Eine Kennzeichnung der Kugel.

Von

W. SCHERRER (Bern).

(Als Manuskript eingegangen am 27. Dezember 1939.)

Einleitung.

Die ausgezeichnete Stellung der Kugel als Aichfläche der Euklidischen Metrik findet ihren Ausdruck in zahlreichen und ganz verschiedenartigen Kennzeichnungen, die für dieses Gebilde gefunden worden sind[1]. Im folgenden soll eine weitere Charakterisierung der Kugel angegeben werden, die meines Wissens bis jetzt der Aufmerksamkeit der Geometer entgangen ist.

Bezeichnet man nämlich das Linienintegral über die Torsion $\tau(s)$ einer geschlossenen Raumkurve, für die s den Parameter der Bogenlänge bedeutet, als die «Totaltorsion» T der Raumkurve

$$T = \oint \tau(s)\, ds\,, \tag{1}$$

so gilt folgender

Satz: Auf einer Kugel ist die Totaltorsion jeder geschlossenen Kurve Null und umgekehrt ist jede Fläche mit dieser Eigenschaft Teil einer Kugel.

Der Beweis dafür, dass die Totaltorsion jeder Kugelkurve Null ist, macht keine Mühe und soll deshalb gleich vorweggenommen werden. Bezeichnet man mit $\varkappa(s)$ die Krümmung und mit

$$\varrho(s) = \frac{1}{\varkappa(s)}$$

den Krümmungsradius einer Raumkurve, so besteht bekanntlich[2] die Bedingung dafür, dass die Kurve ganz auf einer Kugel vom Radius R verläuft, in der Relation

[1] Betreffend Kennzeichnungen der Kugel vgl. etwa HILBERT-COHNVOSSEN, «Anschauliche Geometrie», sowie BONNESEN-FENCHEL, «Theorie der konvexen Körper».

[2] Vgl. etwa BLASCHKE, «Vorlesungen über Differentialgeometrie», Bd. I.

$$\tau = \frac{\varrho'}{\sqrt{R^2 - \varrho^2}}$$

wo der Strich wie üblich die Ableitung nach der Bogenlänge bedeutet. Es folgt also unmittelbar

$$\oint \tau \, ds = \arcsin \left(\frac{\varrho}{R} \right) \Big|_a^e$$

wo die rechte Seite die Differenz der Bestimmungen der Arcusfunktion an einer beliebigen Stelle nach und vor der Durchlaufung bedeutet. Unterwirft man also die Kurve einer auch in ϱ und τ stetigen Deformation, welche die Krümmung an einer einzigen Stelle ungeändert lässt, so kann sich die Totaltorsion nicht ändern. Durch eine derartige Deformation kann man aber die ursprüngliche Kurve in einen Kreis verwandeln, woraus das Verschwinden der Totaltorsion folgt. Will man übrigens bei diesem Prozess das Auftreten von Stellen $\varrho = 0$ vermeiden, so muss der als Endgestalt in Aussicht genommene Kreis so oft durchlaufen werden, als die ursprüngliche Kurve Doppelpunkte hat.

Der Beweis der Umkehrung ist viel umständlicher, womit ich allerdings nicht behaupten will, dass der nachfolgende Weg nicht noch wesentlich abgekürzt werden könnte. Das Ziel soll nicht eine kürzeste Berechnung sein, sondern eine Darstellung, bei der die räumliche Bedeutung der auftretenden Grössen soweit als möglich ersichtlich wird.

§ 1. Der EULER'sche Differentialausdruck.

Wir gehen jetzt also von der Annahme aus, dass die Totaltorsion jeder geschlossenen Kurve $\mathfrak{x}(t)$ auf der Fläche

$$\Phi(\mathfrak{x}) = 0 \tag{2}$$

Null sei. Da t ein beliebiger Parameter sein soll, haben wir für die Torsion den allgemeinen Ausdruck

$$\tau(t) = \frac{[\dot{\mathfrak{x}}, \ddot{\mathfrak{x}}] \dddot{\mathfrak{x}}}{[\dot{\mathfrak{x}}, \ddot{\mathfrak{x}}]^2} \tag{3}$$

anzusetzen. Für die Totaltorsion erhalten wir dann

$$\oint \tau(t) \sqrt{\dot{\mathfrak{x}}^2} \, dt = \oint F(\dot{\mathfrak{x}}, \ddot{\mathfrak{x}}, \dddot{\mathfrak{x}}) \, dt \tag{4}$$

mit

$$F(\dot{\mathfrak{x}}, \ddot{\mathfrak{x}}, \dddot{\mathfrak{x}}) = \frac{[\dot{\mathfrak{x}}, \ddot{\mathfrak{x}}] \dddot{\mathfrak{x}}}{[\dot{\mathfrak{x}}, \ddot{\mathfrak{x}}]^2} \sqrt{\dot{\mathfrak{x}}^2} \tag{5}$$

