# Über die Darstellung der Determinante einer positiven quadratischen Form durch die Form.

Von

E. HECKE (Hamburg).

(Als Manuskript eingegangen am 9. Januar 1940.)

Es sei

$$Q(x) = Q(x_1, \ldots x_f) = b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + \ldots = \sum_{1 \leqq r \leqq s \leqq f} b_{rs}x_rx_s$$

eine positive quadratische Form von einer geraden Zahl $f = 2k$ von Variabeln mit ganzen rationalen Koeffizienten $b_{rs}$. Das Doppelte dieser Form hat eine ganzzahlige symmetrische Matrix $A = (a_{rs})$ mit den Elementen

$$a_{rr} = 2b_{rr}, \quad a_{rs} = a_{sr} = b_{rs}\,(r < s),$$

und die Zahl

$$\varDelta = (-1)^k \cdot \mathrm{Det.}(a_{rs})$$

wird die Diskriminante der Form $Q$ genannt. Es ist dann stets

$$\varDelta \equiv 0 \text{ oder } 1 \pmod 4$$

Wir betrachten hier speziell den Fall, dass $|\varDelta|$ eine ungerade Primzahl $q$ ist, also

(1) $$q \equiv (-1)^k \pmod 4.$$

Die Gesetze für diese Form $Q$, insbesondere über die Anzahl der Darstellungen einer natürlichen Zahl $n$ durch diese Form, d. h. über die Anzahl $a(n,Q)$ der Lösungen von

$$n = Q(x_1, \ldots x_f)$$

in ganzen rationalen $x_1, \ldots x_f$ haben in den funktionalen Eigenschaften der zugehörigen Potenzreihe

$$F(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n,Q)\,e^{2\pi i n\tau} = \sum_{n_1,\ldots n_f} e^{2\pi i \tau Q(n_1,\ldots n_f)}$$

ihr Spiegelbild. Diese Reihe ist in der oberen Halbebene der komplexen Variabeln $\tau$ konvergent und stellt hier eine Modulfunktion dar, welche folgende Invarianzeigenschaft[1]) hat: Für jede Modulsubstitution $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $c \equiv 0 \pmod{q}$ ist.

$$F\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = \chi(d) \cdot (c\tau + d)^k \cdot F(\tau) \tag{2}$$

Dabei bedeutet $\chi(n)$ den quadratischen Restcharakter $\chi(n) = \left(\frac{n}{q}\right)$ Dieselbe Funktionalgleichung gilt auch für die Potenzreihe, welche anstatt mit $Q$ mit der adjungierten Form $Q^* = \frac{1}{2} \sum\limits_{r,s=1}^{f} A_{rs} x_r x_s$ gebildet wird, wo $A_{rs}$ die Unterdeterminanten der Matrix $(a_{rs})$ sind. Eine Funktion $F(\tau)$ mit dieser Eigenschaft (2), die überdies in den rationalen Punkten die übliche Regularitäts-Eigenschaft hat, heisse «vom reellen Nebentypus» der Stufe $q$ und der Dimension $-k$. Wegen dieser Invarianz-Eigenschaft lässt sich meine Theorie der Operatoren $T_m^q$ für die Stufe $q$ auf die genannten Thetareihen anwenden. Es zeigt sich, dass für die Anzahlen $a(n, Q)$ ein Multiplikations-Theorem besteht, welches sich durch folgende Eigenschaften der zu $Q$ gehörigen Dirichlet-Reihe aussprechen lässt:

Hauptsatz: Die Dirichlet-Reihe

$$\varphi(s, Q) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n, Q) \cdot n^{-s}$$

ist als lineare Kombination von eindeutig bestimmten kanonischen Euler-Produkten darstellbar.

