

Kreuzhaube aus verschiedenen Netzen.

Von

K. MERZ (Chur).

(Mit 8 Abbildungen im Text.)

(Als Manuskript eingegangen am 18. April 1940).

Für ein einseitiges Vielflach können verschiedene Netze hergestellt werden, aus denen es aufgeklappt werden kann. Dadurch entstehen, je nach dem Netz, an dem nämlichen Vielflach, zur Bildung der Einseitigkeit, verschiedene Wendestrecken, in welchen die beiden ungleichen Seiten des Netzes zusammenstossen. Die dadurch entstandene Anordnung von Oberseite und Unterseite des Netzes an den einzelnen Flächen lässt sich am übersichtlichsten an der Kreuzhaube ersehen, besonders wenn sie offen gelassen wird, wobei dann alle Flächen, einzeln genommen von ihren beiden Seiten sichtbar bleiben an Möbiusbändern.

Die einfachste Kreuzhaube ¹⁾ wird aus der quadratischen Pyramide erhalten, indem sie auf ein gleiches Prisma gesetzt wird nach

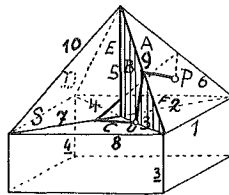


Abb. 1₀.

Wendestrecken:

1 2 3 oder 1 2 7 8; 8 9 10; 3, 3 4 4₁; 2 5 6; 5 7 8 9; 5 5.

Abb. 1₀. Aus der Pyramide werden durch ihre beiden Diagonalfächen zwei Scheitelpyramiden für zwei Lücken herausgenommen,

¹⁾ Nach Mitteilungen und Vorweisungen im Math. Kolloquium am 30. I. 1940 in Zürich.

aber unter Belassung ihrer Grundflächen C und F , während unter den beiden mit den Seitenflächen A und D bleibenden Pyramiden die Grundflächen zu tilgen sind, so dass hier zwei Löcher entstehen, wie 1, 2, 3 als das eine davon, durch welche der Raum des Prismas mit den beiden Raumteilen der Pyramiden verbunden ist. An Flächen bleiben also die beiden Dreiecke, wie S , der Diagonalschnitte, die einander in der Doppelstrecke $d \equiv 5$ durchdringen, dann die beiden rechtwinkligen Dreiecke C und F und die gleichseitigen A und D . Ferner bilden vier seitliche Rechtecke und das Quadrat der Grundfläche zusammen den Sockel, auf den die Kreuzhaube aufgesetzt ist. Das ganze Polyeder ist ein 11Flach mit $f=11$, $e=10$, $k=20$ mit der Charakteristik $c=e-k+f=1$. Die beiden Diagonalen in der ursprünglichen Grundfläche der ganzen Pyramide bilden vier Kanten, und ihr Schnitt zählt als Ecke. Die Doppelstrecke d zählt nicht als Kante, da die beiden Schnittflächen nur durchgehen, ohne in ihr begrenzt zu sein.

Bei den hier gezeichneten Netzen ist die Grundfläche des Prismas weggelassen, so dass durch Aufklappung offene Kreuzhauben entstehen. Am Netz sind Oberseite o und Unterseite u zu unterscheiden, was durch Farbe oder Schraffur geschehen kann, und beim Aufklappen schliessen sich die Randstrecken je zu zweien entweder gleichseitig o an o , oder aber in Wendestrecken ungleichzeitig, so dass Übergänge von o zu u entstehen, wodurch die Gesamtfläche der Kreuzhaube einseitig wird. Die Wendestrecken begrenzen als geschlossene Züge auf der Kreuzhaube die eine Netzseite und schliessen damit die andere aus. Die folgenden Netze ergeben die Anordnung der Wendestrecken auf sieben verschiedene Arten. Die Aufklappungen erfolgen um die punktierten Kanten nach oben und um die ausgezogenen inneren Kanten der Netze nach unten. An den ersten vier Fällen treten nur Kanten als Wendestrecken auf, an den übrigen drei wird auch die Doppelstrecke zur Wendestrecke.

