Quelques remarques sur les transformations de Fourier des fonctions de plusieurs variables.

Par

M. PLANCHEREL (Zurich).

(Als Manuskript eingegangen am 12. Dezember 1939.)

Alors que la théorie de la convergence ordinaire des intégrales de FOURIER des fonctions de plusieurs variables présente des difficultés très grandes et est presque inexistante, celle qui est basée sur la notion de convergence en moyenne s'est révélée indépendante du nombre des variables. Nous montrerons au § 1 que les compléments que HILLE, TAMARKIN et OFFORD [1]) y ont apportés dans le cas des fonctions d'une variable s'étendent aussi aux fonctions de plusieurs variables. Nous donnerons ensuite au § 2 une extension aux intégrales de Fourier d'un résultat connu sur la convergence de certaines sommes partielles des séries de FOURIER des fonctions de classe L^2.

1. HILLE et TAMARKIN ont montré que si $g(x)$ est une fonction d'une variable, appartenant à la classe L_1^p, $1 < p < \infty$, la fonction

$$g(x_1 a) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \, \frac{\sin a(x-t)}{x-t} \, dt \tag{1}$$

converge en moyenne d'ordre p vers $g(x)$.

Cette proposition s'étend aux fonctions de plusieurs variables et se formule alors comme suit.

Théorème 1. Si $g(x_1, \ldots, x_n)$ est une fonction de classe L_n^p, $1 < p < \infty$, c'est-à-dire si g est une fonction mesurable de $x_1, \ldots, x_n$ telle que

---

[1]) E. HILLE and J. D. TAMARKIN, On the theory of Fourier transforms (Bulletin of the American Math. Soc., 1933, p. 768—774); E. HILLE, A. C. OFFORD and, J. D. TAMARKIN, Some observations on the theory of Fourier transforms [ibid., 1935, p. 427—436).

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |g(x_1, \ldots, x_n)|^p \, dx_1 \ldots dx_n < \infty, \tag{2}$$

la fonction (3)

$$g(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n) = \frac{1}{\pi^n} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} g(t_1, \ldots, t_n) \prod_{i=1}^{n} \frac{\sin a_i (x_i - t_i)}{x_i - t_i} \, dt_1 \ldots dt_n$$

converge en moyenne d'ordre p vers $g(x_1, \ldots, x_n)$ lorsque $a_1 \to \infty, \ldots, a_n \to \infty$; donc

$$\lim_{a_1 \to \infty, \ldots a_n \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |g(x_1, \ldots, x_n) - g(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n)|^p \, dx_1 \ldots dx_n = 0. \tag{4}$$

La démonstration donnée par HILLE et TAMARKIN repose essentiellement sur les deux propositions suivantes:

a) La fonction «conjuguée» de $g(x)$

$$g^*(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(t)}{x - t} \, dt, \tag{4}$$

où l'intégrale est à calculer comme valeur principale au sens de CAUCHY au point $t = x$, donc comme la limite pour $\varepsilon \to 0$ de

$$\left(\int_{-\infty}^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^{\infty} \right) \frac{g(t)}{x - t} \, dt, \tag{5}$$

existe presque partout et

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g^*(x)|^p \, dx \leq M_p \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^p \, dx, \tag{6}$$

M_p désignant une constante indépendante de $g(x)$. (Théorème de M. RIESZ.)

b) Le théorème 1 est vrai dans le cas particulier d'une fonction $g(x)$ égale à 1 à l'intérieur d'un intervalle et à 0 à l'extérieur de cet intervalle

La proposition a) devient, dans le cas des fonctions de plusieurs variables:

La fonction conjuguée

$$g^*(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{\pi^n} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(t_1, \ldots, t_n)}{(x_1 - t_1) \ldots (x_n - t_n)} \, dt_1 \ldots dt_n \tag{7}$$

existe presque partout et

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} | g^* (x_1 , \ldots , x_n) |^p \, d x_1 \ldots d x_n \leqq$$

$$\leqq M_p^n \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} | g (x_1 , \ldots , x_n) |^p \, d x_1 \ldots d x_n \, . \tag{8}$$

La constante M_p de (8) est la même que celle de (6). Le second membre de (7) est à calculer comme succession d'intégrales simples

$$\frac{1}{\pi^n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d t_1}{x_1 - t_1} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d t_2}{x_2 - t_2} \cdots \right.$$

$$\left. \cdots \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d t_{n-1}}{x_{n-1} - t_{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g (t_1 , \ldots , t_n)}{x_n - t_n} \, d t_n \right) \right] \cdots \right\} , \tag{9}$$

chaque intégrale simple étant, elle-même, calculée comme valeur principale au sens de CAUCHY. Le résultat de l'intégration (9) est indépendant de l'ordre des intégrations.