Dabei nenne ich hier «kanonisches Euler-Produkt» eine Dirichlet-Reihe mit der Produkt-Entwicklung

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{-s} = \prod_p (1 - c_p p^{-s} + \chi(p) p^{k-1-2s})^{-1} \tag{3}$$

($p$ durchläuft die rationalen Primzahlen), wenn überdies mit passendem konstantem $c_0$ die Potenzreihe $c_0 + \sum c_n e^{2\pi i n\tau}$ eine Modulfunktion mit der Eigenschaft (2) ist. Die genaue Anzahl aller verschiedenen (d. h. auch aller linear unabhängigen) kanonischen Euler-Produkte mit demselben $k, q$ ist mit den Mitteln der Funk-

[1]) B. SCHOENEBERG. Das Verhalten von mehrfachen Thetareihen bei Modulsubstitutionen. Mathem. Annalen 116 (1939), S. 511; man beachte die Berichtigung auf S. 780.

tionentheorie [2]) bestimmt worden, wenn $k \geqq 2$; es sei hier nur erwähnt, dass diese Anzahl $Y$ gleich

$$Y = (k-1)\frac{q}{12} + \delta(q, k),$$

wo $\delta(q,k)$ bei festem $k$ mit $q \to \infty$ beschränkt bleibt.

Der Hauptsatz folgt unmittelbar aus meiner allgemeinen Theorie [3]) der Operatoren $T_m^q$ in Verbindung mit dem Fundamentalsatz von Herrn PETERSSON [4]) über die Diagonalgestalt der Matrizen $\lambda(n)$. Eine ausführliche Darstellung der Anwendung dieser Theorie auf die der quadratischen Formen veröffentliche ich an anderer Stelle.

Die kanonischen Produkte sind mit Hilfe der Operatoren $T_m^q$ (hier der Kürze halber als $T_m$ bezeichnet) zu definieren. Jede Modulfunktion $F(\tau)$ des reellen Nebentypus geht durch jeden Operator $T_m$ wieder in eine ebensolche mit demselben $k$, $q$ über. Nimmt sie bei $T_m$ nur einen konstanten Faktor $\lambda_m$ an:

$$F | T_m = \lambda_m \cdot F,$$

so heisst $F(\tau)$ Eigenfunktion von $T_m$ und $\lambda_m$ ein Eigenwert von $T_m$. Dann, und nur dann, wenn $F(\tau)$ Eigenfunktion aller $T_m$ ist, ist die Dirichlet-Reihe von $F(\tau)$ ein kanonisches Euler-Produkt (abgesehen von einem Zahlfaktor) und dann ist

$$F(\tau) = \text{const.} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m e^{2\pi i m \tau}$$

Unter den Eisenstein-Reihen gibt es, wenn $k \geqq 2$, genau 2 vom reellen Nebentypus, ihre Dirichlet-Reihen sind $\zeta(s) \cdot L(s-k+1)$ und $\zeta(s-k+1) \cdot L(s)$, wo $L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s}$. Bei $k=1$ gibt es nur die eine Eisenstein-Reihe mit der Dirichlet-Reihe $\zeta(s) \cdot L(s)$. Sie sind offenbar kanonische Euler-Produkte und haben reelle Koeffizienten. Für die Schar der Spitzenformen des reellen Nebentypus hat dagegen Herr PETERSSON [4]) bewiesen:

---

[2]) E. HECKE. Über ein Fundamentalproblem aus der Theorie der ellipt. Modulfunktionen, Abh. a. d. Math. Sem. Hamburg VI (1928), S. 235.
H. FELDMANN. Über das Verhalten der Modulfunktionen von Primzahlstufe bei beliebigen Modulsubstitutionen. Abh. a. d. Math. Sem. Hamburg, VIII (1931), S. 323.

[3]) E. HECKE. Über Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung. I und II, Math. Annalen 114 (1937), S. 1 und 316.

[4]) H. PETERSSON. Konstruktion der sämtlichen Lösungen einer Riemannschen Funktionalgleichung durch Dirichlet-Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung. I und II. Mathem. Annalen 116 (1939), S. 401 und 117 (1940), S. 39.

