Sur l'identification des potentiels.

Par

R. WAVRE (Genève).

(Als Manuskript eingegangen am 11. Januar 1940.)

Ce petit article est un développement d'une note présentée en 1937 à la réunion de la Société Mathématique Suisse et publiée dans le Tome XXXVI, page 392 de L'Enseignement mathématique. Nous donnons les démonstrations des résultats annoncés dans cette note et une généralisation du théorème que nous y formulions.

Je suis heureux de pouvoir dédier cette modeste recherche à mon cher et vénéré collègue, le Professeur R. FUETER.

Les potentiels classiques de volume ou de surface (simple et double couches), ou dans le cas du plan, les potentiels logarithmiques, engendrent en général plusieurs fonctions analytiques distinctes suivant les régions où se trouve le point argument; par exemple: $\frac{m}{a}$ et $\frac{m}{r}$ pour une surface sphérique homogène de rayon a et de masse totale m suivant que ce point est intérieur ou extérieur à la sphère en question. Un cube homogène plein créera également deux fonctions analytiques distinctes dont l'une coincide avec le potentiel à l'intérieur du cube, l'autre avec le potentiel à l'extérieur du cube. Ces fonctions analytiques ont certaines singularités, certains domaines de WEIERSTRASS qui, même dans l'espace réel, peuvent déborder les domaines où ces fonctions coincident avec le potentiel. Pour le cube, les fonctions en question se ramifient autour des arêtes et n'ont pas d'autre singularité à distance finie.

Nous appellerons fonctions potentielles ces fonctions analytiques dont un élément coincide avec un potentiel dans une région du plan ou de l'espace. Toute fonction harmonique est une fonction potentielle, puisqu'on peut l'engendrer par des potentiels de simple ou de double couche. Le sens des mots fonction potentielle est donc ici plus général que celui de fonction harmonique.

Il est clair que la méthode du balayage permet d'engendrer la même fonction potentielle au moyen de répartitions différentes de matières. Si je balaie à la manière de POINCARÉ une ellipse pleine homogène, en envoyant toute la masse sur la frontière, j'ai une nouvelle distribution de la matière qui crée le même potentiel, qui engendre donc la même fonction potentielle à l'extérieur, c'est-à-dire dans le domaine connexe du point à l'infini.

Pour toute une catégorie de corps que nous appellerons des corps analytiques, ou distributions analytiques de matières, il est facile de mettre en évidence par la résolution de problèmes de CAUCHY-KOWALEWSKA les singularités des fonctions potentielles crées par ces corps. Dans bien des cas, c'est même plus simple que de calculer le potentiel lui-même, c'est-à-dire de le représenter par des expressions analytiques débarrassées des intégrales primitives ou de toute autre équivalente. Il en est ainsi notamment pour les corps homogènes les plus simples, un segment de droite, une hémisphère, un tétraèdre, etc. Nous nous posons alors la question suivante: quand deux corps analytiques engendrent-ils une même fonction potentielle? et nous y répondrons par un théorème où intervient uniquement l'identification des singularités des solutions du problème de CAUCHY. La «soustraction» des deux corps engendrera une fonction identiquement nulle, d'où la nécessité de rappeler dans un lemme une propriété fondamentale pour la suite sur les corps engendrant une fonction potentielle identiquement nulle.

Lemme I. Considérons une répartition de masses tout entières à distance finie, donc intérieures à une sphère de rayon suffisamment grand, et soit Ψ la fonction potentielle engendrée par cette distribution dans le domaine connexe du point à l'infini. Si la fonction Ψ n'a pas de singularité à distance finie, elle est identiquement nulle.

En effet, Ψ est alors harmonique dans tout l'espace et nulle à l'infini, donc identiquement nulle. Dans le cas du plan et du potentiel logarithmique, cette proposition est moins immédiate, car un potentiel logarithmique a en général une singularité à l'infini. Son développement en coordonnées polaires est à grande distance (r suffisamment grand)

$$\Psi = m \log r + \frac{A_1(\Theta)}{r} + \frac{A_2(\Theta)}{r^2} + \cdots .$$

Si m n'était pas nul $|\Psi|$ prendrait des valeurs qui tendent uniformément vers l'infini avec r et, s'il n'y a pas de singularité à distance finie, la fonction serait elle-même infinie partout, en vertu du théorème de la moyenne. La disparition des singularités à distance finie entraîne pour un tel potentiel logarithmique la disparition de la singularité à l'infini. L'on devrait avoir $m=0$ et alors Ψ qui est nul à l'infini est encore identiquement nul.