Cette proposition se démontre comme suit. La fonction conjuguée $g_n^* (x_1 , \ldots , x_n)$ de $g (x_1 , \ldots , x_n)$ relativement à x_n

$$g_n^* (x_1 , \ldots , x_n) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g (x_1 , \ldots , x_{n-1} , t_n)}{x_n - t_n} \, d t_n$$

existe, en vertu de a), et

$$\int_{-\infty}^{\infty} | g_n^* |^p \, d x_n \leqq M_p \int_{-\infty}^{\infty} | g |^p \, d x_n \, .$$

Par suite,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} | g_n^* |^p \, d x_1 \ldots d x_n \leqq M_p \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} | g |^p \, d x_1 \ldots d x_n \, .$$

g_n^* appartient donc à L_n^p. Calculant alors la fonction conjuguée $g_{n-1}^* (x_1 , \ldots , x_n)$ de $g_n^* (x_1 , \ldots , x_n)$ relativement à la variable x_{n-1}, on aura

$$g_{n-1}^* (x_1 , \ldots , x_n) =$$

$$\frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d t_{n-1}}{x_{n-1} - t_{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g (x_1 , \ldots , x_{n-2} \, , \, t_{n-1} \, , \, t_{n-2})}{x_n - t_n} \, d t_n \right)$$

et

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} | g_{n-1}^* |^p \, d x_1 \ldots d x_n \leqq M_p^2 \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} | g |^p \, d x_1 \ldots d x_n \, .$$

Le raisonnement se laisse répéter. Ayant obtenu une fonction g^*_{n-i} on calculera sa conjuguée relativement à la variable x_{n-i-1} et on lui appliquera l'inégalité (6). La fonction obtenue pour $i = n-1$ n'est autre que la fonction $g^*(x_1, \ldots, x_n)$ définie par (7) et l'inégalité correspondante n'est autre que l'inégalité (8).

La fonction g^* définie par (7) et (9) existe donc presque partout et appartient à L^p_n. Pour voir qu'elle est indépendante de l'ordre dans lequel on a effectué les intégrales simples, on établira d'abord, par calcul direct, qu'il en est bien ainsi pour une fonction égale à 1 dans un intervalle n-dimensionnel et à 0 en dehors de cet intervalle. On s'appuiera ensuite sur le caractère linéaire de la transformation $g \to g^*$, sur l'inégalité (8) et sur la possibilité d'approcher en moyenne d'ordre p la fonction g par des fonctions-escaliers.

Quant à la proposition b), son extension au cas de n variables affirme que

$$\frac{1}{\pi^n}\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\cdots\int_{\alpha_n}^{\beta_n}\prod_{i=1}^{n}\frac{\sin a_i(x_i-t_i)}{x_i-t_i}\,dt_1\ldots dt_n$$

converge en moyenne d'ordre p vers la fonction égale à 1 dans l'intervalle n-dimensionnel $(\alpha_1, \beta_1; \ldots; \alpha_n, \beta_n)$ et à 0 en dehors. Comme cette intégrale n-uple est un produit de n intégrales simples, la démonstration se ramène sans autre à celle du cas particulier $n = 1$ donnée par HILLE et TAMARKIN.

Le théorème 1 est ainsi établi. Sur la base de ce théorème l'extension aux fonctions de plusieurs variables des autres résultats donnés par HILLE, TAMARKIN et OFFORD dans les Notes citées est immédiate.

2. On sait que, si $f(x)$ appartient à la classe L^2_1, l'expression

$$F(x, a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a} f(t)\, e^{-xt}\, dt \tag{10}$$

convergeant alors en moyenne d'ordre 2 vers la transformée de FOURIER $F(x)$ de $f(x)$, il existe une suite $a_\varrho \to \infty$ telle que $\lim_{\varrho\to\infty} F(x, a_\varrho) = F(x)$ presque partout. Nous montrerons que la suite a_ϱ peut être prise *indépendante* de la fonction $f(x)$, lorsque sa croissance est assez rapide. Une propriété analogue a été trouvée par A. KOLMOGOROFF et J. MARCINKIEWICZ[2]) pour les sommes

[2]) A. KOLMOGOROFF, Une contribution à l'étude de la convergence des séries de Fourier (Fundamenta math., vol. 5, 1924, p. 96—97); J. MARCINKIEWICZ, A new proof of a theorem on Fourier series (Journal London Math. Soc., vol. 8, 1933, p. 279).

partielles de la série de FOURIER d'une fonction de carré intégrable. La méthode de ces auteurs se transpose aisément au cas de l'intégrale de FOURIER et conduit au théorème suivant.