Die kanonischen Euler-Produkte $\sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{-s}$, welche zu Spitzenformen des reellen Nebentypus gehören, haben Koeffizienten $c_n$ mit der Eigenschaft

(4) $\qquad c_n \cdot \sqrt{\chi(n)}$ ist reell, wenn $(n, q) = 1$.

Eine besondere Rolle spielt naturgemäss der Operator $T_q$ und seine Eigenwerte. Sie hängen nach dem zitierten Hauptsatz mit den Darstellungen der Zahl $q$ durch die quadratische Form $Q$ von der Diskriminante $\pm q$ zusammen. Durch (4) wird über diese Eigenwerte nichts ausgesagt. In der vorliegenden Note soll nun gezeigt werden, dass sie in der Tat von ganz anderer Beschaffenheit als die obigen Eigenwerte $c_n$ sind:

**Satz. Die Eigenwerte $\lambda$ des Operators $T_q$ für die Spitzenformen des reellen Nebentypus sind komplexe Zahlen vom Betrage $q^{\frac{k-1}{2}}$.**

Zahlbeispiele, die ich am Schluss bringe, lassen erkennen, dass im allgemeinen diese $\lambda$ weder reell noch rein imaginär sind.

Zum Beweise erwähne ich zunächst einen Hilfssatz, den ich in meiner ausführlichen Darstellung beweise:

Hilfssatz 1. Wenn zwei Funktionen vom reellen Nebentypus mit dem gleichen $q$, $k$ Eigenfunktionen aller $T_n$ mit $(n, q) = 1$ sind und dieselben Eigenwerte haben, so sind sie auch Eigenfunktionen von $T_q$ und stimmen bis auf einen Zahlfaktor überein.

Eine wichtige Rolle hat noch der Operator $W = \sum_{l \bmod q} T U^l$, wo

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Durch $W$ geht jede Funktion des reellen Nebentypus wieder in eine solche über, und $W$ hat ferner folgende Eigenschaften:

Hilfssatz 2. Für die Funktionen des reellen Nebentypus ist

a) $W^2 = (-1)^k q$.

b) $W . T_n = \chi(n) \cdot T_n \cdot W$, wenn $(n, q) = 1$.

c) $T_q = (-1)^k q^{k-1} \cdot H \cdot W$ mit $H = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ q & 0 \end{pmatrix}$, $H^2 = (-q)^{-k}$.

Der Beweis des oben ausgesprochenen Satzes gelingt nun durch Benutzung eines neuen Operators $K$, der bisher in meiner Theorie noch nicht verwendet wurde. Er ist erklärt durch

$$F \mid K = \overline{F(-\bar{\tau})}.$$

Dabei bedeutet allgemein $\bar{a}$ die konjugiert-komplexe Grösse zu $a$. Durch $K$ wird offenbar die Schar aller Funktionen des reellen Nebentypus in sich übergeführt, und gegenüber $W, H$ verhält er sich, wie man elementar zeigt, so:

(5) $$W \cdot K = (-1)^k \cdot K \cdot W; \quad H \cdot K = (-1)^k \cdot K \cdot H; \quad K^2 = 1.$$

Nun sei endlich $F(\tau)$ eine Funktion mit kanonischem Euler-Produkt. Offenbar ist auch $F|K$ eine solche, sie hat konjugiert-komplexe Koeffizienten zu $F(\tau)$ und hat daher bei den $T_n$ mit $(n, q) = 1$ dieselben Eigenwerte wie $F|W$, nach (4) und Hilfssatz 2, b). Mithin ist nach Hilfssatz 1 mit konstantem $c$

$$F|W = c \cdot F|K.$$

Übt man auf diese Gleichung den Operator $K$ aus, so folgt

$$F|W \cdot K = \bar{c} \cdot F$$

und daraus mit Rücksicht auf (5)

(6) $$c\bar{c} = q.$$

Ist andererseits $\lambda$ der Eigenwert von $F(\tau)$ bei $T_q$, also nach Hilfssatz 2, c)

$$F|T_q = \lambda \cdot F, \qquad q^{k-1} \cdot F|HW = (-1)^k \cdot \lambda \cdot F$$

so ergibt die Anwendung von $W$, unter Benutzung der Tatsache, dass mit $F$ auch $F|H$ vom reellen Nebentypus ist,

$$q^k \cdot F|H = \lambda \cdot F|W = \lambda \cdot c \cdot F|K,$$

und hieraus nach (5), (6)

$$\lambda \cdot \bar{\lambda} = q^{k-1},$$

was bewiesen werden sollte.