Gemäss unserer Forderung muss offenbar das Integral (4) unter der Nebenbedingung (2) stationär sein. Nach den Regeln der Variationsrechnung führt dies auf die Gleichung

$$[F]_{\mathfrak{x}} = \lambda\, \Phi_{\mathfrak{x}} \tag{6}$$

wo links der Euler'sche Differentialausdruck

$$[F]_{\mathfrak{x}} \equiv F_{\mathfrak{x}} - \dot{(F_{\dot{\mathfrak{x}}})} + \ddot{(F_{\ddot{\mathfrak{x}}})} - \dddot{(F_{\dddot{\mathfrak{x}}})} \tag{7}$$

gemeint ist. Der Vektorindex soll jeweils den Gradienten nach dem betreffenden Vektor bedeuten. Zum Beispiel:

$$F_{\dot{\mathfrak{x}}} = \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1}, \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2}, \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_3}\right)$$

Berechnet man nun die in (7) stehenden Gradienten und führt man nachträglich an Stelle des Parameters t die Bogenlänge s ein, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}
F_{\mathfrak{x}} &= 0 \\
F_{\dot{\mathfrak{x}}} &= \frac{[\mathfrak{x}'', \mathfrak{x}''']}{\mathfrak{x}''^2} - \frac{[\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'']\,\mathfrak{x}'''}{\mathfrak{x}''^2} \cdot \mathfrak{x}' \\
F_{\ddot{\mathfrak{x}}} &= \frac{[\mathfrak{x}''', \mathfrak{x}']}{\mathfrak{x}''^2} - 2 \cdot \frac{[\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'']\,\mathfrak{x}'''}{(\mathfrak{x}''^2)^2} \cdot \mathfrak{x}'' \\
F_{\dddot{\mathfrak{x}}} &= \frac{[\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'']}{\mathfrak{x}''^2}
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

In diesen Gleichungen habe ich links die Ableitungen nach t absichtlich noch stehen lassen, weil das Anschreiben von Strichen die Einführung der Bogenlänge vor der Gradientenbildung bedeuten würde. Zwecks weiterer Berechnung führen wir nun das begleitende Dreibein der Kurve

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{x}' \; ; \; \mathfrak{n} = \frac{\mathfrak{x}''}{|\mathfrak{x}''|} \; ; \; \mathfrak{b} = [\mathfrak{t}, \mathfrak{n}] \tag{9}$$

ein. Es genügt den Formeln von Frenet:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{t}' &= \qquad\quad \varkappa\, \mathfrak{n} \\
\mathfrak{n}' &= -\varkappa\, \mathfrak{t} \qquad\qquad + \tau\, \mathfrak{b} \\
\mathfrak{b}' &= \qquad\quad -\tau\, \mathfrak{n}
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Nun erhält man an Stelle von (8):

$$\begin{aligned}
F_{\mathfrak{x}} &= 0 \\
F_{\dot{\mathfrak{x}}} &= \varkappa\, \mathfrak{b}
\end{aligned}$$

$$F_{\ddot{\mathfrak{x}}} = \left(\frac{1}{x}\,\mathfrak{b}\right)'$$

$$F_{\dddot{\mathfrak{x}}} = \left(\frac{1}{x}\,\mathfrak{b}\right)$$

Diese Werte sind einzusetzen in (7), wobei natürlich jetzt alle Ableitungen nach der Bogenlänge zu nehmen sind. Die Rechnung liefert unmittelbar

$$[F]_{\mathfrak{x}} = x\,\tau\,\mathfrak{n} - x'\,\mathfrak{b}$$

Ersetzen wir noch den Gradienten $\Phi_{\mathfrak{x}}$ in (6) durch die Flächennormale $\mathfrak{N}$, so erhalten wir schliesslich an Stelle von (6)

$$\underline{x\,\tau\,\mathfrak{n} - x'\,\mathfrak{b} = \mu\,\mathfrak{N}} \tag{11}$$

Diese Gleichung ist also eine notwendige Bedingung dafür, dass die Totaltorsion jeder geschlossenen Kurve auf unserer Fläche (2) Null ist.

