

# Doppelkreuzhaube.

Von

K. MERZ (Chur).

(Mit 9 Abbildungen im Text.)

(Als Manuskript eingegangen am 16. August 1940)

Durch eine gerade achtseitige Pyramide über regelmässiger Grundfläche werden ihre vier Diagonalebene gelegt, wodurch sie in acht Teilpyramiden oder Zellen zerlegt wird, von denen vier voneinander getrennte herausgenommen werden, so dass dadurch vier Lücken zwischen den vier bleibenden Zellen entstehen, die an der gemeinsamen Höhe als vierfache Strecke,  $OS$  in Abb. 1<sub>o</sub>, zusammenstossen. Durch  $OS$  gehen die vier Schnittflächen, wie z. B.

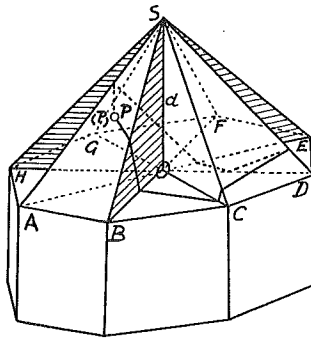


Abb. 1<sub>o</sub>

$ASE$ , die je als eine Fläche gezählt werden und die als rechtwinklige Dreiecke angenommen sind. Die vier Zellen sind auf ein achtseitiges Prisma gesetzt, dessen Raum durch die vier Löcher  $OAB$ ,  $OCD$ ,  $OEF$ ,  $OGH$  zu den Raumteilen der Zellen geöffnet ist, während die Zwischenflächen  $OBC$ ,  $ODE$ ,  $OFG$ ,  $OHA$  das Prisma oben abschliessen, wie dies auch durch dessen Grundfläche geschieht. Man hat also an Flächen  $f = 21$ , an Ecken  $e = 18$  und an Kanten  $k = 40$ , wobei  $OS$  als vierfache Strecke nicht gezählt wird, da sie

keine der vier Flächen begrenzt, die durch sie gehen. Die Charakteristik ist  $c = e - k + f = -1$  und die Zusammenhangszahl  $h = 3 - c = 4$ . Jede Zelle, nach unten geöffnet, hat eine äussere Seitenfläche wie  $SAB$  und zwei innere Flächen wie  $SOA$  und  $SOB$  als Hälften von Schnittflächen durch die vierfache Strecke  $OS$ . Die Doppelkreuzhaube, unten offen am Prisma, hat also 16 Flächen und 8 Halbflächen, also 20 Flächen.

Durch Bildung der Doppelkreuzhaube aus ihren verschiedenen Netzen, erweist sie sich als einseitig, indem durch die Aufklappung *Wendestrecken* entstehen, an denen Oberseite  $o$  und Unterseite  $u$  des Netzes sich aneinanderfügen. Der Verlauf der Wendestrecken gibt geschlossene Streckenzüge, welche in der Gesamtfläche der Kreuzhaube die beiden Netzseiten  $o$  und  $u$  trennen. In den folgenden acht Fällen ergeben die ersten zwei als Wendestrecken nur Kanten, während bei den übrigen auch die vierfache Strecke dazutritt.

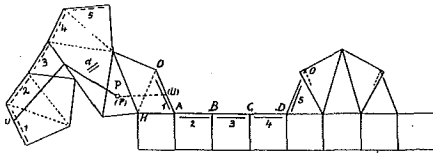


Abb. 1.

1. Fünf Wendestrecken um ein Doppelloch entstehen aus dem Netz Abb. 1. An der Zwischenfläche  $OHA$  wird an der punktierten Seite  $OH$  die anstossende Halbfläche zuerst nach oben geklappt, worauf die nächsten beiden anstossenden Flächen entgegenguklappen sind, in welcher Weise weiter zu klappen ist, bis die Strecken 2 zu einer Wendestrecke sich schliessen, wie auch die übrigen Strecken 1 und bis 5. Damit entsteht nach Abb. 1, das Fünfeck  $OABCD$ , welches zwei Löcher einschliesst. Links dieses Streckenzuges, die Kreuzhaube von oben betrachtet, liegt die Unterseite  $u$  des Netzes, die sich damit, am Modell als schraffiert, an zwei Seitenflächen  $SAB$  und  $SCD$  zeigt an der Zwischenfläche  $OBC$  und an den vier Halbflächen  $SOA, SOB, SOC, SOD$ , also zusammen an fünf Flächen, so dass das Wendungsverhältnis  $5 : 20$  wird zur Gesamtfläche. Die übrigen 15 Flächen zeigen aussen die Oberseite  $o$  des Netzes, im Innern der Kreuzhaube also  $u$ . Von  $P$  aus ist im Netz ein Weg in  $o$  nach  $U$  und von  $(U)$  in  $u$  zurück nach  $(P)$  als Gegenpunkt unter  $P$ . Dieser Weg verläuft durch 8 Flächen, durch 2 Seitenflächen, 2 Zwischenflächen und 4 Schnittflächen, wobei in

