollte aber in erster Linie dazu dienen, die Grundeigenschaften dieses Begriffes in übersichtlicher Weise zu beschreiben. Deswegen wurden bei der Formulierung der Axiome auch Eigenschaften, die in offensichtlicher Weise aus den übrigen Axiomen folgten, wenn sie wichtig schienen, trotzdem mit aufgenommen.

Natürlich ist es aber auch wünschenswert, ebenso wie bei der Gruppe irreduzible Axiomensysteme zu besitzen. Bei der Gruppe sind diese von zweierlei Art. Einmal benutzt man ausgezeichnete Elemente wie Einheit und inverses Element zur Charakterisierung, das andere Mal nicht. Als Beispiel für die erste Art kann das im Paskal'schen Repertorium der höheren Mathematik von LOEWY angegebene System dienen.[2] Dagegen sind vollständige irreduzible Systeme der zweiten Art von BAER und LEVI untersucht worden.[3]

2. In Analogie hierzu sollen auch für das Gruppoid irreduzible Axiomensysteme von zwei verschiedenen Arten aufgestellt werden. Einmal werden ausgezeichnete Elemente wie Einheiten und inverse Elemente benutzt, das andere Mal nicht.

Die darüber mitgeteilten Überlegungen sind grösstenteils schon älter und gehen teilweise bis in die Zeit der Entstehung der Gruppoidarbeit zurück. Einige sind 1934 durch Zusammenarbeit im

---

[1]) Mathematische Annalen 96 (1926), S. 360—366.

[2]) E. PASCAL, Repertorium der höheren Mathematik. 2. Auflage (1910) I 1, S. 173.

[3]) Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse 1932, 2. Abhandlung.

Mathematischen Seminar der Universität Halle entstanden, wobei sich Herr WERNER KLEMM mit einer Staatsexamensarbeit sowie Herr Dr. LUDWIG SCHWARZ aus Darmstadt, der damals in Halle Assistent war, erfolgreich beteiligten. Doch habe ich bisher nichts darüber veröffentlicht.

3. Um das Gruppoid zu erklären, gehen wir von einem System $S$ von unterschiedenen Elementen $A, B$.. aus. Die Anzahl kann endlich, abzählbar unendlich oder nicht abzählbar unendlich sein. Ferner ist eine Verknüpfungsoperation gegeben, die aber nicht wie bei der Gruppe unbedingt auf alle Elementenpaare anwendbar ist. Wenn sie auf ein Paar von gleichen oder geordneten verschiedenen Elementen $A, B$ angewandt werden kann und ein Element $C$ liefert, so heisst $A$ mit $B$ komponierbar, und $C$ heisst das komponierte Element oder auch Produkt aus $A$ und $B$ und wird durch $C = AB$ bezeichnet. Im gegenteiligen Fall heisst $A$ mit $B$ nicht komponierbar, und ein Produkt $AB$ existiert nicht.

4. Wir geben noch einige Definitionen:

Wenn eine Gleichung $AB = C$ besteht, so wird $A$ vorderer Quotient aus $C$ und $B$ und $B$ hinterer Quotient aus $C$ und $A$ genannt.

Wenn $A$ und $B$ beide mit einem und demselben Element komponierbar sind, so heissen $A$ und $B$ einander rechts zugehörig.

Wenn ein gewisses Element sowohl mit $A$ wie mit $B$ komponierbar ist, so heissen $A$ und $B$ einander links zugehörig.

Wenn zwei Elemente $A$ und $E$ einer Gleichung $AE = A$ genügen, so heisst $E$ Rechtseinheit von $A$, und wenn eine Gleichung $EA = A$ besteht, so heisst $E$ Linkseinheit von $A$.

Ein Element $E$, welches für irgend ein Element $A$ Rechts- oder Linkseinheit ist, wird auch als Einheit schlechthin bezeichnet.

Wenn für zwei Elemente $A$ und $B$ ein Element $X$ vorhanden ist, so dass die Produkte $AX$ und $XB$ existieren, so heisst $X$ Verbindungselement von $A$ nach $B$.

5. Ehe wir neue Axiome aufstellen, dürfte es zweckmässig sein, die früheren zum Vergleich zu wiederholen:

I. Axiom der Eindeutigkeit des Produktes und beider Quotienten.

Wenn zwischen drei Elementen $A, B, C$ eine Beziehung $AB = C$ besteht, so ist jedes der drei Elemente $A, B, C$ durch die beiden andern eindeutig bestimmt.