Aus dieser Gleichung soll im folgenden geschlossen werden, dass unsere Fläche eine Kugel sein muss. Zu diesem Zweck muss auch ihre linke Seite, vor allem die Torsion τ, in Beziehung zur Fläche gebracht werden.

§ 2. Eine Formel für die Torsion.

Wir führen neben dem begleitenden Dreibein $\mathfrak{t}, \mathfrak{n}, \mathfrak{b}$ noch das Dreibein $\mathfrak{t}, \mathfrak{N}, [\mathfrak{t}, \mathfrak{N}]$ ein. Dabei soll $\mathfrak{N}$ für den Beschauer, der in Richtung von $\mathfrak{t}$ auf die Normalebene der Kurve blickt, nach unten zeigen. Bezeichnet man nun mit Θ denjenigen Winkel, um den man $\mathfrak{N}$ in negativem Sinne drehen muss, bis es mit $\mathfrak{n}$ zusammenfällt, so gilt:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{n} &= \cos\Theta\,\mathfrak{N} + \sin\Theta\,[\mathfrak{t}, \mathfrak{N}] \\ \mathfrak{b} &= -\sin\Theta\,\mathfrak{N} + \cos\Theta\,[\mathfrak{t}, \mathfrak{N}] \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Wir berechnen nun τ mit Hilfe der aus (10) folgenden Gleichung

$$\tau = -\,\mathfrak{b}'\,\mathfrak{n}$$

Das Ergebnis lautet, wenn man zum Schluss wieder $\mathfrak{t} = \mathfrak{x}'$ setzt:

$$\tau = \Theta' + [\mathfrak{N}, \mathfrak{N}']\,\mathfrak{x}' \tag{13}$$

Zwecks weiterer Auswertung dieser Relation beziehen wir unsere Fläche auf die Krümmungslinien als Parameterkurven. Wir stellen sie also dar in der Gestalt

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}\,(u, v) \tag{14}$$

und bezeichnen mit $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ die den Linien $v = \text{konst.}$ und $u = \text{konst.}$ entsprechenden Hauptkrümmungen. Die Orientierung der Parameterlinien soll dabei so sein, dass gilt

$$\mathfrak{N} = \frac{[\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v]}{|[\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v]|} \tag{15}$$

Es gelten jetzt die Formeln von Rodrigues

$$\mathfrak{N}_u = -\varkappa_1\, \mathfrak{x}_u\,; \qquad \mathfrak{N}_v = -\varkappa_2\, \mathfrak{x}_v \tag{16}$$

und es folgt

$$[\mathfrak{N}, \mathfrak{N}']\, \mathfrak{x}' = (\varkappa_2 - \varkappa_1)\, |\mathfrak{x}_u|\, |\mathfrak{x}_v|\, u'\, v'$$

Bezeichnet man schliesslich noch mit α denjenigen Winkel, um den man — von der Spitze von $\mathfrak{N}$ aus betrachtet — die erste Hauptrichtung $\mathfrak{x}_u$ in positivem Sinne drehen muss, bis sie mit $\mathfrak{x}'$ zusammenfällt, so gilt:

$$|\mathfrak{x}_u|\, u' = \cos\alpha\,; \quad |\mathfrak{x}_v|\, v' = \sin\alpha \tag{17}$$

Also erhält man an Stelle von (13) die Formel

$$\boxed{\tau = \Theta' + \frac{1}{2}(\varkappa_2 - \varkappa_1)\sin 2\alpha} \tag{18}$$

Da für geodätische Linien $\Theta = 0$ ist, stellt der zweite Term die sogenannte «geodätische Torsion» dar. Dieselbe ist also hier auf eine Form gebracht, die gestattet, einige bekannte Eigenschaften bezüglich der Torsion besonderer Kurven auf einer Fläche ohne weiteres abzulesen[3]).

§ 3. Beweis der Umkehrung.

