Sur la distance des points en lesquels une fonction analytique prend des valeurs données.

Par
PAUL MONTEL (Paris).

(Als Manuskript eingegangen am 14. Dezember 1939.)

1. On sait qu'une fonction $f(z)$ holomorphe dans le cercle-unité et prenant au centre la valeur a ne peut prendre la valeur différente b qu'en des points dont la distance au centre du cercle est supérieure à un nombre positif qui ne dépend que de a, b et du maximum M du module de la fonction dans le cercle[1]). Si l'on remplace la distance euclidienne par la distance non-euclidienne définie en prenant le cercle-unité comme cercle fondamental, on obtient le même résultat pour deux points du cercle arbitrairement placés.

La raison de l'existence du minimum pour la distance des zéros de $f(z)-a$ et de $f(z)-b$ réside dans le fait qu'une famille de fonctions holomorphes dans le cercle-unité et dont les modules sont bornés par un nombre fixe M est normale dans l'intérieur de ce cercle. On obtient le même résultat pour toute famille normale. D'une manière précise: si une famille de fonctions holomorphes dans le cercle-unité est normale dans l'intérieur de ce cercle, pour tout domaine complètement intérieur au cercle existe un nombre positif δ tel que la distance de deux points en lesquels la fonction prend des valeurs différentes fixes a et b soit supérieure ou égale à δ.

On le voit aisément en remarquant qu'il suffit de se borner aux fonctions prenant la valeur a en un point du domaine (D), intérieur au cercle-unité, qu'on peut supposer être un cercle concentrique. Ces fonctions sont alors uniformément bornées dans tout

[1]) E. LANDAU, The Tohoku Mathematical Journal, t. 5, 1914, p. 104 et 107. — P. SERGESCU, Comptes-Rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris, t. 179, 1924, p. 322.

cercle concentrique contenant (D) et contenu dans le cercle-unité et dans ce cas, le résultat est connu.

L'existence du minimum est ainsi établie d'une manière qualitative. Mais il est parfois difficile d'obtenir la valeur exacte de ce minimum. On a pu la calculer dans le cas de fonctions uniformément bornées ou de fonctions admettant deux valeurs exceptionnelles [2]).

2. Je me propose d'indiquer ici une classe assez générale de fonctions holomorphes dans le cercle-unité pour lesquelles la valeur de δ peut être exactement déterminée ainsi que la fonction pour laquelle ce minimum est atteint.

Ce sont les fonctions $f(z)$ représentées par la série de TAYLOR:

$$f(z) = a + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

pour lesquelles la somme

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|^{\alpha},$$

dans laquelle α est un nombre supérieur à l'unité et b_n une suite de nombres positifs ou nuls telle que

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{b_n} \geqq 1,$$

est bornée par un nombre fixe R^{α}.

On a en effet

$$|f(z) - a| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \varrho^n = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| \cdot \frac{\varrho^n}{b_n}, \qquad \varrho = |z| < 1.$$

Appliquons l'inégalité

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n B_n \leqq \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}, \qquad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1,$$

dans laquelle A_n et B_n sont des nombres positifs et les séries qui y figurent sont convergentes. On aura alors, en supposant $f(z) = b$,

$$|b - a| \leqq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varrho^{n\beta}}{b_n^{\beta}}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

ou

$$|b - a| \leqq R\,[\varphi(\varrho^{\beta})]^{\frac{1}{\beta}},$$

en désignant par $\varphi(z)$ la fonction

$$\varphi(z) = \frac{z}{b_1^{\beta}} + \frac{z^2}{b_2^{\beta}} + \cdots + \frac{z^n}{b_n^{\beta}} + \cdots$$

holomorphe dans le cercle-unité puisque $\overline{\lim} \sqrt[n]{b_n} \geqq 1$.

[2]) P. SERGESCU, loc. cit. note 1.

La fonction $\varphi(\varrho^\beta)$ est croissante; elle est nulle avec ϱ et prend une fois chacune de ses valeurs. Si donc b est une valeur de la fonction $f(z)$, l'équation

$$\varphi(\varrho^\beta) = \left| \frac{b-a}{R} \right|^\beta$$

admet une racine positive δ et ϱ ne peut être inférieur à δ.

Il existe d'ailleurs une fonction pour laquelle l'égalité est atteinte. C'est la fonction

$$a + \frac{R^\beta}{|b-a|^{\beta-1}} \varphi(\delta^{\beta-1} z) = f_0(z).$$

On a, en effet, $f_0(0) = a, f_0(\delta) = \dfrac{R^\beta}{|b-a|^{\beta-1}} \varphi(\delta^\beta) + a = b$,

car on peut toujours supposer que $b-a$ est réel et positif.