Théorème 2. Si $f(x)$ appartient à la classe L_1^2 et si la suite positive a_ϱ est telle que $\frac{a_{\varrho+1}}{a_\varrho} > \lambda > 1, \varrho = 1, 2, 3, \ldots,$ la limite $\lim\limits_{\varrho \to \infty} F(x, a_\varrho)$ existe presque partout et est égale à la transformée de FOURIER de $f(x)$.

Un théorème analogue a lieu pour les fonctions de plusieurs variables. Il suffira que nous l'énoncions et que nous le démontrions pour les fonctions de deux variables.

Théorème 3. Si $f(x,y)$ appartient à la classe L_2^2 et si les deux suites positives a_ϱ, b_ϱ, $\varrho = 1, 2, 3, \ldots$, sont telles que

$$\frac{a_{\varrho+1}}{a_\varrho} > \lambda > 1, \ \frac{b_{\varrho+1}}{b_\varrho} > \lambda > 1, \ \frac{a_\varrho}{b_\varrho} < \lambda', \ \frac{b_\varrho}{a_\varrho} < \lambda',$$

la limite pour $\varrho \to \infty$ de la fonction

$$F(x, y; a_\varrho, b_\varrho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a_\varrho}^{a_\varrho} \int_{-b_\varrho}^{b_\varrho} f(\xi, \eta)\, e^{-i(x\xi + y\eta)}\, d\xi\, d\eta$$

existe presque partout et est égale à la transformée de FOURIER de $f(x, y)$.

La démonstration du théorème 3 se base sur les deux lemmes suivants.

Lemme 1. Soit $a_\varrho, a'_\varrho, b_\varrho, b'_\varrho$, $\varrho = 1, 2, 3, \ldots$, 4 suites de nombres positifs tels que $\frac{a'_\varrho}{a_\varrho} > \lambda > 1$, $\frac{b'_\varrho}{b_\varrho} > \lambda$, $a_\varrho < a'_\varrho < a_{\varrho+1}$, $b_\varrho < b'_\varrho < b_{\varrho+1}$ et soit $D_\varrho = D(a_\varrho, a'_\varrho; b_\varrho, b'_\varrho)$ la portion du carré $(|x| < a'_\varrho, |y| < b'_\varrho)$ non contenue dans le carré $(|x| < a_\varrho, |y < b_\varrho)$. Soit $f(x, y)$ une fonction intégrable dans tout domaine borné et nulle dans chacun des domaines D_ϱ $(\varrho = 1, 2, 3, \ldots)$. Désignons par $s(x, y; a, b)$ et $\sigma(x, y; a, b)$ les fonctions

$$s(x, y; a, b) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} d\xi \int_{-b}^{b} f(\xi, \eta)\, e^{-i(x\xi + y\eta)}\, d\eta,$$

$$\sigma(x, y; a, b) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} d\xi \int_{-b}^{b} f(\xi, \eta) \left(1 - \frac{|\xi|}{a}\right)\left(1 - \frac{|\eta|}{b}\right) e^{-i(x\xi + y\eta)}\, d\eta \tag{11}$$

Alors, en chaque point (x, y) où les 4 suites

$$\sigma(x, y; a_\varrho, b_\varrho),\ \sigma(x, y; a'_\varrho, b_\varrho),\ \sigma(x, y; a_\varrho, b'_\varrho),\ \sigma(x, y; a'_\varrho, b'_\varrho)$$

ont une limite commune $\sigma(x, y)$ lorsque $\varrho \to \infty$, la suite $s(x, y; a_\varrho, b_\varrho)$ a la même limite.

Les hypothèses faites montrent en effet que

$$s(x, y; a_\varrho, b_\varrho) = s(x, y; a'_\varrho, b_\varrho) = s(x, y; a_\varrho, b'_\varrho) = s(x, y; a'_\varrho, b'_\varrho)$$

et que

$$a'_\varrho\, b'_\varrho\, \sigma(x, y; a'_\varrho, b'_\varrho) - a'_\varrho\, b_\varrho\, \sigma(x, y; a'_\varrho, b_\varrho) - a_\varrho\, b'_\varrho\, \sigma(x, y; a_\varrho, b'_\varrho) + \\ + a_\varrho\, b_\varrho\, \sigma(x, y; a_\varrho, b_\varrho) = (a'_\varrho - a_\varrho)(b'_\varrho - b_\varrho)\, s(x, y; a_\varrho, b_\varrho)$$