Wir führen jetzt (12) und (18) in (11) ein und erhalten

$$\frac{1}{2}(\varkappa_2 - \varkappa_1)\sin 2\alpha - \varkappa\sin\Theta - (\varkappa\cos\Theta)' = 0 \tag{19}$$

Bezeichnet man mit $\varkappa_g$ die geodätische Krümmung der betrachteten Kurve und mit $\varkappa_n$ die Krümmung des Normalschnittes in Richtung von $\mathfrak{x}'$, so gilt bekanntlich nach Definition

$$\varkappa\, \mathfrak{n} = \varkappa_n\, \mathfrak{N} + \varkappa_g\, [\mathfrak{t}, \mathfrak{N}] \tag{20}$$

oder, wegen (14)

$$\varkappa_n = \varkappa\cos\Theta\,; \quad \varkappa_g = \varkappa\sin\Theta \tag{21}$$

[3]) Vgl. etwa Duscheck-Mayer, «Lehrbuch der Differentialgeometrie», S. 212.

Setzt man dies in (19) ein, so erhält also unsere ursprüngliche Bedingung (11) folgende Gestalt:

$$\underline{x_n' = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)\sin 2\alpha - x_g} \tag{22}$$

Wir beziehen nun alle hier vorkommenden Grössen auf die Krümmungslinienparameter und führen zu dem Zwecke die Abkürzungen

$$|\mathfrak{x}_u| = e\,; \quad |\mathfrak{x}_v| = g \tag{23}$$

ein. Für die beiden Hauptformen der Fläche erhalten wir mit Rücksicht auf (16):

$$\mathrm{I} = \quad \mathfrak{x}'^2 = e^2 u'^2 + g^2 v'^2 = 1 \tag{24}$$

$$\mathrm{II} = \mathfrak{N}'\,\mathfrak{x}' = x_1 e^2 u'^2 + x_2 g^2 v'^2 = x_n \tag{25}$$

Zufolge (17) und (23) erhalten wir aus (25) die bekannte Relation

$$x_n = x_1 \cos^2\alpha + x_2 \sin^2\alpha \tag{26}$$

Die geodätische Krümmung ist infolge (20) und wegen

$$\mathfrak{x}'' = x\,\mathfrak{n}$$

zu berechnen aus

$$x_g = -[\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'']\,\mathfrak{N} \tag{27}$$

Die Rechnung liefert

$$x_g = -\alpha' + \frac{e_v \cos\alpha - g_u \sin\alpha}{e\,g} \tag{28}$$

Schliesslich benötigen wir noch die Gleichungen von CODAZZI. Dieselben ergeben sich wegen der Festsetzung der Hauptformen nach (24) und (25) zu

$$\frac{\partial x_1}{\partial v} = (x_2 - x_1)\frac{e_v}{e}\,; \qquad \frac{\partial x_2}{\partial u} = (x_1 - x_2)\frac{g_u}{g} \tag{29}$$

Berechnet man nun (22) auf Grund von (26) und (27) und eliminiert hierauf die Grössen $u', v', \frac{\partial x_1}{\partial v}, \frac{\partial x_2}{\partial n}$ mit Hilfe von (17), (23) und (29), so folgt:

$$\underline{\frac{\cos^3\alpha}{e}\frac{\partial x_1}{\partial n} + \frac{\sin^3\alpha}{g}\frac{\partial x_v}{\partial v} - \frac{3}{2}(x_2 - x_1)\sin^2\alpha\cdot\alpha' = 0} \tag{30}$$

In diesen längs jeder Kurve unserer Fläche gültigen Gleichung sind α und α' frei wählbar. Daraus folgt mühelos

$$x_2 \equiv x_1$$

und umgekehrt folgt aus dieser Identität das Bestehen von (30), denn sie liefert zusammen mit (29)

$$\frac{\partial x_1}{\partial n} = \frac{\partial x_2}{\partial n} = 0; \qquad \frac{\partial x_2}{\partial \nu} = \frac{\partial x_1}{\partial \nu} = 0$$

Unsere Fläche besteht also aus lauter Nabelpunkten. Nach einem bekannten Satze ist sie daher Teil einer Kugel. Damit ist der in der Einleitung formulierte Satz vollständig bewiesen. Der natürlich immer mit eingeschlossene und triviale Fall der Ebene wurde nie besonders erwähnt.