D'autre part,

$$f_0(z) = a + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

avec

$$a_n = \frac{R^\beta}{|b-a|^{\beta-1}} \cdot \frac{\delta^{n(\beta-1)}}{b_n^\beta},$$

$$a_n^\alpha b_n^\alpha = \frac{R^{\alpha\beta}}{|b-a|^{\alpha\beta-\alpha}} \cdot \frac{\delta^{n(\alpha\beta-\alpha)}}{b_n^{\alpha\beta-\alpha}} = \frac{R^{\alpha\beta}}{|b-a|^\beta} \cdot \frac{\delta^{n\beta}}{b_n^\beta}$$

car

$$\alpha\beta = \alpha + \beta.$$

On a donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^\alpha b_n^\alpha = \frac{R^{\alpha\beta}}{|b-a|^\beta} \cdot \varphi(\delta^\beta) = R^{\alpha\beta-\beta} = R^\alpha.$$

3. Donnons quelques exemples. Si tous les b_n sont égaux à l'unité, on doit avoir

$$\sum_{n-1}^{\infty} |a_n|^\alpha \leqq R^\alpha.$$

La fonction $\varphi(z)$ est ici

$$\varphi(z) = z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots = \frac{z}{1-z}$$

et δ est donné par l'équation

$$\frac{\delta^\beta}{1-\delta^\beta} = \left| \frac{b-a}{R} \right|^\beta,$$

d'où

$$\delta = \frac{|b-a|}{[R^\beta + |b-a|^\beta]^{\frac{1}{\beta}}} = \frac{|b-a|}{[R^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} + |b-a|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}]^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}}.$$

La fonction limite se met facilement sous la forme

$$f_0(z) = b + \frac{b-a}{\delta} \cdot \frac{z-\delta}{1-\delta^{\beta-1} z} ;$$

c'est une fonction homographique.

En particulier, lorsque $\alpha = 2$, on a $\beta = 2$,

$$\delta = \frac{|b-a|}{\sqrt{R^2 + |b-a|^2}} ,$$

$$f_0(z) = b + \frac{b-a}{\delta} \frac{z-\delta}{1-\delta z} .$$

Ce cas particulier correspond à l'hypothèse que la valeur moyenne quadratique de $f(z) - a$, sur le cercle de rayon un:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} | f(e^{i\theta}) - a|^2 \, d\theta ,$$

est bornée. On peut supposer aussi que la valeur moyenne

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})|^2 \, d\theta = |a|^2 + |a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2 + \cdots$$

est bornée par le nombre R^2 et que a est fixe. Il suffit de remplacer, dans les calculs qui précèdent, R^2 par $R^2 - a^2$.

4. Un autre exemple nous sera donné par les hypothèses

$$\alpha = 2 , \qquad b_n = \sqrt{n} .$$

On obtient alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \, |a_n|^2 = \frac{S}{\pi} \leqq R^2 ,$$

S désignant la valeur de l'aire totale couverte par les points représentatifs de $f(z)$. Calculons

$$\varphi(z) = \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^n}{n} + \cdots = \log \frac{1}{1-z} .$$

La valeur de δ est donnée par l'équation

$$\log \frac{1}{1-\delta^2} = \left| \frac{b-a}{R} \right|^2 ,$$

d'où

$$\delta = \sqrt{1 - e^{-\frac{|b-a|^2}{R^2}}} .$$

La limite est atteinte pour la valeur $z = \delta$ de la fonction

$$f_0(z) = \frac{R^2}{|b-a|} \log \frac{1-\delta^2}{1-\delta z} + b .$$

Toute substitution homographique qui transforme en lui-même le cercle-unité laisse invariante la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{\infty} n \mid a_n \mid^2$ puisque la surface couverte S reste la même. Si donc $f(z)$ prend au point z_0 la valeur a et au point z_1 la valeur b, on peut, par une transformation homographique qui conserve le cercle-unité, amener z_0 à l'origine et z_1 en un point z de module ϱ. Toute transformation homographique de cette nature ne change pas la distance non-euclidienne de deux points si on prend le cercle-unité comme cercle fondamental. Donc, la distance non-euclidienne $[z_0, z_1]$ des points z_0, et z_1 est égale à la distance non-euclidienne $[0, z]$ des points 0 et z, c'est-à-dire $\log \frac{1+\varrho}{1-\varrho}$ et, comme $\varrho \leqq \delta$, on a

