Caratterizzazione topologica delle superficie razionali e delle rigate.

Di

FRANCESCO SEVERI (Roma).

(Als Manuskript eingegangen am 5. Januar 1940.)

Una curva di genere p è caratterizzata topologicamente dalla sua superficie di RIEMANN, nel senso che tutte le curve di genere p possono distendersi sulla medesima riemanniana. Esse si differenziano soltanto quando si considerino dal punto di vista birazionale e costituiscono, come si sa[1]), una varietà algebrica irriducibile[2]), un elemento della quale (classe di tutte le curve birazionalmente equivalenti ad una) è individuato dai valori dei moduli. In particolare, per $p=0$, non essendovi moduli, una curva razionale resta determinata, non soltanto topologicamente, ma anche birazionalmente, dalla sua riemanniana (piano-sfera).

La questione analoga diviene notevolmente più elevata e difficile non appena dalle curve si passi alle superficie e più ancora quando si aumenti la dimensione della varietà considerata. E ciò perchè siamo oggi ben lontani dal dominare tutti i caratteri topologici delle riemanniane a più di due dimensioni e dal saper tra essi distinguere i caratteri indipendenti. D'altronde quelli conosciuti offrono già copiosa messe di circostanze nuove ed inaspettate.

P. es. le proprietà topologiche delle superficie e varietà superiori dipendono anche dalla base[3]), cioè da proprietà che son

---

[1]) SEVERI, Vorlesungen über algebraische Geometrie (Leipzig, Teubner, 1921), p. 341.

[2]) Vorlesungen citate, pp. 158 e 321.

[3]) Ved. le mie Memorie, La base per le varietà algebriche di dimensione qualunque contenute in una data, ecc. («Memorie della R. Acc. d'Italia», 1934/XII, p. 240); La teoria generale delle corrispondenze tra due varietà algebriche e i sistemi di equivalenza («Abhandlungen aus dem Math. Sem. der Hansischen Universität», 1939), p. 101.

insieme di tipo algebrico-geometrico e di tipo aritmetico. Si hanno così, oltre ai moduli suscettibili di variazione continua, altri caratteri capaci d'assumer soltanto valori interi[4]), i quali concorron con i moduli a differenziar birazionalmente le famiglie di superficie o varietà.

La questione cui accenno fu da me altra volta considerata per le superficie razionali, che non hanno moduli. Mi limitai allora ad enunciare in proposito un risultato[5]), che voglio qui dimostrare, aggiungendo la caratterizzazione topologica anche delle superficie riferibili a rigate (i cui moduli riduconsi a quelli di un ente algebrico ∞^1).

1. Data una superficie algebrica F, è noto che la sua connessione superficiale R (cioè il numero dei cicli bidimensionali indipendenti della sua riemanniana) è un invariante relativo nelle trasformazioni birazionali di F (che introducon curve eccezionali). Il numero ϱ_0 dei cicli trascendenti (cioè indipendenti dai cicli algebrici), indipendenti tra loro, è invece un invariante assoluto. La differenza $\varrho = R - \varrho_0$ è di nuovo un invariante relativo, coincidente col numero-base di PICARD-SEVERI, ed esprime il numero dei cicli algebrici indipendenti (in senso topologico, epperò anche in senso algebrico).

Il minimo di R (e di ϱ) si realizza sopra un modello di F privo di curve eccezionali, se la superficie non è riferibile a rigata, razionale o no, o sopra un modello contenente soltanto le curve eccezionali non ulteriormente eliminabili, nel caso delle rigate. Comunque il minimo stesso è un invariante assoluto: si può chiamare la connessione superficiale assoluta (o risp. il numero-base assoluto). Nel seguito intenderemo che R, ϱ denotino questi valori minimi.

2. Poichè $\varrho \geq 1$, è sempre $R > 0$. Inoltre $R = \varrho$ caratterizza le superficie senza cicli trascendenti. Osserviamo a tal proposito che la condizione necessaria e sufficiente perchè tutti i cicli bidimensionali d'una superficie F sieno algebrici, è che F abbia il genere geometrico p_g nullo.

