Ueber einige Fälle der Green'schen Funktion der Wärmeleitung.

Von

ALFRED KIENAST (Küsnacht b. Zürich).

(Als Manuskript eingegangen am 25. Februar 1940.)

I. Herr FEJÉR hat [3][1]) bei mehreren Reihen durch Ausrechnung gezeigt, dass ihre iterierten Teilsummen einer gewissen Ordnung in gewissen Gebieten der Variabeln sämtlich nichtnegative Werte haben. Dieselbe Eigenschaft besitzen folgende Reihen:

(A) Das System der normierten Eigenfunktionen der Differentialgleichung $u'' + \lambda u = 0$ für die Randbedingung $u'/_{x=0} = 0$, $u'/_{x=\pi} = 0$ ist gebildet durch die Funktionen

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos n x}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi}}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

und die zugehörigen Eigenwerte sind 0, n^2. Die iterierten Teilsummen erster Ordnung der Folge

$$\frac{1}{2}, \cos nx \cos n\xi, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

haben nur nichtnegative Werte. Diese Folge tritt in der „Kernreihe" der Fourier'schen Cosinusreihe auf.

(B) Das System der normierten Eigenfunktionen der Differentialgleichung $u'' + \lambda u = 0$ für die Randbedingung $u/_{x=0} = 0$, $u'/_{x=\pi} = 0$ ist gebildet durch die Funktionen

[1]) Nummern in eckigen Klammern beziehen sich auf das Verzeichnis am Schluss der Note.

$$\left(\frac{1}{2}\pi\right)^{-\frac{1}{2}} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x, \; n=0, 1, 2, \ldots$$

und die zugehörigen Eigenwerte sind $\left(n+\frac{1}{2}\right)^2$. Die iterierten Teilsummen zweiter Ordnung der Folge

$$\sin\left(n+\frac{1}{2}\right) x \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\xi, \; n=0, 1, 2, \ldots$$

haben sämtlich nichtnegative Werte, wenn x, ξ gleichzeitig dem Intervall $0 \ldots \pi$ angehören.

(C) Macht man in (B) die Substitution $x=\pi-y$, $\xi=\pi-\eta$, so folgt, dass die iterierten Teilsummen zweiter Ordnung der Folge

$$\cos\left(n+\frac{1}{2}\right) y \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\eta, \; n=0, 1, 2, \ldots$$

sämtlich nichtnegative Werte haben, wenn y, η gleichzeitig dem Intervall $0 \ldots \pi$ angehören.

II. Bezeichnet man irgendeine der vorstehenden Folgen durch c_n und mit λ_n die zugehörigen Eigenwerte, dann stellt die Reihe

1) $$H(x, \xi, t) = \sum c_n(x, \xi)\, e^{-\lambda_n t}$$

die zum Wärmeleitproblem mit resp. denselben Randbedingungen gehörende Green'sche Funktion dar. Indem man in diesen drei Fällen 1) durch Formeln der Thetafunktionen ausdrückt, lässt sich leicht feststellen, dass in diesen drei Fällen

$$H \geqq 0$$

für $0 \leqq x$, $\xi \leqq \pi$, $t>0$. Letztere Eigenschaft ist noch nicht allgemein bewiesen für Fälle, bei denen in den Randbedingungen die Ableitung auftritt.

Der Beweis für die Behauptung (A) folgt mit Hilfe der Tatsache, dass die iterierten Teilsummen lineare homogene Verbindungen der Reihenkoeffizienten sind. Seinen c_n die Koeffizienten und

$$C_n^0(c) = c_0 + c_1 + \cdots + c_n$$

$$\cdots\cdots$$

$$C_n^{K+1}(c) = C_0^K + C_1^K + \cdots + C_n^K.$$

Sei ferner $c_n = a_n + b_n$, dann ist

$$C_n^K(c) = C_n^K(a) + C_n^K(b).$$

Nun ist

$$\cos nx \cos n\xi = \frac{1}{2}\left[\cos n(x-\xi) + \cos n(x+\xi)\right],$$

folglich

$$C_n^1\left(\frac{1}{2}, \ldots \cos nx \cos n\xi \ldots\right) = \frac{1}{2}\left\{C_n^1\left(\frac{1}{2}, \ldots \cos n(x-\xi) \cdots\right)\right.$$
$$\left. + C_n^1\left(\frac{1}{2} \ldots \cos n(x+\xi) \ldots\right)\right\}.$$