II. Assoziativaxiome.

Mit $AB$ und $BC$ existiert auch $(AB)C$ und $A(BC)$, mit $AB$ und $(AB)C$ existiert auch $BC$ und $A(BC)$, mit $BC$ und $A(BC)$ existiert auch $AB$ und $(AB)C$, und jedesmal ist $(AB)C = A(BC)$, so dass man die Klammern fortlassen und einfach $ABC$ schreiben kann.

III. Axiom der Einheiten und des inversen Elementes.

Für irgend ein Element $A$ existieren stets die folgenden eindeutig bestimmten Elemente, die Rechtseinheit $E$, die Linkseinheit $E'$ und das inverse Element $\bar{A}$ derart, dass die Beziehungen bestehen: $AE = A$, $E'A = A$, $\bar{A}A = E$.

IV. Verbindungsaxiom.

Für irgend zwei Einheiten $E, E'$ gibt es stets Elemente $A$, so dass $E$ Rechtseinheit und $E'$ Linkseinheit von $A$ ist.

Nach einer oben angegebenen Ausdrucksweise ist also $A$ Verbindungselement von $E'$ nach $E$.

6. Wir versuchen das Axiomensystem zunächst in der Weise abzuändern, dass wir überall die überflüssigen Bestandteile ausmerzen. Bei I könnte man versuchen, auf die Eindeutigkeit des einen Quotienten zu verzichten. Damit kommt man aber nicht weit, wie das folgende Gegenbeispiel zeigt. Das System $S$ bestehe aus den Elementen $A$ und $B$, und es sollen die Verknüpfungsgesetze

$$AA = AB = A, \; BA = BB = B$$

gelten. Man überzeugt sich leicht, dass alle Axiome I bis IV bis auf die Eindeutigkeit des hinteren Quotienten erfüllt sind.

Dagegen können wir auf die Forderung der Eindeutigkeit des Produktes verzichten. Das bedingt lediglich einige Komplikationen in der Ausdrucksweise. Wir können nicht von dem Wert des Produktes $AB$, sondern höchstens von dem Wertevorrat des Produktes $AB$ sprechen. Gleichheit zweier Produkte kann in dem Sinne verstanden werden, dass eine Bestimmung des ersten Produktes gleich einer Bestimmung des zweiten Produktes ist oder auch in dem Sinne, dass der Wertevorrat des ersten Produktes mit dem Wertevorrat des zweiten Produktes übereinstimmt.

Das abgekürzte Axiom I kann dann so formuliert werden:

I° Axiom der Eindeutigkeit der beiden Quotienten.

Wenn $A$ und $A'$ beide mit $B$ komponierbar sind und eine Bestimmung von $AB$ einer Bestimmung von $A'B$ gleich ist, so ist $A = A'$.

Wenn $A$ sowohl mit $B$ wie mit $B'$ komponierbar ist und eine Bestimmung von $AB$ einer Bestimmung von $AB'$ gleich ist, so ist $B = B'$.

7. Von den drei Assoziativaxiomen wählen wir das erste aus, das den Vorzug hat, symmetrisch zu sein:

II$^c$ Kleines Assoziativaxiom.

Mit $AB$ und $BC$ existieren auch $(AB)C$ und $A(BC)$ und bestimmen denselben Wertevorrat, so dass man die Klammern fortlassen und einfach $ABC$ schreiben kann.

Hieraus schliesst man durch vollständige Induktion:

Wenn bei $n$ Elementen $A_1, A_2, \ldots A_n$ je zwei aufeinander folgende komponierbar sind, so existieren alle Produkte, die man unter Erhaltung der Reihenfolge für beliebige Beklammerungen aus diesen Elementen bilden kann, und bestimmen denselben Wertevorrat, so dass man die Klammern fortlassen und für sämtliche Produkte einfach $A_1 A_2 \ldots A_n$ schreiben kann.

Dagegen kann dieser Schluss vorläufig noch nicht gezogen werden, wenn nur die Existenz des Produktes für eine bestimmte Beklammerung bekannt ist. Dafür ist das ganze Axiom I erforderlich. Es fehlen also die beiden Ergänzungssätze: Mit $AB$ und $(AB)C$ existiert auch $BC$, und mit $BC$ und $A(BC)$ existiert auch $AB$.