Che, invero, quando $p_g = 0$ non ci sieno cicli trascendenti fu stabilito da BAGNERA e DE FRANCHIS[6]). La conclusione medesima è

[4]) SEVERI, Relazioni fra i periodi degl'integrali multipli d'una varietà algebrica («Memorie della R. Acc. d'Italia», 1938/XVI), p. 145.

[5]) SEVERI, Caratterizzazione geometrica, topologica e trascendente delle serie d'equivalenza sopra una superficie («Rend. della R. Acc. Naz. dei Lincei», II sem. 1934), n° 7.

[6]) «Rend. del Circolo Mat. di Palermo», tomo XXX (1910), 2° sem., p. 233.

corollario del teorema (posteriormente dato da LEFSCHETZ) secondo cui un ciclo algebrico è caratterizzato dall'annullarsi del corrispondente periodo d'un qualunque integrale doppio di 1^a specie della superficie.

Viceversa, se $\varrho_0 = 0$, in base alla disuguaglianza $\varrho_0 \geq 2\,p_g$[7]), si deduce $p_g = 0$.

3. Ciò premesso, consideriamo una superficie razionale F. Per essa è $p_g = p_a = 0$ (p_a genere aritmetico). Preso come modello di F un piano, che è quello dove si realizzano i minimi di ϱ, ϱ_0, R, risultano per la riemanniana corrispondente i valori $\varrho = 1$, $\varrho_0 = 0$, $R = 1$. Inoltre la base minima delle curve della superficie è una retta, cioè un ciclo algebrico effettivo. Infine F è priva di torsione topologica.

Sia, inversamente, F è una superficie regolare ($q = p_g - p_a = 0$), priva di torsione ed avente $R = 1$ epperò $\varrho = 1$, $\varrho_0 = 0$. È essa razionale?

Ogni serie di gruppi di punti di F (in particolare la serie de' suoi punti) è a circolazione lineare nulla (essendo $q = 0$), a circolazione superficiale algebrica (essendo $\varrho_0 = 0$) e a ciclo-torsione nulla (essendo F a torsione nulla[8]). Perciò la serie dei punti di F è di equivalenza[9]).

Tenuto conto che la teoria della torsione di POINCARÈ equivale alla teoria della divisione delle curve per numeri interi (SEVERI), possiamo intanto sottolineare questo risultato di passaggio:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una superficie algebrica abbia i punti equivalenti è che sia regolare, di genere geometrico nullo e a divisione delle curve univoca.

4. Ma cerchiamo di utilizzare più a fondo le ipotesi $\varrho = 1$, $\varrho_0 = 0$.

Da $\varrho = 1$ e dal fatto che la divisione è univoca, segue che una base minima dei cicli bidimensionali di F può formarsi con un sol ciclo C. E siccome $\varrho_0 = 0$, questo ciclo, come tutti i cicli

---

[7]) SEVERI, «Rend. del Circolo Mat. di Palermo», t. LVI (1932), 1° sem., p. 79.

[8]) Pei concetti ed i risultati relativi alle serie d'equivalenza sulle superficie, che qui si usano, rinvio alle mie lezioni (raccolte da F. CONFORTO e da E. MARTINELLI): *Serie, sistemi d'equivalenza e corrispondenze algebriche sulle varietà algebriche* (Pubblicazione dell'«Istituto Matematico della R. Università di Roma», 1938 e segg.) e ai miei successivi lavori sulla teoria, tra cui in particolare la Nota lincea prima citata: *Caratterizzazione geometrica, ecc.*

[9]) Questo consegue da un teorema contenuto nella mia Memoria di prossima pubblicazione: *Ulteriori sviluppi della teoria delle serie d'equivalenza sulle superficie algebriche.* Ved. pure: *Caratterizzazione geometrica, ecc.* (citata), n. 6.

bidimensionali di F, è algebrico. Si può dunque assumere a base minima delle curve algebriche di F una curva C, eventualmente virtuale.

Il grado virtuale n di C è certo positivo. Invero, ogni curva algebrica D, anche effettiva, di F, a meno di un'equivalenza algebrica (che nel caso nostro, essendo la superficie regolare, è una equivalenza lineare) è del tipo λC, con λ intero (positivo o negativo). Il grado virtuale di D vale perciò $\lambda^2 n$. Presa come D una sezione piana o iperpiana di F, risulterà $\lambda^2 n > 0$, epperò $n > 0$.