1. Drei Wendestrecken 1, 2, 3, um ein Loch, entstehen aus dem Netz 1_1 . Die drei Rechtecke mit den anstossenden Dreiecken

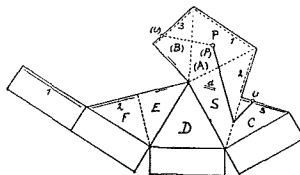


Abb. 1.

werden nach unten geklappt, so dass der Sockel und die Pyramide mit D nach aussen die Oberseite o des Netzes zeigen, während (A) und die beiden anstossenden Dreiecke dazu entgegen zu klappen sind, so dass die Pyramide von A die Unterseite u zeigt, die längs 1, 2, 3 an o anstösst. Links des Streckenzuges 1, 2, 3 zeigt sich somit die Unterseite des Netzes, während rechts davon die Flächen die Oberseite zeigen. Gewendet erscheinen also, mit der Unterseite des Netzes die Fläche A und zwei Hälften, wie B , der Schnittflächen. Im Netz ist der eine Achsenschnitt S , mit der Doppelstrecke d darin, ganz gelassen, während der andere halbiert ist zu (B) und E längs d zur Ermöglichung der Durchdringung bei der Aufklappung zum Modell, worauf dann B und E wieder gleichzeitig o an o zusammensetzen, so dass d keine Wendestrecke wird.

Ein Punkt in der Gesamtfläche der Kreuzhaube wird nach den beiden Seiten des zugehörigen Netzes unterschieden als P auf o und als dessen Gegenpunkt (P) in u . Infolge der Einseitigkeit der Kreuzhaube können auf ihrer Fläche Wege von P nach (P) eingezeichnet werden. Um dabei Umwege über die Rechtecke des Sockels zu vermeiden, sind im Netz Abb. 1, die Dreiecke zusammengerückt und darin ist P auf o einerseits verbunden auf der Oberseite des Netzes mit U auf der Wendestrecke 3 und andererseits ist (P) in u auf der Unterseite verbunden mit (U) auf 3 punktiert als (3). Durch die Aufklappung fallen U und (U) zusammen, und ein Weg von P zu (P) ist damit hergestellt, indem in U der Übergang von o zu u erfolgt. Die nämlichen Strecken, nur je auf der andern Netzseite genommen, geben auch den Rückweg an, durch Weiterführung des ersten Weges als (P) U P . Diese beiden Wege durchsetzen d in S und damit die aus B und E zusammengesetzte zweite Schnittebene, und sie bilden zusammen einen geschlossenen Weg von P über (P) wieder zurück nach P , der sich am Modell aussen und innen an der Kreuzhaube verfolgen lässt.

2. Vier Wendestrecken 1, 2, 7, 8, um ein Loch und ein Nebendreieck, entstehen aus dem Netz Abb. 2. An der Kreuzhaube

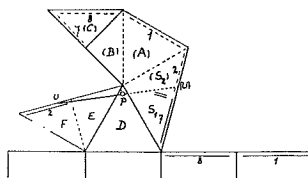


Abb. 2.

zeigen die Flächen (A) , (S_2) , (C) und (B) die Unterseite des Netzes, als links des Wendestrecken-zuges liegend, während die übrigen Flächen die Oberseite weisen nach aussen. D ist nach unten zu klappen samt S und dann (A) zurück. Der Weg aus P U und (U) (P) gebildet, ergibt als Strecke den kürzesten Weg von U aus.