Ferner folgt aus I$^\circ$: Das Produkt $A_1 A_2 \ldots A_n$ ändert seinen Wertevorrat oder hört auf zu existieren, wenn ein Faktor geändert wird, die übrigen aber ungeändert bleiben.

8. Das Axiom III enthält drei Existenzforderungen. Verzichtet man auf die Existenz des inversen Elementes, so ergibt sich das symmetrische, aber schwache Axiom:

III$^{\circ\circ}$ Axiom der Existenz der beiden Einheiten.

Für ein beliebiges Element $A$ existieren stets mindestens eine Rechtseinheit $E$ und mindestens eine Linkseinheit $E'$, so dass $AE = E'A = A$.

Natürlich lehrt I$^\circ$, dass $E$ und $E'$ eindeutig sein müssen.

Verzichtet man auf die Existenz der Linkseinheit, so entsteht das etwas stärkere Axiom:

III$^\circ$ Axiom von der Existenz der Rechtseinheit und des inversen Elementes.

Für ein beliebiges Element $A$ existiert mindestens eine Rechtseinheit $E$, so dass $AE = A$, und für ein bestimmtes derartiges Element $E$ mindestens ein inverses Element $\bar{A}$, so dass $\bar{A}A = E$.

Nach I° sind $E$ und $\bar{A}$ eindeutig bestimmt, so dass man von der Rechtseinheit und dem inversen Element sprechen kann.

Aus III° in Verbindung mit II° folgen leicht die folgenden Sätze: Für eine Rechtseinheit $E$ gilt $EE = E$. Wenn umgekehrt $EE = E$ und das Produkt $AE$ existiert, so ist $E$ Rechtseinheit von $A$.

Wenn $P$ mit $A$ komponierbar ist und $A$ die Rechtseinheit $E$ hat, so ist $E$ auch Rechtseinheit von $PA$.

9. Das Axiom IV kann nicht weiter gekürzt werden. Will man mit Rücksicht auf III° den Begriff der Linkseinheit vermeiden, so ist folgende Fassung möglich:

IV° Kleines Verbindungsaxiom.

Für zwei Einheiten $E$ und $E'$ gibt es stets Elemente $A$, für die $E$ Rechtseinheit ist und für die das Produkt $E'A$ existiert.

Wir benutzen später die erweiterte Fassung:

IV* Grosses Verbindungsaxiom.

Wenn $A, B$ zwei beliebige Elemente sind, so gibt es Verbindungselemente $X$, für die $AX$ und $XB$ existieren.

10. Nach diesen Vorbereitungen können wir ein vollständiges und irreduzibles Axiomensystem für das Gruppoid aufstellen:

I° Axiom von der Eindeutigkeit der beiden Quotienten,
II° Kleines Assoziativaxiom,
III° Axiom von der Existenz einer Rechtseinheit und eines inversen Elementes,
IV° Kleines Verbindungsaxiom.

Wir zeigen zunächst, dass das System irreduzibel ist.

Das Beispiel in 6 erfüllt alle Axiome bis auf die Eindeutigkeit des hinteren Quotienten. Es handelt sich hier aber nicht um ein Gruppoid. Nimmt man dagegen die Verknüpfungsrelationen $AA = BA = A$, $AB = BB = B$, so sind alle Axiome bis auf die Eindeutigkeit des vorderen Quotienten erfüllt. Dass das Axiom II° nicht entbehrt werden kann, zeigen bekannte gruppenartige Systeme, welche nicht assoziativ sind. Betrachtet man das System der natürlichen Zahlen multiplikativ verknüpft, so sind alle Axiome erfüllt; nur fehlt das inverse Element. Das Axiom III° kann also nicht entbehrt werden. Die Notwendigkeit von IV° zeigt das System aus zwei Elementen $E$ und $E'$ mit den Relationen $EE = E$ und $E'E' = E'$, während die Produkte $EE'$ und $E'E$ nicht existieren.

11. Wir haben dann den Nachweis zu führen, dass das System vollständig ist. Dazu genügt es zu zeigen, dass auch die früheren Axiome I, II, III, IV erfüllt sind.

Wir beweisen zunächst die eine Ergänzung des Assoziativaxioms: Mit $AB$ und $(AB)C$ existiert auch $BC$.