Lemme II. Une fonction harmonique, uniforme et bornée dans un domaine, sauf peut-être en les points d'un ensemble de capacité nulle, entièrement intérieur au domaine est encore holomorphe sur cet ensemble, qui ne contient donc aucune singularité de la fonction.

Qu'importe ici pour l'usage que nous en ferons, la définition exacte de la capacité; il nous suffit de dire qu'un nombre fini de points du plan ou un nombre fini d'arcs analytiques dans l'espace forment un ensemble de capacité nulle. Il est au contraire à remarquer que la condition que la fonction soit uniforme est essentielle puisque l'on connaît des fonctions harmoniques qui se ramifient autour d'une droite, comme le fait dans le plan la partie réelle de la fonction $\sqrt{z}$.

Lemme III. Soient S une surface analytique et régulière et P un point de S. Supposons que d'un côté V de S, au voisinage de P soit répartie une matière d'une densité ϱ qui est une fonction holomorphe en P, tandis que l'autre côté est libre de matières. Supposons en plus que soient données deux fonctions f et g sur S holomorphes en P, c'est-à-dire développables suivant les puissances des deux paramètres u et v de S. Alors les deux fonctions potentielles engendrées de part et d'autre de S par le potentiel total

$$U=\iiint\frac{\varrho}{r}dV+\iint\frac{g}{r}dS+\iint p\frac{d\frac{1}{r}}{dn}dS$$

sont prolongeables au travers de S par un chemin passant en P, que l'on parte de la région vide ou de la région pleine de la densité ϱ. Partant de M et allant au travers de S jusqu'en M' de l'autre côté, le prolongement de U que nous noterons $U_{MM'}$ donnera lieu à la relation suivante

$$U_{MM'}=U(M')\pm p(M');$$

le signe $+$ si l'on est entré dans la matière ϱ, le signe $-$ si l'on en est sorti.

La fonction p dite fonction de passage est la solution du problème de CAUCHY-KOWALEWSKA suivant

$$\triangle p = 4\pi\varrho \quad \text{dans le voisinage de } P$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp}{dn} &= 4\pi g \\ p &= -4\pi f \end{aligned}\right\} \text{ sur } S, \text{ la normale étant dirigée vers la matière } \varrho.$$

Deux des fonctions ϱ, f, g peuvent fort bien être identiquement nulles et dans ce cas l'on retrouve les potentiels classiques de volume et de surface. Ces résultats s'étendent au potentiel logarithmique en remplaçant 4π par 2π. En plus, il faut rappeler qu'un potentiel de volume est holomorphe en tout point où la densité est elle-même holomorphe. Ces résultats ont déjà été utilisés dans différents mémoires de BRUNS et de MM. HADAMARD et E. SCHMIDT, qui ont mis en évidence la possibilité de prolonger analytiquement certaines fonctions potentielles.

L e s c o r p s a n a l y t i q u e s. Envisageons un ensemble d'un nombre infini de surfaces analytiques et régulières, ouvertes ou fermées, chargées de dentités de simple et de double couches g et f, holomorphes en tous points de la surface, la frontière pouvant être exclue, ces fonctions étant alors bornées sur la surface entière. Soient également des volumes limités par un nombre fini de surfaces analytiques et régulières, remplis de densité ϱ holomorphe dans ces volumes, faces comprises, arêtes éventuellement exclues mais bornée dans le volume entier. Nous appellerons de telles distributions de matières des corps analytiques. Les mêmes définitions s'appliqueraient dans le cas du plan à des arcs de courbes analytiques et à des aires limités par de tels arcs. Nous supposerons ces corps tout entier à distance finie et pourrons former sur eux une somme de potentiels analogues au potentiel U de tout à l'heure. Mais en attendant, disons pour fixer les idées qu'un corps analytique sera obtenu en faisant par exemple sur un domaine contenant des polyèdres une substitution analytique

$$\begin{aligned} x &= f(x, y, z) \\ y &= \varphi(x, y, z) \\ z &= \psi(x, y, z) \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \frac{D(f, \varphi, \psi)}{D(x, y, z)} \neq 0$$

(Transformations topologiques mais avec des fonctions f, φ, ψ holomorphes).