Par suite,

$$s(x, y; a_\varrho, b_\varrho) = \sigma(x, y; a'_\varrho, b'_\varrho) + \frac{a_\varrho}{a'_\varrho - a_\varrho}\left[\sigma(x, y; a'_\varrho, b'_\varrho)\right. \\ \left. - \sigma(x, y; a'_\varrho, b_\varrho)\right] + \frac{b_\varrho}{b'_\varrho - b_\varrho}\left[\sigma(x, y; a'_\varrho, b'_\varrho) - \sigma(x, y; a_\varrho, b'_\varrho)\right] \\ + \frac{a_\varrho\, b_\varrho}{(a'_\varrho - a_\varrho)(b'_\varrho - b_\varrho)}\left[\sigma(x, y; a'_\varrho, b'_\varrho) - \sigma(x, y; a'_\varrho, b_\varrho)\right. \\ \left. - \sigma(x, y; a_\varrho, b'_\varrho) + \sigma(x, y; a_\varrho, b_\varrho)\right]$$

Lorsque $\varrho \to \infty$, les crochets tendent vers zéro et leurs coefficients restent bornés. Par suite,

$$\lim_{\varrho \to \infty} s(x, y; a_\varrho, b_\varrho) = \lim \sigma(x, y; a'_\varrho, b'_\varrho) = \sigma(x, y)\,.$$

Lemme 2. Si la fonction $f(x, y)$ appartient à la classe L_2^2, la limite pour $a \to \infty$ et $b \to \infty$ de la fonction $\sigma(x, y; a, b)$ définie par (11) existe presque partout et est égale à la transformée de FOURIER de $f(x, y)$, pourvu que dans le passage à la limite. $\frac{a}{b}$ et $\frac{b}{a}$ restent bornés.

Cette propriété de la sommation de CESÀRO (C1) de l'intégrale de FOURIER a été démontrée dans le cas des fonctions d'une variable[3]. La démonstration s'étend sans changement essentiel aux fonctions de plusieurs variables. Il suffit de substituer à la propriété pour l'intégrale

[3] M. PLANCHEREL, Sur la convergence et sur la sommation par les moyennes de Cesàro de $\lim_{z \to \infty} \int_0^z f(x) \cos xy\, dx$ (Math. Annalen, Bd. 76, 1915, S. 315—326).

$$\frac{1}{a}\int_{-\delta}^{\delta} f(x+\xi)\,\frac{\sin^2\dfrac{a\xi}{2}}{\xi^2}\,d\xi$$

de converger presque partout vers $f(x)$ lorsque $a \to \infty$ celle, récemment démontrée[4]), de l'intégrale

$$\frac{1}{ab}\int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\delta}^{\delta} f(x+\xi, y+\eta)\,\frac{\sin^2\dfrac{a\xi}{2}\sin^2\dfrac{b\eta}{2}}{\xi^2\eta^2}\,d\xi\,d\eta$$

de converger presque partout vers $f(x, y)$ lorsque $a \to \infty$, $b \to \infty$, pourvu que $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{b}{a}$ restent bornés dans le passage à la limite.

Si la fonction lacunaire considérée dans le lemme 1 appartient à la classe L_2^2 et si, en plus des conditions qui y sont imposées aux suites a_ϱ, a'_ϱ, b_ϱ, b'_ϱ on ajoute les suivantes

$$\frac{a_\varrho}{b_\varrho} < \lambda', \quad \frac{b_\varrho}{a_\varrho} < \lambda', \quad \frac{a'_\varrho}{b'_\varrho} < \lambda', \quad \frac{b'_\varrho}{a'_\varrho} < \lambda',$$

où λ' est une quantité fixe quelconque supérieure à 1, les lemmes 1 et 2 entraînent l'exactitude du théorème 3 pour cette fonction lacunaire.

Pour établir le théorème 3 dans toute sa généralité, nous aurons simplement à exprimer la fonction f comme somme de deux fonctions lacunaires g, g' satisfaisant aux conditions ci-dessus. Nous définirons pour cela la fonction g

par $g = 0$ dans $D(a_{2\varrho-1}, a_{2\varrho}; b_{2\varrho-1}, b_{2\varrho})$
et par $g = f$ dans $D(a_{2\varrho}, a_{2\varrho+1}; b_{2\varrho}, b_{2\varrho+1})$,

la fonction g'

par $g' = f$ dans $D(a_{2\varrho-1}, a_{2\varrho}; b_{2\varrho-1}, b_{2\varrho})$
et par $g' = 0$ dans $D(a_{2\varrho}, a_{2\varrho+1}; b_{2\varrho}, b_{2\varrho+1})$.

---

[4]) J. MARCINKIEWICZ and A. ZYGMUND, On the summability of double Fourier series (Fundamenta math., vol. 32, 1939, p. 122—132).