Die Rechtseinheit $E'$ von $B$ ist nach 8 auch Rechtseinheit von $AB = D$, ist $\bar{D}$ das inverse Element von $D$, so gilt also $\bar{D}D = E'$. Mit $\bar{D}D$ und $DC$ existiert nach II° auch $(\bar{D}D)C = E'C$, und mit $BE'$ und $E'C$ existiert auch $(BE')C = BC$.

Die zweite Ergänzung des Assoziativaxioms ergibt sich später.

12. Wir beweisen weiter die Existenz der Linkseinheit.

Ist $A$ beliebig und $\bar{A}$ das inverse Element, so sei $E'$ die Rechtseinheit von $\bar{A}$, so dass $\bar{A}E' = \bar{A}$. Mit $\bar{A}E'$ und $(\bar{A}E')A$ existiert nach 11 auch $E'A$. Es ist aber $\bar{A}(E'A) = (\bar{A}E')A = \bar{A}A$ und ein Vergleich des ersten und letzten Produktes ergibt wegen der Eindeutigkeit des hinteren Quotienten $E'A = A$, d. h. $E'$ ist Linkseinheit von $A$, zugleich lehrt I°, dass die Linkseinheit eindeutig bestimmt sein muss.

Ist $\bar{\bar{A}}$ das inverse Element von $\bar{A}$, so gilt nach III° $\bar{\bar{A}}\bar{A} = E'$. Mit $\bar{\bar{A}}\bar{A}$ und $\bar{A}A$ existiert nach II° auch $(\bar{\bar{A}}\bar{A})A = \bar{\bar{A}}(\bar{A}A)$. Das erste Produkt ist $E'A = A$, das zweite $\bar{\bar{A}}E = \bar{\bar{A}}$ (nach 8). Somit ist $A$ das inverse Element von $\bar{A}$, daher ist auch die Rechtseinheit von $A$ Linkseinheit von $\bar{A}$. Beim Übergang zum inversen Element vertauschen sich also Rechts- und Linkseinheit.

Analog wie für Rechtseinheiten in 8 ergeben sich jetzt für Linkseinheiten entsprechende Sätze: Für eine Linkseinheit $E'$ gilt $E'E' = E'$. Wenn umgekehrt $E'E' = E'$ und das Produkt $E'A$ existiert, so ist $E'$ Linkseinheit von $A$. Wenn $E'$ Linkseinheit von $A$ und $A$ mit $Q$ komponierbar, so ist $E'$ auch Linkseinheit von $AQ$.

13. Nachdem jetzt das Axiom III und die Folgerungen daraus bewiesen sind, erweist sich IV° als gleichwertig mit IV. Ferner gilt der Hauptsatz: Ein Produkt $AB$ existiert dann und nur dann, wenn die Rechtseinheit von $A$ mit der Linkseinheit von $B$ übereinstimmt.

Setzt man $AB = C$ und multipliziert links mit $\bar{A}$, so erhält man $(\bar{A}A)B = B = \bar{A}C$. In dieser Gleichung ist $C$ als hinterer Quotient eindeutig, also auch in der Gleichung $AB = C$.

Damit ist auch I vollständig bewiesen.

Es fehlt noch die zweite Ergänzung zum Assoziativaxiom: Mit $BC$ und $A(BC)$ existiert auch $AB$.

Die Linkseinheit $E$ von $B$ ist auch Linkseinheit von $BC = D$. Ist $\bar{D}$ das inverse Element, so gilt $D\bar{D} = E$. Mit $AD$ und $D\bar{D}$ existiert nach II° auch $A(D\bar{D}) = AE$, daher ist $E$ Rechtseinheit von $A$, und weil $E$ auch Linkseinheit von $B$ ist, so existiert das Produkt $AB$.

Damit sind aber alle Axiome I, II, III, IV hergeleitet.

14. Wenn die Anzahl der nach IV° vorhandenen Verbindungselemente für ein bestimmtes Einheitenpaar endlich ist (im besonderen also für endliche Systeme), so kann das Axiom III° durch III°° ersetzt werden, so dass das Verbindungsaxiom die ursprüngliche Fassung IV behalten kann. Das Axiomensystem I°, II°, III°°, IV ist aber ohne diese Zusatzbedingung nicht brauchbar. Das zeigt das Beispiel der natürlichen Zahlen bei multiplikativer Verknüpfung, wobei diese Axiome ebenfalls erfüllt sind, ohne dass ein Gruppoid vorliegt. Damit ist bewiesen, was schon oben behauptet wurde, dass III°° schwächer ist als III°.