Numerische Beispiele. Bei binären Formen ist die Arithmetik so gut bekannt, dass mit der Funktionentheorie nichts Neues bewiesen wird. Der erste neue Fall liegt also bei quaternären Formen vor. Nach (1) muss die Primzahl $q$ kongruent 1 mod. 4 sein. Der kleinste Wert $q$, wofür es Spitzenformen vom reellen Nebentypus gibt, ist $q = 29$. Hier existieren nach meiner Tabelle[2]) genau zwei linear unabhängige solche Modulfunktionen. Es gibt ferner nur zwei verschiedene Klassen quadratischer Formen in 4 Variabeln mit Diskriminante 29, repräsentiert etwa durch

$$Q_1 = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1x_2 + x_2x_4 + x_3x_4$$
$$Q_2 = 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$$

Die nach dem Hauptsatz vorhandene Darstellung der beiden Dirichlet-Reihen durch die kanonischen Euler-Produkte sieht hier so aus:

$$
(7)\quad
\begin{aligned}
\varphi(s,Q_1) &= \frac{q}{3}\zeta(s-1)\cdot L(s) - \frac{1}{3}\zeta(s)\cdot L(s-1) + \frac{4}{3}\frac{\bar\lambda}{\lambda-\bar\lambda}P(s) - \frac{4}{3}\frac{\lambda}{\lambda-\bar\lambda}\bar P(s)\\
\varphi(s,Q_2) &= \frac{q}{3}\zeta(s-1)\cdot L(s) - \frac{1}{3}\zeta(s)\cdot L(s-1) - \frac{8}{3}\frac{\bar\lambda}{\lambda-\bar\lambda}P(s) + \frac{8}{3}\frac{\lambda}{\lambda-\bar\lambda}\bar P(s)
\end{aligned}
$$

Hier sind $P(s)$, $\bar P(s)$ die beiden kanonischen Euler-Produkte, sie haben konjugiert komplexe Koeffizienten aus dem Zahlkörper $K(\sqrt{-5})$. Der Eigenwert zum Operator $T_q$ ist bei $P(s)$

$$-\lambda = -3 + 2\sqrt{-5}\,.$$

Die ersten Koeffizienten $c_n$ von $P(s)$ sind

$$c_1 = 1\,,\quad c_2 = \sqrt{-5}\,,\quad c_3 = -\sqrt{-5}\,,\quad c_5 = -3$$

Es genügt ja wegen der Beschaffenheit des Euler-Produktes für $P(s)$, nur die $c_n$ für $n =$ Primzahl zu kennen, da aus diesen elementar die allgemeinen $c_n$ folgen. Z. B. ist

$$c_6 = c_2\cdot c_3\,,\quad c_4 = c_2^2 + 2\,,\quad c_8 = c_2(c_4+2)$$

Wie man sieht, lassen sich die 4 Euler-Produkte in (7) nicht durch die beiden Reihen $\varphi(s,Q_1)$, $\varphi(s,Q_2)$ ausdrücken, d.h. die multiplikativen Eigenschaften der Darstellungszahlen $a(n,Q_1)$ und $a(n,Q_2)$ bleiben verborgen, solange man sich auf die quadratischen Formen $Q$ mit derselben Diskriminante beschränkt. Nun führen aber Formen mit anderer Diskriminante noch auf Modulfunktionen desselben reellen Nebentypus, nämlich, wie oben erwähnt, die beiden adjungierten Formen $Q_1^*$ und $Q_2^*$ von $Q_1$ und $Q_2$. Sie haben die Diskriminante $29^3$. Auch ihre Dirichlet-Reihen lassen sich linear durch dieselben 4 kanonischen Euler-Produkte ausdrücken, und zwar findet man