Die Werte der letzteren Teilsummen sind aus der Theorie der Fourier'schen Reihen bekannt; es ergibt sich

$$\text{2)} \qquad = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\,\frac{1-\cos n(x-\xi)}{1-\cos(x-\xi)} + \frac{1}{2}\,\frac{1-\cos n(x+\xi)}{1-\cos(x+\xi)}\right\} \geqq 0.$$

w. z. b. w.

Bezüglich (B) hat man

$$\alpha_n = \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\xi = \frac{1}{2}\left\{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)(x-\xi)\right.$$
$$\left. - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)(x+\xi)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\left\{\int_{x-\xi}^{\pi} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi\, d\varphi + \int_{\pi}^{x+\xi} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi\, d\varphi\right\}$$

Die Folge der α_n ist symmetrisch in x, ξ. Man kann also die Bezeichnung immer so wählen, dass $x-\xi \geqq 0$. Da x, ξ gleichzeitig im Intervall $0, \pi$ liegen, ist $x-\xi \leqq x+\xi \leqq 2\pi$. Es folgt

$$\alpha_n = \frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\int_{x-\xi}^{x+\xi} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi\, d\varphi$$

und wenn $C_n^2(\alpha)$ die iterierte Teilsumme zweiter Ordnung der α_n bezeichnet, so folgt

$$3)\qquad C_n^2(\alpha) = \frac{1}{4}\int\limits_{x-\xi}^{x+\xi} C_n^2\left((2k+1)\sin(2k+1)\frac{1}{2}\varphi\right)d\varphi$$

L. Fejér [3, Satz II] hat bewiesen, dass die iterierten Teilsummen der Reihe $\sum(2k+1)\sin(2k+1)\psi$ sämtlich nichtnegativ sind für $0 \leqq \psi \leqq \pi$. Es folgt $C_n^2(\alpha) \geqq 0$ für $0 \leqq x, \xi \leqq \pi$, womit die Behauptung (B) bewiesen ist.

Die Beweise für die Behauptungen in II erhält man in derselben Weise, wie ich [4] den analogen Beweis für die Green'sche Funktion der Wärmeleitung auf der Kugelfläche ausführte. Man weist das Bestehen folgender Eigenschaften nach:

(a) $\dfrac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \dfrac{\partial H}{\partial t};\ t > 0.$

(b) im Falle (A): $\left.\dfrac{\partial H}{\partial x}\right|_{x=0} = 0,\ \left.\dfrac{\partial H}{\partial x}\right|_{x=\pi} = 0;$

im Falle (B): $H|_{x=0} = 0;\ \left.\dfrac{\partial H}{\partial x}\right|_{x=\pi} = 0;$

(c) $\lim\limits_{t\to 0} H = 0,\ x \neq \xi;$

(d) $\lim\limits_{t\to 0}\int\limits_0^\pi H(x,\xi,t)\,dx = 1$ (Bedingung der Singularität in ξ).

Zu (a), (b): Die Reihen für $x = \xi$:

im Falle (A) $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{\cos^2 n\xi}{n^2}$

(unter Weglassung des Terms mit dem Eigenwert 0),

im Falle (B) $\displaystyle\sum_0^\infty \frac{\sin^2\left(n+\frac{1}{2}\right)\xi}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2},$

konvergieren für jedes ξ. Folglich konvergiert die zugehörige Reihe für H für jedes $t > 0$ gleichmässig für beliebige x, ξ. Daher stellt, wegen des Satzes von Harnack 1) in den Fällen (A), (B), (C) für

$t>0$ eine reguläre Lösung der Wärmeleitgleichung dar, womit (a), (b) nachgewiesen sind.