Les densités réparties sur les faces ou dans les volumes prennent les mêmes valeurs aux points correspondants.

Soient alors $S_1, S_2, \ldots, S_n$ les différentes surfaces analytiques qui portent ou limitent la matière attirante. Chacune donnera lieu à une fonction de passage: $p_1, p_2, \cdots$.

Le potentiel pris en M et prolongé jusqu'en M_1 au travers de S_1 donnera

$$U_{MM_1} = U(M_1) + p_1(M_1)$$

Si la fonction p_1 n'a pas de singularité sur un chemin qui va de M_1 au travers de S_2 l'on aura, en continuant le prolongement de la fonction potentielle jusqu'en un point M_2 de l'autre côté de S_2

$$U_{MM_1M_2} = U(M_2) + p_1(M_2) + p_2(M_2)$$

et ainsi de suite, en traversant un nombre quelconque de surfaces. Pour franchir S_3, il suffit que $p_1 + p_2$ n'ait aucune singularité sur le chemin choisi aboutissant à un point de S_3. La fonction U en tant que potentiel d'un corps analytique, est toujours prolongeable au travers des surfaces S en les points non situés sur les frontières ou arêtes.

Si l'on revient au point de départ après avoir traversé i faces, on aura

$$U_{MM_1 \ldots M} = U(M) + p_1(M) + \cdots + p_i(M),$$

et l'on ne retrouvera la branche initiale, le potentiel lui-même, que si la somme des fonctions de passage est identiquement nulle. C'est de cette propriété que l'on déduit le caractère multiforme des potentiels des corps analytiques. Les frontières des surfaces ou les arêtes sont des lignes de ramification. Ces résultats concernant les corps analytiques sont des extensions données à des propositions connues de WEIERSTRASS, comme en témoigne un travail de STAHL. Ces extensions sont développées dans différents articles[1]).

Théorème. Soient F une famille de corps analytiques tout entière à distance finie et $p_1, p_2 \ldots p_n$ les fonctions de passage relatives aux surfaces de la famille.

Pour que la fonction potentielle Ψ engendrée par le potentiel de F dans le domaine D connexe du point à l'infini, soit identiquement nulle, il faut et il suffit que les sommes des fonctions de passage

$$(1) \qquad p_1, p_1 + p_2, \quad p_1 + p_2 + p_3, \quad p_1 + \cdots + p_l;$$

relatives à tout chemin issu de ce domaine soient holomorphes dans les domaines correspondants situés entre les faces et sur ces faces elles-mêmes, (arêtes et frontières éventuellement exclues) et

[1]) L'exposé le plus général est contenu dans: Prace Matematyczno-Fizyczne, pp. 75—89. R. WAVRE: Sur les polydromies des potentiels newtoniens prolongés, dans l'espace réel à n dimensions.

bornées dans ces domaines et que de plus revenu dans D l'on ait pour tout circuit

(2) $$p_1+p_2+\cdots+p_i=0.$$

Ce théorème s'étend au potentiel logarithmique en remplaçant face par ligne et arête par point.

Démonstration. La condition est nécessaire. Si en effet le potentiel est identiquement nul, il est prolongeable dans tout l'espace et l'on a

$$0\equiv U+p_1+\cdots+p_l,$$

après avoir traversé l faces. Or U est holomorphe et borné dans chaque domaine limité aux S et prolongeable au travers des faces. Donc la somme $p_1+\cdots p_l$ jouit de la même propriété. En plus, revenu dans D, on aura bien $p_1+\cdots+p_l=0$ puisque U y est identiquement nul.