Aus diesem Axiomensystem folgt zunächst, dass ein Produkt $AB$ existiert, wenn die Rechtseinheit von $A$ mit der Linkseinheit von $B$ übereinstimmt. Man braucht nur II° auf die Produkte $AE = A$ und $EB = B$ anzuwenden.

15. Wir können jetzt den Satz beweisen: Wenn die Anzahl der Verbindungselemente für zwei Einheiten endlich ist, so ist sie auch für jedes andere Paar von Einheiten endlich und ebenso gross.

Wir beweisen gleich den allgemeineren Satz:

Ist die Anzahl der Verbindungselemente für ein Elementenpaar endlich, so ist sie auch für jedes Elementenpaar endlich und ebenso gross.

Wir bezeichnen die Verbindungselemente von $A$ nach $B$ unbestimmt durch $X$ und nehmen an, dass ihre Anzahl endlich sei. Ferner seien $Y$ die Verbindungselemente von $C$ nach $D$, und ihre Anzahl sei grösser als die der $X$. Ist dann $P$ ein Verbindungselement von $A$ nach $C$ und $Q$ ein Verbindungselement von $D$ nach $B$, so existiert das Produkt $PCYDQ$ und hat für verschiedene $Y$ verschiedene Werte (vergl. 7). Andererseits liefert jedes dieser Produkte ein Verbindungselement von $A$ nach $B$, womit der Widerspruch hergeleitet ist.

Wir können jetzt leicht zeigen, dass III° erfüllt ist. Das beliebige Element $A$ habe die Rechtseinheit $E$ und die Linkseinheit $E'$, ferner durchlaufe $X$ die sämtlichen Verbindungselemente von

$E$ nach $E'$. Jedes Element $X$ ist dann mit $A$ komponierbar, die Produkte $XA$ sind aber sämtlich verschieden nach I° und verbinden $E$ mit $E$. Zu diesen Elementen gehört aber $E$ selbst. Es gibt somit ein Element $X = \bar{A}$, so dass $\bar{A}A = E$.

16. Es sollen jetzt Axiomensysteme betrachtet werden, in denen keine ausgezeichneten Elemente vorkommen. Die Axiome I° und II°, die sich als genügend stark erwiesen haben, sind dazu schon brauchbar. Dazu nehmen wir das grosse Verbindungsaxiom IV*. Damit kommen wir bereits aus, wenn die Verbindungselemente für ein Elementenpaar nur in endlicher Anzahl vorhanden sind, ohne diese Annahme allerdings nicht, wie wiederum das Beispiel der natürlichen Zahlen bei multiplikativer Verknüpfung zeigt.

Es sei $A$ ein beliebiges Element, und $X$ durchlaufe die endliche Zahl der Verbindungselemente von $A$ nach $A$. Dann sind die Produkte $AX$ untereinander komponierbar und reproduzieren sich durch Komposition. Mit $AX_1$, $X_1A$, $AX_2$ existiert nämlich nach 7 auch $AX_1AX_2 = AX_3$, wenn $X_3 = X_1AX_2$ gesetzt wird, und mit $X_2A$ existiert auch $X_3A$, so dass $X_3$ wieder Verbindungselement ist. Die Produkte $AX$ bilden dann eine Gruppe; denn das Produkt existiert, die Quotienten sind eindeutig, und das assoziative Gesetz ist erfüllt. Ist $AX_0$ das Einheitselement der Gruppe, so hat man $AX_0AX = AX$, somit nach I° auch $AX_0A = A$, daher ist $E = X_0A$ Rechtseinheit und $E' = AX_0$ Linkseinheit von $A$.

Damit ist dies Axiomensystem auf das in 13 betrachtete zurückgeführt. Das Axiomensystem I°, II°, IV* ist also vollständig, wenn die nach IV* geforderten Verbindungselemente in einem Fall endliche Anzahl haben.

17. Um ein allgemeines vollständiges System zu bekommen, fügen wir das Axiom von der Existenz des vorderen Quotienten hinzu:

III* Für rechts zugehörige Elemente existiert ein vorderer Quotient.