Ciò posto, sia Ω la corrispondenza identica su F. La Ω è a valenza zero, in quanto il punto $x' = x$ omologo del punto medesimo x, mobile su F, varia in una serie d'equivalenza. Sarà pertanto[10]:

$$\Omega \equiv x \times F' + x' \times F + S,$$

ove $\equiv$ è il segno dell'equivalenza razionale fra gruppi di punti di F; F' è una copia di F ed S è la corrispondenza degenere, effettiva o virtuale, di 2^a specie (definita a meno di un'equivalenza razionale) associata ad Ω.

Poichè S deve esprimersi come una combinazione lineare a coefficienti interi di prodotti di coppie di curve di F, F' e tutte le curve di F (e di F') sono linearmente equivalenti a multipli di C, sarà

$$S \equiv \lambda\,(C \times C),$$

con λ intero conveniente (positivo o negativo). Si ha insomma:

$$\Omega \equiv x \times F' + x' \times F + \lambda\,(C \times C),$$

dalla quale, segando i due membri con Ω, si trae:

$$[\Omega, \Omega] = 1 + 1 + \lambda\,[C \times C, \Omega] = 2 + \lambda\, n.$$

E siccome (COMESSATTI-SEVERI):

$$[\Omega, \Omega] = I + 4,$$

si conclude che:

$$\lambda\, n = I + 2,$$

I essendo l'invariante di ZEUTHEN-SEGRE appartenente ad F.

In base ora alla formula di PICARD-ALEXANDER:

$$\varrho + \varrho_0 = I + 4q + 2,$$

si trova, nel caso nostro, $I = -1$, epperò $\lambda\, n = 1$; donde (essendo $n > 0$) $\lambda = n = 1$.

5. Occorre infine distinguer l'ipotesi in cui la curva C, di grado virtuale 1, è effettiva, da quello in cui è virtuale.

Se C è effettiva, consideriamo il suo sistema lineare aggiunto, effettivo o virtuale, $|C'|$. Risulta $C' \equiv l\, C$ (con l intero, positivo

[10]) La base per le varietà algebriche, ecc. (citata), p. 261.

o negativo). Poichè $C' - C \equiv (l-1)\ C$, e su F, essendo $\varrho_0 = 0$, non esiste il sistema canonico effettivo (di ordine ≥ 0) (n. 2), sarà $l-1<0$. Ciò significa che $C' - C$ ed ogni suo multiplo $m\,(C' - C)$, con m intero >0, ha l'ordine negativo. Pertanto la superficie regolare F ha tutti i plurigeneri nulli ed è razionale.

Sia C virtuale. Cangiando eventualmente il segno di C si può supporre che l'ordine di C sia positivo. Osserviamo inoltre che su F l'invariante ω (genere virtuale del sistema canonico virtuale impuro $|C' - C|$) vale 10, come si ricava subito dalla relazione di NOETHER:

$$\omega + I = 12\, p_a + 9,$$

tenuto conto che per F è $I = -1$, $p_a = 0$.

Sia $|C'|$ l'aggiunto, virtuale od effettivo, di C e sia inoltre $C' \equiv l\, C$. Ne segue $[C', C] = l$, cioè $2p - 2 = l$, ove p è il genere virtuale di C.

D'altronde il grado virtuale $\omega - 1$ del sistema canonico virtuale impuro $C' - C \equiv (l-1)\, C$ è uguale ad $(l-1)^2 [C, C] = (l-1)^2$; e siccome $\omega - 1 = 9$, si ricava $l - 1 = \pm 3$. Dunque due casi sono possibili: $l = 4$, $l = -2$.

Da $l = -2$ scende $C' - C \equiv -3\, C$, e siccome C ha l'ordine positivo, il sistema $C' - C$ e tutti i suoi multipli successivi hanno l'ordine negativo. La superficie regolare F ha allora tutti i plurigeneri nulli e si ricade così nel caso in cui F è razionale e C è effettiva. Il che è ben naturale, atteso che le curve effettive rientrano in particolare tra le curve virtuali.

L'ipotesi $l = 4$ conduce invece ad una C non effettiva, perchè, come abbiamo visto prima, dall'ipotesi che C sia effettiva segue la razionalità di F, cioè $l = -2$. La relazione $2\,p - 2 = l$ porge ora $p = 3$: onde C è una curva non effettiva di grado virtuale 1 e di genere virtuale 3.