3. Drei Wendestrecken 8, 9, 10, als Kantendreieck einer Lücke, entstehen aus dem Netz Abb. 3, an welchem alle Klappungen nach der nämlichen Seite erfolgen, nach unten. Die Flächen (C) , (B) , (S) , in der Lücke zeigen dann u infolge der fortgesetzten Drehung; sie liegen aussen links des Wendestrecken-zuges 8, 9, 10;

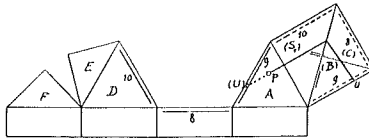


Abb. 3

alle übrigen Flächen zeigen o . Diese Anordnung der Wendestrecken ist ausgezeichnet durch nur äussere Kanten, ohne solche an einspringenden Flächenwinkeln. Diese Wendestrecken 8, 9, 10 schliessen kein Flächendreieck ein, da an ihnen die Lücke einspringt.

4. Halbgewendete Kreuzhaube aus dem Netz Abb. 4. Die Wendestrecken 3_1 , 3_2 , 4_1 trennen die Flächen so, dass die Kreuzhaube von oben gesehen an der einen Hälfte der Flächen mit D und C die Oberseite des Netzes zeigt und an der andern

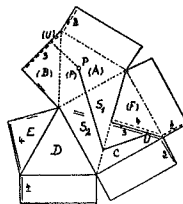


Abb. 4.

Hälfte mit A und F die Unterseite. Um eine Schliessung des Wendestrecken-zuges zu erhalten, müsste noch die Grundfläche des Sockels angefügt werden, in welcher die Diagonale von 3_1 nach 4_1 noch als Wendestrecke genommen werden könnte, so dass die Wendestrecken den Umfang eines Rechtecks bilden, ohne dessen Fläche einzuschliessen. Beide Netzseiten o und u bedecken je die Hälfte der Kreuzhaube. Aus dem Netz Abb. 4 sind die Flächen um D nach unten zu klappen und dann die um (A) zurück nach oben. Der Weg

(P) (U) in u wird dann aussen sichtbar an der Kreuzhaube Abb. 1₀, und er verläuft weiter in C auf o und ebenso auf S , wo er durch d geht.

5. Die Doppelstrecke d wird zur Wendestrecke 5 am Dreieck 2, 5, 6 der Wendestrecken, entstanden aus der Aufklappung des Netzes Abb. 5. Es erscheint hier nur die halbe Fläche von S

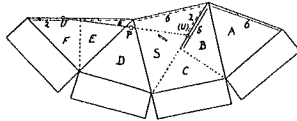


Abb. 5

gewendet, so dass aussen an der Kreuzhaube nur in diesem Dreieck die Unterseite des Netzes hervortritt wie in einem Fenster aus der Oberseite der übrigen Flächen. Umgekehrt zeigt im Innern der Kreuzhaube nur dieses Dreieck o innerhalb der übrigen Flächen als u . In der Aufklappung sind A und D nach unten zu klappen und B, C, F entgegen. Die Doppelstrecke d entsteht als Wendestrecke 5 zwischen den Flächenteilen B und E dieser Schnittebene. Der Weg $P U (U) (P)$ ist als Strecke wieder der kürzeste Weg von U aus.

6. Die Doppelstrecke d wird Wendestrecke 5 im Viereck 5, 7, 8, 9 der Wendestrecken aus der Aufklappung des Netzes Abb. 6. Damit erscheinen als gewendet die Dreiecke B und C , welche aussen an der Kreuzhaube u zeigen unter allen übrigen Flächen als o . Alle Klappungen erfolgen nach unten, wobei aber (B) und (C) fortgesetzt nach gleicher Richtung gedreht werden,

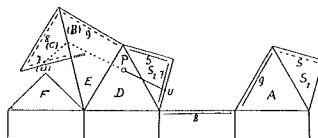


Abb. 6

so dass dann (C) von unten her in 8 an dessen Rechteck anschliesst und so die Wendung von (C) zustande kommt. Die Doppelstrecke d entsteht als Wendestrecke 5 zwischen S_1 und S_2 der hier geteilten Fläche S . Weil A nur an ein Rechteck der Seitenflächen anschliesst, ist zur Vermeidung des Umweges darüber, der Punkt P in D angenommen und der Weg geht von ihm aus

durch S_2 in o nach U auf der Wendestrecke 7 und dann durch C und B in u zurück nach (P) unter P .