einer von diesen die vierfache Strecke  $d$  geschnitten wird und zwar im Netz Abb. 1, in der ganz gelassenen, während die übrigen drei zu Halbflächen geteilt sind, um die Durchdringungen zu ermöglichen, wobei sich alle gleichseitig schliessen  $o$  an  $o$ . Ein solcher Weg  $P$  ( $P$ ) ist in Abb. 1, eingezeichnet, aber mit Annahme von  $P$  in einer vordern Fläche.

2. Fünf Wendestrecken um eine Doppellücke entstehen aus dem Netz Abb. 2 Die an  $OA$  und  $OH$  anliegenden Flächen werden nach oben geklappt, so dass die Strecken  $OS$  zusammenfallen, worauf die nächste an der Fläche mit  $P$  liegende

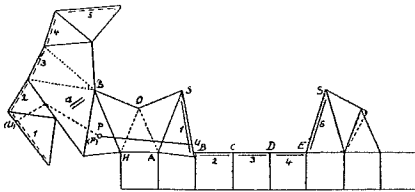


Abb. 2

Diagonalfäche zurückzuklappen ist, samt den anhängenden Flächen, bis die Strecken 1 sich zu einer Wendestrecke schliessen, sowie darauf auch die übrigen bis 5. Diese Wendestrecken bilden dann an der Kreuzhaube das Fünfeck  $SBCDES$  um zwei Lücken und schliessen wieder die Flächen ein, welche aussen die Unterseite  $u$  des Netzes zeigen, nämlich die Seitenfläche  $SCD$ , die Zwischenflächen  $OBC$  und  $ODE$  und die Halbflächen  $SOB$ ,  $SOC$ ,  $SOD$ ,  $SOE$ , also fünf Flächen, so dass das Wendungsverhältnis wieder  $5 : 20$  ist. In den Diagonalfächen findet in  $d$  keine Wendung statt, sie zeigen innert dem Wendestreckenfünfeck alle  $u$  und ausserhalb  $o$ . Im Netz, Abb. 2, ist wieder ein Weg  $PU$  ( $U$ ) ( $P$ ), der auf der Wendestrecke 1 von  $o$  zu  $u$  übergeht, so dass ( $U$ ) ( $P$ ) in  $u$  verläuft.

3. Eine Doppelwendestrecke und drei Wendestrecken um ein Loch entstehen aus dem Netz, Abb. 3. Um  $OC$  ist die Halbfläche mit 3 aufzuklappen nach oben, worauf die nächsten zwei Flächen nach unten geklappt werden, so dass 3 und 4

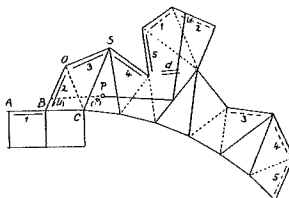


Abb. 3



seite  $u$  des Netzes zeigen, innert der übrigen Flächen mit  $o$ , im Wendungsverhältnis 4 : 20. Der im Netz eingezeichnete Weg von  $P$  nach  $(P)$  geht von  $P$  innen in  $o$  zuerst nach einem Punkte auf  $OC$  und kommt dann durch  $d$  aussen zur Kante  $SG$  und zurück über deren Seitenfläche alles in  $o$  und durch die nächste Lücke bis  $U$  auf 1, wo er erst in  $(U)$  nach  $u$  übergeht und zu  $(P)$  aussen kommt. Dieser Weg verläuft wieder durch acht Flächen, worunter 4 Schnittflächen, wobei  $d$  in der im Netz ungeteilten  $CSG$  geschnitten wird. In  $6 \equiv d$  wenden sich die Halbfächen von  $DSH$  und in  $7 \equiv d$  die von  $ASE$ .

6. Eine Doppelwendestrecke und sieben Kanten des Umfanges und zwei innere Kanten entstehen aus dem Netz, Abb. 6, womit die grösste Zahl 11 der Wendestrecken