Una curva qualunque λC di F ha così il grado virtuale λ^2 e il genere virtuale $\frac{\lambda(\lambda+3)}{2} + 1$. Ne segue che le sole curve di genere virtuale zero, esistenti su F, sono le curve equivalenti a $-C$ o a $-2\,C$, cioè curve di ordine negativo e quindi non effettive. La superficie F è pertanto priva di curve eccezionali e $K = C' - C = (-1)\, C = 3\, C$ è il suo sistema canonico virtuale puro.

Si può inoltre verificare che il sistema $|4\,C|$, cioè $|C'|$, è effettivo. Basta all'uopo applicare la condizione (da me data nel 1905[11]) perchè una curva virtuale sia effettiva.

La $4\,C$ ha intanto l'indice di specialità $i=0$, perchè il sistema $|K-4\,C|=|-C|$ non è effettivo; e siccome il grado n e il genere virtuale p valgon rispettivamente, come si è visto, $n=16$, $p=15$, risulta

$$n-p+p_a+1-i=2\,;$$

onde $4\,C$ è aritmeticamente e perciò anche geometricamente effettiva e $|4\,C|$ ha almeno la dimensione 2. Similmente è effettiva ogni curva $\lambda\,C\,(\lambda=4,5,6,\ldots)$. Per $\lambda=6$ si ha il sistema bicanonico di grado 36 e di genere 28; la cui dimensione vale almeno 9. Dunque F, se esiste, ha il bigenere $P_2\geq 10$[12]).

6. Tralasciamo il problema di esistenza della F ora considerata e limitiamoci a trarre, dalle proprietà di cui dovrebbe godere, quella che ci interessa, per distinguer topologicamente F dalle superficie razionali. Basta perciò ricordare che su F la base minima dei cicli bidimensionali è una curva non effettiva (cioè un ciclo sconnesso), mentre sul piano è una curva effettiva (una retta) ed ogni ciclo bidimensionale è effettivo o linearmente equivalente a un ciclo effettivo (e quindi connesso), preso positivamente o negativamente.

Si può concludendo enunciare:

La riemanniana d'un piano è caratterizzata dall'esser a connessione lineare e a torsione nulla, a connessione superficiale 1, ogni suo ciclo superficiale essendo connesso (a meno d'un'omologia).

La stessa riemanniana spetta a tutte le superficie razionali d'ordine invariantivo relativo[13]) uguale ad 1 e ad una superficie razionale qualunque, la quale sia stata prima ridotta, con trasformazioni birazionali, all'ordine invariantivo 1.

Osservazione 1[a]. — Il risultato, per ciò che concerne le superficie razionali, aventi ordine invariantivo relativo >1, è meglio precisato dalle considerazioni seguenti.

---

[11]) SEVERI, *Sulle curve algebriche virtuali appartenenti ad una superficie algebrica*, «Rend. del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere» (1905).

[12]) Una volta stabilito che F ha il sistema bicanonico *effettivo*, la disuguaglianza $P_2\geq 10$ consegue anche dalla nota disuguaglianza $P_2\geq\omega+p_a$ $(\omega=10,\,p_a=0)$, che del resto deriva essa pure dal teorema di RIEMANN-ROCH sulle superficie.

[13]) Ved. SEVERI, *Conferenze di geometria algebrica*, raccolte da B. SEGRE (Roma, litografie, 1927), p. 64; oppure: *Topologia* (Buenos Aires, Imprenta de la Universidad, 1931), p. 96.

Data una qualsiasi superficie algebrica imaginiamo la classe delle sue riemanniane algebriche, costruite algebricamente, p. es. nel modo che ho altra volta indicato[14]). Una corrispondenza birazionale fra due superficie F, F' induce una corrispondenza algebrica biunivoca, cioè birazionale, fra le rispettive riemanniane algebriche M, M'. Ed è una corrispondenza birazionale reale, che muta cioè punti reali di una delle M, M' in punti reali della altra. Anzi una tal corrispondenza può esser addirittura rappresentata con funzioni razionali a coefficienti reali, come si riconosce scindendo il reale dall'imaginario nelle formule che danno la trasformazione birazionale fra F, F'.