Dieser Quotient ist natürlich nach I° eindeutig. Ist $A$ ein beliebiges Element, so liefert das Axiom zunächst die Existenz der Linkseinheit $E'$. Ist $V$ ein nach IV vorhandenes Element, für das $AV$ existiert, so sei $E$ die Linkseinheit von $V$. $A$ und $E$ sind rechts einander zugehörig, also gibt es ein $A'$, so dass $A = A'E$. Mit $A'E$ und $EV$ existiert nach II° $A'EV = AV = A'V$, daher ist nach I° $A' = A$ und $E$ Rechtseinheit von $A$. Aus der rechtsseitigen Zugehörigkeit von $A$ und $E$ ergibt sich dann weiter die Existenz eines Elementes $\bar{A}$, für das $\bar{A}A = E$, somit die Existenz des inversen Elementes.

Daher ist das Axiomensystem auf das unter 10 betrachtete zurückgeführt, es gilt nämlich III°, und IV* umfasst IV°.

18. Dies Axiomensystem hat den Nachteil, dass das Axiom III* unsymmetrisch ist. Ich gebe daher noch ein anderes System, das von diesem Nachteil frei ist:

I°° Axiom von der Eindeutigkeit des Produktes.

Wenn $A$ mit $B$ komponierbar, ist das Produkt $AB = C$ eindeutig bestimmt.

II° Kleines Assoziativaxiom.

III** Axiom von der Existenz der beiden Quotienten.

Für rechts zugehörige Elemente existiert der vordere, für links zugehörige der hintere Quotient.

IV* Grosses Verbindungsaxiom.

Dies System ist zunächst irreduzibel. Dass I°° nicht entbehrt werden kann, zeigt das aus zwei Elementen $A$ und $B$ bestehende System, bei dem alle Produkte möglich sind und sowohl $A$ wie $B$ geben. Dann sind alle Axiome erfüllt bis auf I°.

Dass das Assoziativaxiom ebenso wie das Verbindungsaxiom nicht entbehrt werden kann, lässt sich in derselben Weise zeigen, wie das für das frühere Axiomensystem (10) geschehen ist.

III** besteht aus zwei unabhängigen Axiomen. Das System aus den Elementen $A$ und $B$ mit den Verknüpfungsgesetzen $AA = AB = A$ und $BA = BB = B$ erfüllt alle Axiome bis auf die Existenz des hinteren Quotienten; in der Tat gibt es einen solchen Quotienten für die links zugehörigen Elemente $A$, $B$ nicht.

19. Wir beweisen jetzt, dass das System vollständig ist. Das geschieht dadurch, dass wir es auf das frühere unter 10 betrachtete zurückführen.

Aus III** folgt, dass jedes Element $A$ wenigstens eine Rechtseinheit $E$ hat. Nach IV* gibt es ein Element $B$, so dass $EB$ existiert. Nach II° existiert dann auch $AEB = AB$. Also sind $E$ und $A$ einander rechts zugehörig, es gibt dann nach III** ein Element $\bar{A}$, so dass $\bar{A}A = E$, d. h. ein inverses Element existiert. Es ist also das Axiom III° erfüllt. Mit $\bar{A}A$ und $AE$ existiert nach II° das Produkt $\bar{A}AE$, dessen Ausrechnung $EE = E$ gibt. Wenn das Produkt $AB$ existiert und $E$ Rechtseinheit von $A$, so dass $\bar{A}A = E$, so existiert auch $\bar{A}AB = EB$. Die Produkte $EB$ und $EE$

zeigen, dass $E$ und $B$ einander links zugehören. Nach III** gibt es ein $B'$, so dass $B = EB'$. Dann existiert $EEB'$ und die Ausrechnung gibt einmal $EB' = B$, das andere Mal $EB$, daher ist $E$ Linkseinheit von $B$.

Es sei jetzt $AB = C$ und $E$ wie vorhin Rechtseinheit von $A$ und Linkseinheit von $B$, ferner $\bar{A}$ das inverse Element von $A$. Dann existiert das Produkt $\bar{A}AB$, dessen Ausrechnung einmal $EB = B$, zum andern $\bar{A}C$ ergibt. Die Gleichung $B = \bar{A}C$ zeigt aber, dass $B$ der hintere Quotient aus $C$ und $A$ eindeutig ist. Ebenso beweist man die Eindeutigkeit des vorderen Quotienten. Daher gilt I°, IV* umfasst aber IV°.

Damit sind wir auf das frühere Axiomensystem zurückgekommen.