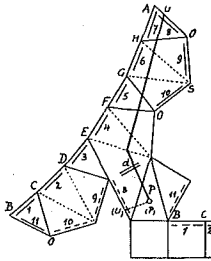


Abb. 6

erreicht ist im Streckenzug  $BCDEFGHAOSOB$ . Dieser schliesst die Flächen ein, welche  $u$  zeigen, nämlich drei Seitenflächen, die vier Zwischenflächen und sechs Halbfächen, so dass das Wendungsverhältnis 10 : 20 wird und damit die Doppelkreuzhaube als halbgewendet erscheint. Die Doppelwendestrecke ist  $9 \equiv 10$  in  $OS \equiv d$ , indem in 9 die Halbfächen von  $DSH$  und in 10 die von  $CSG$  gegeneinander gewendet werden, während  $ASE$  und  $BSF$  ungewendet bleiben, als die Flächen, welche die einzige in  $o$  erscheinende Zelle einschliessen, die in  $AB$  an den Prismenmantel ebenfalls in  $o$  ansetzt. Überhaupt sind in allen diesen Fällen die Netze so zusammengesetzt, dass dieser Mantel nach aussen  $o$  zeigt. Bringt man in diesem Netz, Abb. 6, die Wendestrecken am Umfang zum Verschwinden durch gewendete Ansetzung der Prismenflächen, so erhält man das Netz, Abb. 3, das dann eine einzige Zelle in  $u$  ergibt, noch nach Wendung des ganzen Netzes von  $o$  in  $u$ .

7. Eine dreifache Wendestrecke und drei Kanten als einfache Wendestrecken entstehen aus dem Netz, Abb. 7, mit  $4 \equiv 5 \equiv 6$  als in  $OS \equiv d$  fallende Wendestrecken und 1, 2, 3,

welche die Enden von  $d$  windschief verbinden im Zug  $OBOS$ . Dieses Netz, Abb. 7, entsteht aus dem Netz, Abb. 4, indem darin die Wendestrecke 1 zum Verschwinden gebracht wird, durch Ansetzen des rechtwinkligen Dreiecks mit 1, gewendet an die Seite 1 des gleichschenkligen Dreiecks. Der vollständige Wendestreckenzug wird  $OBOSOSO$ ,

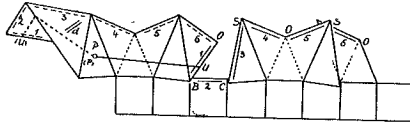


Abb. 7

der nur eine Zwischenfläche  $OBC$  und eine Halbfläche  $SOC$  einschliesst, die beide  $u$  zeigen, so dass das Wendungsverhältnis  $3 : 40$  wird, kleiner als die bereits erhaltenen. In 4 wenden sich die Halbflächen von  $DSH$ , in 5 die von  $ESA$  und in 6 die von  $FSB$ , während in  $GSC$  keine Wendung eintritt. In dieser Schnittfläche schneidet der Teil ( $U$ ) ( $P$ ) des Weges  $P$  ( $P$ ) die vierfache Strecke  $d$ .

8. Die vierfache Wendestrecke entsteht aus dem einfachsten Netz, von dem in Abb. 8 das erste Viertel gezeichnet ist, an welches sich die gleichen drei übrigen anschliessen. Die acht Strecken wie 1, 2 fallen mit der Klappung der acht Halbflächen nach

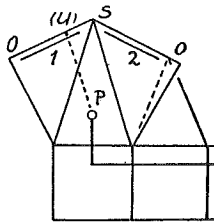


Abb. 8

unten alle in die vierfache Strecke  $d$ , in welcher die vier Schnittebenen je ihre Netzseiten  $o$  und  $u$  gegeneinander wenden. Der Zug der Wendestrecken wird  $OSOSO$  und bildet einzig die vierfache Strecke  $OS \equiv d$ , ohne Flächen einzuschliessen. Das Wendungsverhältnis wird Null. Die Doppelkreuzhaube zeigt von oben oder aussen gesehen an allen Flächen die Oberseite  $o$  des Netzes und von innen die Unterseite  $u$ , so dass scheinbar eine zweiseitige Fläche vorliegt. Die Wendungen finden alle in der vierfachen Strecke statt. Der Weg von  $P$  zu ( $P$ ) kann in diesem Netz, Abb. 8, nicht wie bisher durch die Dreiecke als Hauptflächen ausgeführt werden, es muss ein Umweg über fünf Prismenflächen gemacht

werden, wobei der ganze Weg aber wiederum durch acht Flächen geht, von  $P$  in einem Seitendreieck bis zu dem gegenüberliegenden, um zu der zu 1 gehörenden Halbfläche zu gelangen. In  $(U)$  auf  $d$  geht der Weg auf die andere Netzseite über. Dieses Netz führt zur Verallgemeinerung auf vielfache Kreuzhauben.

Die beschriebenen Eigenschaften lassen sich veranschaulichen durch Ausführung von Modellen nach den gezeichneten Netzen. Die Vielfläche werden gleichsam zu Naturobjekten, an denen weitere Untersuchungen zu neuen Ergebnissen führen können. Dabei sind aber die Ursachen rein geometrisch und lassen sich vollständig überblicken als Anordnung von Flächenteilen im Raum.

---