Da questo punto di vista si può affermare che:

La riemanniana algebrica di una superficie razionale qualunque è caratterizzata dalla possibilità di poterla ridurre con trasformazioni birazionali reali alla riemanniana algebrica di un piano.

Come si sa[15]) la riemanniana d'ordine minimo d'un piano è la varietà di SEGRE del 6^0 ordine, di tipo ellittico, appartenente ad uno spazio lineare reale S_8. Uno degli ellissoidi in essa contenuti è il ciclo superficiale che dà la base minima e che la distingue fra le varietà, prive di torsione, a connessioni lineare e superficiale rispettivamente eguali a 0 e ad 1.

Osservazione 2^a. — Di ogni ciclo bidimensionale di una riemanniana a 4 dimensioni si può considerar l'indice di KRONECKER fornito dall'intersezione del ciclo con se stesso: indice che, quando il ciclo è algebrico, coincide con il grado virtuale della curva di cui esso è imagine. Il grado virtuale risulta così notoriamente un carattere topologico.

Tenuto conto che in un piano vi sono curve razionali di grado virtuale 1 (le rette), parrebbe che la riemanniana d'un piano potesse caratterizzarsi senz'altro come quella che ha connessione lineare nulla e che contiene un ciclo superficiale semplicemente connesso e di grado virtuale 1. Ma nel fatto non è così! Sia, invero, F una superficie a connessione lineare nulla, cioè regolare, sulla quale sia tracciata una curva razionale C di grado virtuale 1. Il genere virtuale di C è ≥ 0 ed è nullo soltanto quando C è priva di punti multipli. Se così è, segue ovviamente (dal teorema di RIEMANN-ROCH sulle superficie) che C individua una rete $|C|$ di

---

[14]) Conferenze (citate), p. 83.

[15]) Conferenze (citate), p. 73.

grado effettivo 1, mediante la quale F si può trasformare birazionalmente, senza eccezioni, in un piano. Ma se C ha punti multipli, nulla si può concludere in proposito. Ora un punto multiplo di C ha significato topologico soltanto se è origine di più rami; mentre i punti multipli di C potrebbero essere ciascuno origine di un sol ramo (superlineare) e quindi non distinguibili topologicamente.

Quando però si aggiunga la supposizione che F abbia connessione superficiale 1 e torsione nulla, si conclude senz'altro la razionalità di F, perchè le curve λC dell'ipotetica superficie del n. 5 hanno il grado virtuale λ^2 e quindi la sola di esse che abbia il grado virtuale 1 corrisponde a $\lambda = 1$ ed è una curva non effettiva (di genere virtuale 3). Pertanto la riemanniana d'un piano può altresì caratterizzarsi coi valori 0, 1 delle connessioni lineare e superficiale e col fatto di essere a torsione nulla e di contenere un ciclo semplicemente connesso di grado virtuale 1.

7. Passiamo ora alla caratterizzazione della riemanniana d'una rigata F di genere $p > 0$.

Poichè il genere geometrico di F è $p_g = 0$, la superficie non possiede che cicli algebrici (n. 2). La base minima delle curve algebriche di F è costituita da una generatrice e da una unisecante di questa[16]), ossia da due curve algebricamente indipendenti. Da ciò segue che F ha le curve a divisione univoca ovvero che è priva di torsione; e inoltre che la sua connessione superficiale vale $R = 2$. Quanto alla connessione lineare, si sa bene ch'essa è uguale a $2p$.

Supponiamo, viceversa, che F sia una superficie a connessione lineare $2p > 0$ e a connessione superficiale $R = 2$. Si può affermare che F è birazionalmente equivalente ad una rigata di genere p?

Intanto, essendo $R = \varrho + \varrho_0 = 2$ e $\varrho \geq 1$, risulta $0 \leq \varrho_0 \leq 1$. Dico che F ha in ogni caso il genere geometrico $p_g = 0$. Infatti, se fosse $p_g \geq 1$, sarebbe $\varrho_0 \geq 2p_g \geq 2$, mentre per F è $\varrho_0 \leq 1$. Da $p_g = 0$ segue poi (n. 2) $\varrho_0 = 0$. Pertanto la sola ipotesi ammissibile è $\varrho = 2$, $\varrho_0 = 0$.