$$[z_0, z_1] \leqq \log \frac{1+\delta}{1-\delta}.$$

5. Nous avons supposé que α est supérieur à un. On obtient des résultats semblables pour $\alpha = 1$. Bornons-nous au cas où $b_n = 1$. On a l'inégalité

$$|f(z) - a| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \varrho^n \leqq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \varrho \leqq R\varrho,$$

donc

$$\varrho \geqq \frac{b-a}{R} = \delta.$$

Cette limite est exacte car elle est atteinte pour la fonction

$$f_0(z) = \frac{b-a}{\delta} z + a.$$

De même, si α augmente indéfiniment, β tend vers l'unité; l'inégalité fondamentale devient

$$|a_n| \leqq R, \qquad n = (1, 2, \ldots).$$

On a alors

$$|f(z) - a| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \varrho^n \leqq R \frac{\varrho}{1-\varrho}.$$

δ est donné par l'équation

$$\frac{\delta}{1-\delta} = \frac{|b-a|}{R},$$

d'où

$$\delta = \frac{|b-a|}{R + |b-a|}.$$

La fonction limite est

$$f_0(z) = a + R \frac{z}{1-z}.$$

Ces résultats se déduisent des formules générales du paragraphe 3 en y remplaçant β par l'unité.

6. L'inégalité générale

$$\sum_{n=1}^{\infty} | a_n b_n |^{\alpha} \leqq R^{\alpha}$$

entraîne l'inégalité

$$| f(z) - a | \leqq R [\varphi (\varrho^{\beta})]^{\frac{1}{\beta}}.$$

On en déduit aussitôt que la famille des fonctions $f(z)$ pour lesquelles R est fixe est normale dans l'intérieur du cercle-unité puisque la famille $f(z) - a$ est uniformément bornée dans tout cercle intérieur. Il en résulte que la famille des fonctions dérivées $f'(z)$ est normale et bornée dans l'intérieur du cercle-unité.

Cherchons la limite exacte du maximum du module de $f'(z)$ dans le cercle $|z| \leqq \varrho < 1$. On a

$$z f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n z^n,$$

et, en posant

$$n\, a_n = a'_n, \qquad b_n = n\, b'_n,$$

on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} | a'_n b'_n |^{\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} | a_n b_n |^{\alpha} \leqq R^{\alpha}.$$

Donc

$$| f'(z) | \leqq \frac{R}{\varrho} [\psi (\varrho^{\beta})]^{\frac{1}{\beta}}$$

avec

$$\psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{b'^{\beta}_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\beta} z^n}{b^{\beta}_n}.$$

La limite supérieure est atteinte pour la fonction

$$f'_0(z) = \frac{R}{[\psi(\varrho^{\beta})]^{1-\frac{1}{\beta}}} \frac{\psi(\varrho^{\beta-1} z)}{z}.$$

On a, en effet

$$z f'_0(z) = a'_1 z + a'_2 z^2 + \cdots + a'_n z^n + \cdots,$$

avec

$$a'_n = \frac{R}{[\psi(\varrho^{\beta})]^{1-\frac{1}{\beta}}} \frac{n^{\beta} \varrho^{n(\beta-1)}}{b^{\beta}_n},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a'^{\alpha}_n b'^{\alpha}_n = \frac{R^{\alpha}}{\psi(\varrho^{\beta})} \psi(\varrho^{\beta}) = R^{\alpha}.$$

D'autre part,

$$\varrho f_0'(\varrho) = \frac{R}{[\psi(\varrho^\beta)]^{1-\frac{1}{\beta}}} \psi(\varrho^\beta) = R\,[\psi(\varrho^\beta)]^{\frac{1}{\beta}},$$

et la limite est atteinte au point $z = \varrho$. La fonction $f_0(z)$ s'en déduit aussitôt.

Prenons par exemple $\alpha = 2$, $b_n = 1$. On aura

$$\psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3},$$

$$|f'(z)| \leq R \sqrt{\frac{1+\varrho^2}{(1-\varrho^2)^3}}.$$

La limite est atteinte pour

$$f_0'(z) = R \sqrt{\frac{1+\varrho^2}{(1-\varrho^2)^3}} \cdot \frac{1+\varrho z}{(1-\varrho z)^3},$$

et

$$f_0(z) = a + R \sqrt{\frac{1+\varrho^2}{(1-\varrho^2)^3}}\, \frac{z}{(1-\varrho z)^2}.$$

Soit encore $\alpha = 2$, $b_n = \sqrt{n}$; la fonction $f(z)$ couvre une surface totale dont l'aire est bornée par le nombre πR^2.

$$\psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n z^n = \frac{z}{(1-z)^2}.$$

$$|f'(z)| \leq \frac{R}{1-\varrho^2}.$$

La limite est atteinte pour la fonction

$$f_0'(z) = R\, \frac{1-\varrho^2}{(1-\varrho z)^2}$$

d'où l'on déduit

$$f_0(z) = a + R(1-\varrho^2)\, \frac{z}{1-\varrho z}.$$

7. Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans le cercle-unité. Posons

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|^\alpha = R^\alpha$$

et supposons que le nombre R soit fini.