Die Netze lassen sich überhaupt auch für die übrigen Fälle am leichtesten an den Streifen der vier Rechtecke, wie Abb. 6, zuerst anschliessen, worauf dann nachträglich die Dreiecke zusammengerückt werden können zu Netzen wie Abb. 5.

7. Die Doppelwendestrecke $d \equiv 5 \equiv 5_1$ entsteht aus dem Netz Abb. 7. An C werden B und S_1 nach oben geklappt, so dass 5 und 5_1 zusammenstossen zu d . Dann sind A und D nach unten zu klappen und ebenso weiter E und S_2 , die mit 5_1 und 5 auch

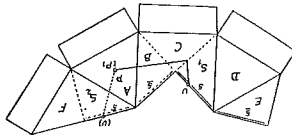


Abb. 7

in d zusammenstossen. Damit entstehen in d Wendungen zwischen B und E und zwischen S_1 und S_2 , so dass beide Schnittebenen in d ihre Netzseiten o und u gegeneinander wenden. Die so entstehende Kreuzhaube zeigt von oben gesehen an allen Flächen die Oberseite o des Netzes, als ob sie zweiseitig wäre, indem innen nur die Unterseite u sichtbar ist. Die Wendung der Flächen hat sich zurückgezogen in die Doppelstrecke als Zweieck, in einen verschwindend schmalen Streifen. Damit ist eine einheitliche Anordnung der Flächen erzielt, und die Störung durch die Wendung einzelner Flächen ist vermieden.

Von P aus geht ein Weg in o nach U auf d und dann von (U) in u nach (P). Weil in der Doppelwendestrecke die Wendungen der Netzseiten vereinigt sind, so ist ersichtlich, dass für einen Weg von P nach (P) auf der Kreuzhaube selbst nicht mehr auf die verschiedenen, je nach dem Netz auftretenden, Wendestrecken zu achten ist. Der Weg ist von P aus nach der Doppelstrecke zu ziehen und nach deren Durchsetzung kann (P) erreicht werden. Die Einseitigkeit der Kreuzhaube muss von den einzelnen Netzen unabhängig sein. Bei der Durchsetzung der Doppelstrecke, und damit auch der andern Schnittfläche, mit Verbleib in der einen Schnittfläche, gelangt man in dieser auf einem Weg von P nach (P), als von der einen Seite des ursprünglichen Netzes zur

ändern. Die Kreuzhauben²⁾ zeigen den einfachsten Fall für dieses Verhalten des Rückkehrweges für ihre Punkte, gegenüber andern einseitigen Flächen mit drei und mehr Doppelstrecken. Auch die Anordnung der Wendestrecken ist auf der Kreuzhaube am übersichtlichsten, indem ein einfacher geschlossener Streckenzug die beiden Netzseiten trennt, und die eine Netzseite je auf der einen Seite des in einer Richtung zu durchlaufenden Zuges liegt. Dies lässt sich auch auf Vielfache mit drei Doppelstrecken übertragen, wobei aber noch weitere Durchdringungen in Betracht fallen. Die nächste Aufgabe wäre, aus den verschiedenen Netzen des Heptaeders die Anordnung der Wendestrecken darauf zu bestimmen und daraus die Verteilung der Netzseiten auf den Flächen der vier Zellen anzugeben. Für das 15Flach der «vier Würfel»³⁾ ist dies bereits gemacht. Diese Betrachtungen führen allgemein zur Anordnung der beiden Netzseiten auf den Scheitelzellenpolyedern und zum Zusammenhang mit Einseitigkeit und Zweiseitigkeit der Flächen.

²⁾ K. MERZ, Kreuzhauben aus dem Oktaedertyp. Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, Bd. 84, Seite 137.

³⁾ K. MERZ, Vielfache aus Scheitelzellen und Hohlzellen, mit Abbildungen und Netzen (Seite 36), Kommissionsverlag F. Schuler, Chur 1939.
