Sur les courbes paraboliquement convexes.

Par

T. CARLEMAN (Djursholm).

(Als Manuskript eingegangen am 6. Januar 1940.)

Soit J_4 une courbe de JORDAN qui admet une représentation, paramétrique de la forme

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

où $x(t)$ et $y(t)$ sont des fonctions périodiques quatre fois dérivables et satisfaisant à la condition $x'(t)^2 + y'(t)^2 \neq 0$. Si on suppose que le rayon de courbure de J_4 est partout $\neq 0$, il existe une et une seule parabole osculatrice en chaque point de J_4. Nous dirons que la courbe J_4 est paraboliquement convexe si elle est contenue localement (c'est-à-dire dans un certain voisinage du point de contact) dans l'intérieur fermé de chaque parabole osculatrice.

Par un choix convenable des axes des coordonnées il est possible de représenter chaque segment S suffisamment petit de J_4 par une équation de la forme

$$y = y(x),$$

où $y''(x) > 0$, dans un certain intervalle (α, β). Nous pouvons de la manière suivante trouver une condition pour que ce segment soit paraboliquement convexe.

Soit ξ un point quelconque dans l'intervalle (α, β) et désignons par $y = Y(x)$ l'équation de la parabole osculatrice de S en le point avec l'abscisse ξ. Il est bien connu que $Y(x)$ doit satisfaire à l'équation différentielle

$$\frac{d^2}{dx^2}(Y'')^{-\frac{2}{3}} = 0, \tag{1}$$

qui peut encore s'écrire:

$$Y'' Y^{(4)} - \frac{5}{3}(Y^{(3)})^2 = 0. \tag{2}$$

En utilisant les relations

$$\begin{aligned} y(\xi) &= Y(\xi), \\ y'(\xi) &= Y'(\xi), \\ y''(\xi) &= Y''(\xi), \\ y'''(\xi) &= Y'''(\xi), \end{aligned}$$

il vient

$$y(x) - Y(x) = \frac{(x-\xi)^4}{\underline{|4}} \left[y^{(4)}[\xi + \Theta(x-\xi)] - Y^{(4)}[\xi + \Theta(x-\xi)] \right]$$

dans le voisinage de $x = \xi$,
d'où l'on conclut que $y^{(4)}(\xi)$ doit être $\geq Y^{(4)}(\xi)$. En tenant compte des relations (1) et (2), il s'ensuit que l'inégalité

$$\frac{d^2}{dx^2}(y'')^{-\frac{2}{3}} \leq 0 \tag{3}$$

est une condition nécessaire pour la convexité parabolique de S en le point avec l'abscisse x. On trouve en même temps que l'inégalité

$$\frac{d^2}{dx^2}(y'')^{-\frac{2}{3}} < 0 \tag{4}$$

est une condition suffisante. Si cette condition est remplie nous dirons que S est paraboliquement convexe au sens restreint (paraboliquement convexe R). Pour simplifier les énoncés et les démonstrations nous ne considérons par la suite que cette notion de convexité.

En introduisant le rayon de courbure et la longueur d'arc sur J_4 nous pouvons écrire la condition (4) sous la forme suivante

$$\frac{1}{3}\left(\frac{dR}{ds}\right)^2 - R\frac{d^2R}{ds^2} + 3 > 0,$$

qui est indépendante des axes des coordonnées.

Nous nous proposons maintenant de démontrer les deux théorèmes suivants sur les points d'intersection d'une parabole et d'une courbe paraboliquement convexe.

Théorème I.

Chaque courbe fermée J_4 paraboliquement convexe R n'a pas d'autre points communs avec ses paraboles osculatrices que les points d'osculation.

Supposons, en effet, qu'une parabole qui est osculatrice à la courbe J_4 en un point A, ait un ou plusieurs autres points P communs avec celle-ci. Cela posé, il existe au moins un segment S de J_4, partant du point d'osculation A et aboutissant en un point d'intersection P, tel qu'il peut se représenter analytiquement en un système de coordonnées rectilignes rectangulaires par une équation de la forme

$$y = y(x)$$

où l'axe des y est le même, en position et direction, que l'axe de la parabole et où l'axe des x est choisi d'une manière convenable.

Soit
$$y = Y(x)$$
l'équation de la parabole dans ce système de coordonnées, et désignons par a et b les abscisses de A resp. P. Nous avons les relations suivantes

$$y(a) = Y(a), \tag{5}$$
$$y'(a) = Y'(a), \tag{6}$$
$$y''(a) = Y''(a), \tag{7}$$
$$y'''(a) = Y'''(a), \tag{8}$$
$$y(b) = Y(b). \tag{9}$$

En tenant compte des relations (5) et (9) on démontre l'existence d'une valeur ξ_1, $a < \xi_1 < b$, telle qu'on ait
$$y'(\xi_1) = Y'(\xi_1). \tag{10}$$
En combinant (6) et (10) on trouve qu'il existe une valeur ξ entre a et b telle qu'on ait
$$y''(\xi) = Y''(\xi). \tag{11}$$
Cela posé, considérons les deux courbes C_1 et C_2
$$y = \varphi(x) = [y''(x)]^{-\frac{2}{3}},$$
$$y = \Phi(x) = [Y''(x)]^{-\frac{2}{3}}.$$
C_2 est évidemment une droite parallèle à l'axe des x. Les relations (7) et (8) montrent que C_2 est tangente à C_1 pour $x = a$, et il suffit de tenir compte de (11) pour voir que C_1 et C_2 se coupent pour $x = \xi$.

Or on sait d'après la formule (4) que C_1 est une courbe concave au sens strict qui ne peut pas, par conséquent, couper sa tangente en dehors du point de contact.

L'hypothèse que la courbe J_4 soit coupée par une parabole osculatrice en un point distinct du point d'osculation est donc impossible. C. Q. F. D.

On peut par un raisonnement qui n'est que légèrement plus compliqué démontrer le théorème suivant:

Théorème II.

Une parabole ne peut jamais rencontrer une courbe fermée paraboliquement convexe R en plus de quatre points.

On peut trouver des résultats analogues pour d'autres systèmes de courbes qui dépendent d'un nombre pair de paramètres.