Nous avons vu que la famille des fonctions $f(z)$ pour lesquelles R est borné est normale dans l'intérieur du cercle-unité. Lorsque R n'est pas borné, on démontre, en remplaçant $f(z)$ par $f(z)/R$, que la famille est normale si aucune fonction limite d'une suite $f(z)/R$ n'a de zéro dans le cercle; que la famille est quasi normale si aucune fonction limite d'une suite de fonctions $f(z)/R$ n'est identiquement nulle[3]). En particulier, on peut affirmer que la famille est quasi normale si $f(z)$ vérifie la relation

$$|f(0)| = |a| \geqq \lambda R,$$

λ désignant un nombre positif fixe.

Supposons cette condition remplie: je dis que la famille est normale dans un cercle concentrique dont le rayon peut être déterminé exactement. Il suffit de trouver un nombre positif δ tel que $f(z)$ ne s'annulle pas pour $|z| < \delta$. Or, si l'on satisfait à l'inégalité

$$|f(z) - a| < \lambda R,$$

$f(z)$ ne peut s'annuler. Mais on a

$$|f(z) - a| \leqq R[\varphi(\varrho^\beta)]^{\frac{1}{\beta}}.$$

Il suffit donc que l'on ait

$$\varphi(\varrho^\beta) < \lambda^\beta.$$

Si φ (1) est inférieur ou égal à λ^β, l'inégalité est toujours vérifiée et la famille est normale dans le cercle-unité.

Si φ (1) est supérieur à λ^β, l'équation

$$\varphi(\delta^\beta) = \lambda^\beta$$

admet une racine unique δ inférieure à l'unité et l'inégalité est vérifiée pour $|z| < \delta$. La famille est normale dans l'intérieur du cercle $|z| < \delta$.

Cette limite est exacte. Considérons en effet la famille des fonctions

$$f_p(z) = p\,[\varphi(\delta^{\beta-1} z) - \varphi(\delta^\beta)], \quad (p = 1, 2, \ldots).$$

On a ici

$$a_n = p\,\frac{\delta^{n(\beta-1)}}{b_n^\beta}, \qquad a_n^\alpha\, b_n^\alpha = p^\alpha\,\frac{\delta^{n\beta}}{b_n^\beta},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^\alpha\, b_n^\alpha = p^\alpha\,\varphi(\delta^\beta) = p^\alpha \lambda^\beta, \qquad R = p\,\lambda^{\beta-1}.$$

D'autre part,

$$f_p(0) = -\,p\,\varphi(\delta^\beta) = -\,p\,\lambda^\beta = -\,\lambda R.$$

Cette suite admet le cercle $|z| < \delta$ comme cercle exact de normalité car le point $z = \delta$ est un point irrégulier en lequel $f_p(\delta) = 0$.

[3]) Voir Paul Montel, Sur les familles de fonctions holomorphes non uniformément bornées (Comptes-Rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris, t. 207, 1938, p. 605). Sur les suites de fonctions non bornées dans leur ensemble (Bulletin de la Société Mathématique de France, t. LXVII, 1939, p. 42).

Par exemple, pour $\alpha = 2$, $b_n = 1$, on a

$$\varphi(\delta^2) = \frac{\delta^2}{1 - \delta^2} = \lambda^2,$$

d'où

$$\delta = \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}}.$$

Pour $\alpha = 2$, $b_n = \sqrt{n}$, on a

$$\varphi(\delta^2) = \log \frac{1}{1 - \delta^2} = \lambda^2,$$

d'où

$$\delta = \sqrt{1 - e^{-\lambda^2}}.$$

Pour $\alpha = 2$, $b_n = \sqrt{n!}$, on a

$$\varphi(\delta^2) = e^{\delta^2} - 1.$$

Donc, lorsque λ est supérieur ou égal à $\sqrt{e - 1}$, la famille est normale dans le cercle-unité; lorsque λ est inférieur à $\sqrt{e - 1}$, la famille est normale dans le cercle concentrique de rayon

$$\delta = \log \sqrt{1 + \lambda^2}.$$