# Beweis des Minkowski'schen Satzes über lineare inhomogene Formen.

Von

N. TSCHEBOTARÖW (KASAN).

(Als Manuskript eingegangen am 13. Dezember 1939.)

In dieser Note gebe ich einen Beweis für den folgenden Satz von MINKOWSKI:

Es seien $n$ reelle lineare Funktionen

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n + b_1, \\ y_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n + b_2, \\ &\cdots \\ y_n &= a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \cdots + a_{nn} x_n + b_n \end{aligned}$$

von der Determinante $D = | a_{ik} |$ gegeben. Es gibt ganze Werte von $x_1\ x_2, \ldots, x_n$ derart, dass

$$| y_1 \cdot y_2 \ldots y_n | \leqq K_n \cdot | D |,$$

wobei die Konstante $K_n$ nur von $n$ abhängt.

Dabei behauptet MINKOWSKI, dass die untere Schranke für $K_n$ gleich $\frac{1}{2^n}$ ist.

Ich habe diesen Satz schon im Jahre 1934 bewiesen und in einer Kasaner Zeitschrift[1]) publiziert. Dieses Resultat war unbekannt geblieben[2]). K. SIEGEL hat diesen Satz auf einem anderen Weg bewiesen und brieflich L. J. MORDELL am 10. X. 1937 mitgeteilt.

---

[1]) N. TSCHEBOTARÖW, Algebraisch-arithmetische Bemerkungen (russisch). Wiss. Schriften der Kasaner Universität *94* (1934), S. 3—16.

[2]) Vgl. Bericht von L. J. MORDELL: MINKOWSKI's theorems and hypotheses on linear forms. C. R. Congrès Intern. des Mathem. Oslo, 1937, S. 226—238, insbes. S. 237.

H. DAVENPORT [3]) hat für ihn einen neuen Beweis gegeben und für $K_n$ die Abschätzung

$$\frac{2^n \cdot \Gamma(1 + \frac{1}{2} n)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

gefunden. Ich glaube, dass mein Beweis auch heute nicht ohne Interesse ist, da meine Abschätzung von $K_n$, $\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}$, wesentlich schärfer ist als die bisher bekannten Abschätzungen für allgemeines $n$. Zu erwähnen ist eine spätere Abschätzung von H. DAVENPORT,

$$K_n = 1 : \left(2n \int_0^\infty \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n dt\right) \infty \frac{1}{2Cn\sqrt{n}}$$

(Brief an mich am 8. III. 1938).

---

Um diesen Satz zu beweisen, bezeichnen wir mit $L$ die untere Grenze der Werte von $|y_1, y_2 \dots y_n|$, die den sämtlichen ganzzahligen Wertesystemen von $x_1, x_2, \dots, x_n$ entsprechen. Für unseren Zweck genügt es zu zeigen, dass

$$L \leqq |D| : 2^{\frac{n}{2}}$$

ist. Wir nehmen das Gegenteil an. Man kann ein ganzzahliges Wertesystem von $x_1, x_2, \dots, x_n$ derart finden, dass

(1) $$L \leqq |y_1 \cdot y_2 \dots y_n| < L + \varepsilon .$$

Ist $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ ein willkürliches Wertesystem, so gilt:

$y_i(x_1 + \xi_1, \dots, x_n + \xi_n) = y_i(x_1, \dots, x_n) + \eta_i(\xi_1, \dots, \xi_n)$, wobei $\eta_i(\xi)$ den homogenen Bestandteil der Funktion $y_i(\xi)$ bedeutet. Es gilt nach der Definition von $L$:

(2) $$\left|\left(y_1(x) + \eta_1(\xi)\right)\left(y_2(x) + \eta_2(\xi)\right) \cdots \left(y_n(x) + \eta_n(\xi)\right)\right| \geqq L.$$

Division von (2) durch (1) ergibt:

(3) $$\left|\left(1 + \frac{\eta_1(\xi)}{y_1(x)}\right)\left(1 + \frac{\eta_2(\xi)}{y_2(x)}\right) \cdots \left(1 + \frac{\eta_n(\xi)}{y_n(x)}\right)\right| > \frac{L}{L + \varepsilon} .$$

Eine solche Ungleichung gilt auch für das Wertesystem

$$-\xi_1, -\xi_2, \dots, -\xi_n,$$

[3]) H. DAVENPORT, Note on a result of Siegel. Acta Arithm. 2 (1937), S. 262 bis 265.