La condizione $\varrho_0 = 0$, unita all'altra che la connessione lineare di F sia $2p > 0$, basta già a caratterizzare F come trasformata

[16]) Severi, Sulle corrispondenze tra i punti d'una curva algebrica e sopra certe classi di superficie («Memorie della R. Acc. delle Scienze di Torino», 1903), n. 14.

birazionale di una rigata, quando $p > 1$ [17]). Si può dunque dire che:

La riemanniana d'una superficie birazionalmente equivalente (senza eccezioni) a una rigata di genere $p > 1$ è caratterizzata dall'essere a connessione lineare $2p$ e a connessione superficiale uguale a 2. Essa risulta in conseguenza a torsione nulla.

Osservazione. — Per una superficie birazionalmente equivalenti con eccezioni ad una rigata di genere p valgon le considerazioni analoghe a quelle dell'Oss. 1^a del n. 6.

8. Nel caso $p = 1$ le proprietà accennate non bastano a caratterizzare le superficie birazionalmente equivalenti alle rigate ellittiche. È noto infatti che, oltre alle rigate ellittiche, esiston superficie di genere geometrico $p_g = 0$ e d'irregolarità 1, ciascuna delle quali possiede un fascio ellittico ($p = 1$) di curve C di genere $\pi \geq 1$ ed un fascio lineare di curve ellittiche D senza punti base[18]), secanti le C in un certo numero n (> 1) di punti. Queste superficie, private di eventuali curve eccezionali (com'è possibile con trasformazioni birazionali), acquistano il genere lineare $p^{(1)} = \omega = 1$ [19]); donde, a norma della già citata relazione di NOETHER, deducesi $I = -4$. La relazione di PICARD-ALEXANDER prova allora che $R = 2$, epperò $\varrho = 2, \varrho_0 = 0$ [20]). Inoltre la connessione lineare di tali superficie vale 2 (cioè $2p$). Pertanto esse hanno in comune con una rigata ellittica tutti i caratteri topologici del precedente enunciato. Per differenziarle dalle rigate occorre dunque far intervenire qualche altro carattere topologico.

Un siffatto carattere è fornito dall'esistenza sopra una rigata ellittica d'una curva razionale (una generatrice), che invece non esiste sopra una superficie di genere $p_g = 0$ e d'irregolarità 1, non trasformabile birazionalmente in una rigata ellittica. Infatti una curva razionale esistente sopra una tale F dovrebbe necessariamente fare parte di una delle curve C sopra considerate, perchè una curva razionale non può contenere un'involuzione ellittica;

---

[17]) Ciò in virtù del fatto ormai classico che ogni superficie di genere geometrico $p_g = 0$ (conseguenza della condizione $\varrho_0 = 0$) e d'irregolarità $p > 1$ è birazionalmente equivalente ad una rigata di genere p. Ved. ENRIQUES-CAMPEDELLI, *Sulla classificazione delle superficie algebriche particolarmente di genere zero*, «Rend. del Seminario Mat. della R. Università di Roma» (1934/XII), p. 81.

[18]) ENRIQUES-CAMPEDELLI, Loco cit., pp. 83 e 117.

[19]) Loco cit., p. 83.

[20]) Conclusione che incontrasi già in BAGNERA e DE FRANCHIS, Loco cit., p. 233.

e d'altra parte, quando il genere π delle C è >1, le C sono tutte curve irriducibili, mentre se $\pi = 1$ può soltanto accadere che qualche C si riduca ad una curva ellittica irriducibile contata multiplamente[21]).

In conclusione:

La riemanniana d'una superficie birazionalmente equivalente (senza eccezioni) ad una rigata ellittica è caratterizzata dal valore 2 di ciascuna delle connessioni (lineare e superficiale) e dall'esistenza di un ciclo superficiale semplicemente connesso. Essa risulta in conseguenza a torsione nulla.

Se la superficie è birazionalmente equivalente con eccezioni ad una rigata ellittica, la sua riemanniana algebrica è birazionalmente equivalente, nel campo reale, alla riemanniana di questa.

---

[21]) ENRIQUES-CAMPEDELLI, Loco cit., p. 84.