La condition est suffisante. L'on peut écrire

$$\Psi=U+p_1+\cdots+p_l.$$

Or U et $p_1+\cdots p_l$ n'ont pas de singularité dans les domaines limités aux faces S sauf frontières ou arêtes. Imaginons alors un circuit partant de D et y revenant. L'on aura en vertu de (2)

$$\Psi \text{ au départ} \equiv \Psi \text{ arrivée.}$$

En particulier un lacet décrit autour d'une arête ou d'une frontière ramène la fonction à sa valeur initiale. La fonction Ψ est donc uniforme au voisinage de chaque arête, de chaque frontière. Elle est bornée et harmonique au voisinage de ces lignes. En vertu du lemme II, elle est harmonique dans tout l'espace, car les arêtes ou les frontières forment un ensemble de capacité nulle. La fonction Ψ n'aurait aucune singularité à distance finie, elle serait identiquement nulle en vertu du lemme I.

Il est maintenant évident que l'identification de deux fonctions potentielles se fera en démontrant que les deux familles de corps soustraites engendrent une fonction potentielle identiquement nulle.

Voici enfin un théorème général aidant à reconnaître si une fonction analytique est un potentiel engendré par une famille de corps donnés.

Pour qu'une fonction holomorphe Φ dans un domaine D soit le potentiel dans D d'une famille C de corps analytiques, il faut et il suffit:

1. que l'on ait

$$\Delta\,\Phi=-4\pi \text{ fois densité de } C \text{ dans } D.$$

2. que

$$\Phi - p_1 - \cdots - p_l$$

soit holomorphe dans le donnaine D_l où l'on est parvenu en traversant les surfaces $S_1 \ldots S_l$.

3. que

$$\Phi - p_1 - \cdots - p_i \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{(espace)} \\ m \log r & \text{(plan)} \end{cases}$$

lorsque le point argument tend vers l'infini (après avoir traversé les surfaces $S_1 \ldots S_i$).

4. que l'on ait

$$(\Phi - p_1 - \cdots - p_k)\ \text{arrivée} = \Phi\ \text{départ}$$

après un circuit fermé traversant $S_1 \ldots S_k$ et revenant en D. En effet, en vertu des lemmes précédents la différence entre Φ et le potentiel sera une fonction harmonique dans tout l'espace et nulle à l'infini.

Ces propriétés de Φ sont donc caractéristiques de la fonction potentielle crée par C.

Applications. En appliquant cette méthode, un de nos élèves, M. G. BILGER, est parvenu à démontrer que les polygones homogènes inscrits réguliers créent le même potentiel que l'un quelconque de leurs étoilés, dans le domaine extérieur au polygone convexe.

L'icosaèdre crée aussi le même potentiel à l'extérieur que l'étoilé ayant mêmes arêtes. Qu'il s'agisse d'ailleurs de lignes, d'aires, de surfaces ou de volume. La démonstration relève de la géométrie élémentaire, car les fonctions de passage au travers de droites ou de plans homogènes sont proportionnels à la distance à ces corps et à la densité; l'entrée dans une matière homogène au travers d'une droite ou d'un plan donne des fonctions de passage proportionnelles à la densité et au carré de la distance au corps traversé. Ces fonctions n'ayant aucune singularité à distance finie, il suffit de montrer qu'au voisinage de chaque sommet ou de chaque arête pour les deux corps soustraits C et C' la somme des fonctions de passage est la même $p_1 + p_2 = p_1' + p_2'$ ou encore $p_1 + p_2 - p_1' - p_2' = 0$ (pour nous conformer aux équations précédentes) ce qui est une simple question de géométrie relative aux distances aux côtés ou faces des figures envisagées.

Remarque. Les densités du balayage sont univoquement déterminées dans des circonstances très générales. Donc, la densité obtenue en balayant un polygone régulier étoilé sur le polygone convexe sera constante sur celui-ci si elle l'était sur celui-là. Même remarque à propos de l'icosaèdre.

La méthode développée ici pour déterminer les corps de même attraction a ceci d'intéressant c'est qu'elle ne se fonde que sur les singularités des potentiels par l'examen des fonctions de passage, solution du problème de Cauchy-Kovalewska. On voit l'utilité de ce dernier problème en théorie du potentiel. En général il n'y est pas invoqué, le rôle fondamental revenant aux problèmes de Dirichlet et de Neumann ou à leurs transformés.