$$
(8)\quad
\begin{aligned}
\varphi(s,Q_1^*) &= \frac{1}{3}\zeta(s-1)\cdot L(s) - \frac{1}{3}\zeta(s)\cdot L(s-1) - \frac{4}{3}\frac{P(s)}{\lambda-\bar\lambda} + \frac{4}{3}\frac{\bar P(s)}{\lambda-\bar\lambda}\\
\varphi(s,Q_2^*) &= \frac{1}{3}\zeta(s-1)\cdot L(s) - \frac{1}{3}\zeta(s)\cdot L(s-1) + \frac{8}{3}\frac{P(s)}{\lambda-\bar\lambda} - \frac{8}{3}\frac{\bar P(s)}{\lambda-\bar\lambda}
\end{aligned}
$$

Jetzt sieht man, dass die 4 kanonischen Euler-Produkte linear äquivalent mit den Dirichlet-Reihen der 4 quadratischen Formen sind. Das bedeutet dann: Es gibt 4 Zahlenquadrupel $(c_1, c_2, c_1^*, c_2^*)$, so dass die Funktion von $n$

$$\lambda(n) = c_1 a(n, Q_1) + c_2 a(n, Q_2) + c_1^* a(n, Q_1^*) + c_2^* a(n, Q_2^*)$$

folgendes Multiplikationsgesetz hat:

$$\lambda(n_1) \cdot \lambda(n_2) = \sum_{d \mid n_1, n_2} \lambda\left(\frac{n_1 \cdot n_2}{d^2}\right) \cdot \chi(d) \cdot d$$

Ich gebe noch ein Beispiel für Formen mit 6 Variabeln. Die Form

$$Q_6 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{6} x_i^2 + \frac{3}{2} \left(\sum_{i=1}^{6} x_i\right)^2$$

hat die Diskriminante $\Delta = -q = -19$. Ihre Adjungierte ist

$$Q_6^* = \frac{19}{2} \sum_{i=1}^{6} x_i^2 - \frac{3}{2} \left(\sum_{i=1}^{6} x_i\right)^2$$

und hat die Diskriminante $-19^5$. Auch hier gibt es 4 kanonische Euler-Produkte, und zwar wird

$$\varphi(s, Q_6) = \frac{19^2 \zeta(s-2) \cdot L(s) - \zeta(s) L(s-2)}{11} + \frac{6}{11} \frac{\bar{\lambda} P(s) - \lambda \cdot \bar{P}(s)}{2\sqrt{-13}}$$

$$\varphi(s, Q_6^*) = \frac{\zeta(s-2) L(s) - \zeta(s) L(s-2)}{11} - \frac{6}{11} \frac{P(s) - \bar{P}(s)}{2\sqrt{-13}}$$

Hier sind $\bar{P}(s)$ und $P(s)$ zwei kanonische Produkte mit konjugiert-komplexen Koeffizienten aus dem Körper $K(\sqrt{-13})$. Die Zahl $\bar{\lambda}$ ist der Eigenwert von $T_q$ bei $P(s)$ und zwar ist

$$\lambda = 6 + 5\sqrt{-13}, \quad \lambda\bar{\lambda} = 19^2.$$

Hier gibt es noch Formen mit Diskriminante $-19^3$, deren Thetareihen auch vom reellen Nebentypus der Stufe 19 und der Dimension $-3$ sind, nämlich z. B. eine Summe von drei binären Formen der Diskriminante $-19$. Ihre Dirichlet-Reihe erfordert ausser den eben angeführten kanonischen Produkten noch ein fünftes kanonisches Produkt. Dieses ist die Zetafunktion aus dem Körper $K(\sqrt{-19})$, gebildet mit dem «Grössencharakter» 2. Grades. Ihre Koeffizienten sind rationale ganze Zahlen.

In beiden Beispielen bedeutet

$$L(s) = \sum \chi(n) n^{-s}$$