(4) $$\left|\left(1-\frac{\eta_1(\xi)}{y_1(x)}\right)\left(1-\frac{\eta_2(\xi)}{y_2(x)}\right)\cdots\left(1-\frac{\eta_n(\xi)}{y_n(x)}\right)\right| > \frac{L}{L+\varepsilon}\,.$$

Multiplikation von (3) und (4) ergibt:

(5) $$\left|\left(1-\frac{\eta_1^2}{y_1^2}\right)\left(1-\frac{\eta_2^2}{y_2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{\eta_n^2}{y_n^2}\right)\right| > \frac{L^2}{(L+\varepsilon)^2}\,.$$

Nun führen wir die Bezeichnung

$$2^{\frac{n}{2}} L : |D| = a^n$$

ein, so dass unsere Voraussetzung lautet:

(6) $$a > 1\,.$$

Man kann wegen des MINKOWSKI'schen Satzes über homogene lineare Funktionen die Werte von

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$$

derart finden, dass

(7) $$|\eta_1| \leqq \frac{|y_1|}{a}\sqrt{2},\ |\eta_2| \leqq \frac{|y_2|}{a}\cdot\sqrt{2},\quad \ldots |\eta_n| \leqq \frac{|y_n|}{a}\sqrt{2},$$

da das Produkt der rechten Seiten dieser Ungleichungen

$$\frac{|y_1 . y_2 \ldots y_n|}{a^n}\, 2^{\frac{n}{2}} \geqq \frac{L}{a^n}\cdot 2^{\frac{n}{2}} = |D|\,.$$

Genügen den Ungleichungen (7) mehrere Wertesysteme von $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$, so finden wir unter ihnen ein solches, dass das System

$$2\eta_1, 2\eta_2, \ldots, 2\eta_n$$

nicht den Ungleichungen (7) genügt. Dann gilt von mindestens einem $\eta_i$ (es sei dies etwa $\eta_1$):

(8) $$|\eta_1| > \frac{|y_1|}{a\sqrt{2}}\,.$$

Aus (7) folgt wegen (6):

(9) $$-1 < 1 - \frac{\eta_i^2}{y_i^2} < 1 \qquad (i = 2, 3, \ldots, n);$$

ausserdem ergeben (7) und (8):

(10) $$1 - \frac{2}{a^2} \leqq 1 - \frac{\eta_1^2}{y_1^2} < 1 - \frac{1}{2a^2}\,.$$

Nun wollen wir von nun an zwei Fälle unterscheiden:

1) es ist $1 - \frac{\eta_1^2}{y_1^2} > O$. Dann gilt:

$$1 - \frac{1}{2a^2} < O,$$

$$\left|1 - \frac{\eta_1^2}{y_1^2}\right| > 1 - \frac{1}{2a^2}\,.$$

Setzen wir dies in (5) ein und benutzen die Ungleichungen (9), so folgt:

$$1 - \frac{1}{2a^2} > \frac{L^2}{(L+\varepsilon)^2}\,. \tag{11}$$

2) es ist $1 - \frac{\eta_1^2}{y_1^2} \leqq O$. Dann gilt:

$$1 - \frac{2}{a^2} \leqq O\,,$$

$$\left| 1 - \frac{\eta_1^2}{y_1^2} \right| \leqq \frac{2}{a^2} - 1\,;$$

setzen wir dies in (5) ein, so folgt unter Benutzung von (9):

$$\frac{2}{a^2} - 1 > \frac{L^2}{(L+\varepsilon)^2}\,. \tag{12}$$

Jede der Ungleichungen (11), (12) führt zum Widerspruch, da ihre linken Seiten konstant und kleiner als Eins sind (es ist

$$\frac{2}{a^2} - 1 < 2 - 1 = 1)\,,$$

während ihre rechte Seiten bei geeigneter Wahl von $\varepsilon$ beliebig nahe zu Eins werden können. Aus diesem Widerspruch folgern wir:

$$a \leqq 1\,,$$

d. h.

$$L \leqq \frac{|D|}{2^{\frac{n}{2}}}\,,$$

w. z. b. w.