Um (c) zu erhalten braucht man folgendes:

2) ergibt, dass das erste Cesàro-mittel im Falle (A)

$$4)\qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} C_n^1 = 0, \text{ gleichmässig für } |x-\xi| \geqq \delta > 0.$$

Für den Fall (B) hat FEJÉR [3, S. 55/56] berechnet:

$$C_{n-1}^2 [(2k+1) \sin (2k+1)\,\theta] = -\frac{d}{d\theta} C_{n-1}^2 [\cos 2k+1)\,\theta]$$

$$= \frac{n}{4 \sin^3 \theta} \left\{ \cos^2 \theta + 2 \cos^2 n\theta - 3 \frac{\sin n\theta}{n \sin \theta} \cos n\theta \cos \theta \right\},$$

sodass das Cesàro-mittel zweiter Ordnung dem Grenzwert zustrebt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n(n-1)} C_{n-1}^2 = 0, \text{ gleichmässig für } \theta \geqq \delta > 0,\ \pi - \theta \geqq \delta > 0.$$

In 3) eingesetzt, folgt

$$5)\qquad \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n(n-1)} C_{n-1}^2 (\alpha) = 0, \text{ gleichmässig für } |x-\xi| \geqq \delta > 0.$$

Endlich gelangt man mit Hilfe von 4) und 5) zur Feststellung, dass in diesen Fällen (c) erfüllt ist unter Verwendung der Erweiterung des Abel'schen Satzes für Potenzreihen, die BROMWICH [2] angegeben hat und die für die Reihe $\sum \alpha_n e^{-n^2 t}$ von CARSLAW [1, S. 152—54] entwickelt ist. CARSLAW's Erörterungen gelten unverändert auch für die Reihe $\sum \beta_n e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 t}$. 4) und 5) ergeben ($c$) erweitert um die Aussage der Gleichmässigkeit.

Die Eigenschaft (d) folgt für (A) daraus, dass die Konstante $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ Eigenfunktion ist. Es gelten daher die Gleichungen

$$\sqrt{2}\,\pi^{-1} \int_0^\pi \cos nx\, dx = 0,\ n = 1, 2, 3, \ldots,$$

die infolge der gleichmässigen Konvergenz von 1)

$$6)\qquad \int_0^\pi H(x, \xi, t)\, dx = 1$$

für $t>0$ zur Folge haben.

Im Falle (B) konvergiert 1) ebenfalls gleichmässig; es ist

$$7)\quad \lim_{t\to 0}\int_0^\pi H\,(x,\,\xi,\,t)\;dx = \left(\frac{1}{2}\,\pi\right)^{-1}\sum_0^\infty \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\xi\int_0^\pi \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\;dx$$

$$= 4\,\pi^{-1}\sum_0^\infty \frac{\sin\,(2k+1)\,\frac{1}{2}\,\xi}{2k+1} = 1$$

als Folge der Erweiterung des Abel'schen Satzes, da die an letzter Stelle stehende Reihe konvergiert. Mit 6) und 7) ist (d) in den vorliegenden Fällen bewiesen.

Literaturverzeichnis

1. H. S. Carslaw, Theory of Fourier's series and integrals. 1921.
2. T. J. I'A. Bromwich, On the limits of certain infinite series and integrals. Math. Ann. 65 (1908), 350.
3. L. Fejér, Eigenschaften der Mittelwerte bei den Fourierreihen. Journal L. M. S. 8 (1933), 53—62.
4. A. Kienast, Die Green'sche Funktion der Diffgl. der Wärmeleitung auf der Kugelfläche. Vierteljahrsschr. Naturf. Ges. Zürich, 85 (1940), 133—137.