

Würfelzerlegungen.

Von

K. MERZ (Chur).

(Mit 16 Abbildungen im Text.)

(Als Manuskript eingegangen am 5. Juni 1939.)

Durch Schnittebenen und Auswahl von Scheitelzellen an Doppelstrecken lässt sich der Würfel in ein- und zweiseitige Teilvielfache zerlegen. Dabei können die Doppelstrecken in einem Bündel liegen oder auf Kanten eines innern Polyeders.

1. Zu jeder der vier Würfeldiagonalen sei die mittelsenkrechte Ebene gelegt, womit als Schnittflächen vier Sechsecke S entstehen. Diese durchdringen einander in 6 Doppelstrecken, welche die Mitten der Gegenkanten verbinden und einander in O schneiden. Jedes Würfelquadrat wird durch diese Ebenen zerlegt in ein inneres Quadrat wie D und vier Dreiecke A an den Ecken. Die 6 inneren Quadrate bilden mit den 4 Schnittsechsecken das 10 Flach und die 24 Dreiecke ebenso das 28 Flach. Das 10 Flach (Abb. 1) hat 6 Zellen, die quadratische Pyramiden sind über Flächen D nach

10 Flach einseitig

28 Flach zweiseitig

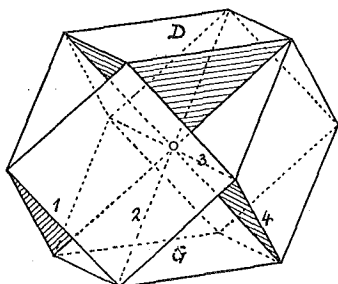


Abb. 1

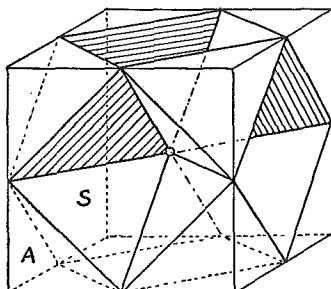


Abb. 2

O , zwischen denen dreikantige Lücken nach O eindringen. Das 28 Fläch (Abb. 2) hat 8 Zellen als Doppelpyramiden mit je drei Flächen A und drei Dreiecken in S , und sie schliessen die 6 quadratischen Trichter ein.

Das Netz (Abb. 3) des 10 Flachs lässt sich um G in vier gleichen Teilen anordnen, indem sich S_1 daran schliesst mit einem Ausschnitt, in den ein S_2 und ein S_3 eingeklappt ein ganzes S zusammensetzen. Dabei findet an 2 und 3 eine Wendung der Netzseiten statt, so dass diese Teile der Doppelstrecken zu Wendestrecken werden zur Bildung der Einseitigkeit, wie dies auch an den Kanten 1 und 4 eintritt. Alle diese Wendestrecken bilden einen Zug von 12 Strecken mit O als vierfachem Punkt. Von den 6 Quadraten zeigt nur D die Unterseite des Netzes, während die übrigen die Oberseite zeigen. In den 8 Ecken ausser D stossen also Zellen gleicher Netzseite zusammen, und nach diesen Ecken gehen daher Wendestrecken. $f = 10, e = 12, k = 24, c = -2$.

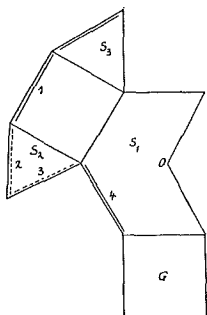


Abb. 3

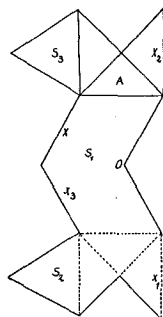


Abb. 4

Das Netz des 28 Flachs, nach Weglassung der Fläche G , besteht aus 4 Teilen wie Abb. 4. An dieses erste Netzviertel wird ein zweites solches angefügt, indem dann x an x_1 kommt. Damit hat man eine Netzhälfte, an welche die zweite angesetzt wird, indem x_3 an das x_2 des zweiten Viertels anschliesst. Um die gestrichelten Strecken findet die Klappung nach oben statt, sonst nach unten. In O verschränken sich die Schnittsechsecke. Die NetZRänder schliessen sich überall gleichseitig, sodass das Vielflach zweiseitig bleibt wie das Netz, es fehlen Wendestrecken. Jede Zelle ist für sich schon zweiseitig und zeigt an allen ihren 6 Flächen je die nämliche Netzseite. Jede Zelle stösst mit drei Zellen anderer Netzseite zusammen, als sie selbst zeigt, was durch die Anordnung der Zellen an den Würfecken ermöglicht wird

und die Zweiseitigkeit zur Folge hat. Je zwei Zellen an Gegenecken des Würfels zeigen entgegengesetzte Netzseiten, die eine zeigt die Oberseite, die andere die Unterseite des Netzes. $f = 28$, $e = 20$, $k = 48$, $c = 0$.

10 Flach mit Innentetraeder

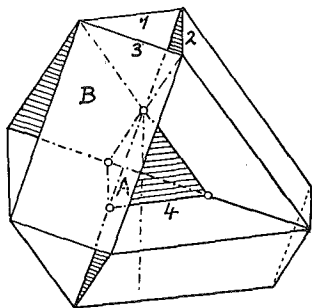


Abb. 5

28 Flach mit Hohltetraeder

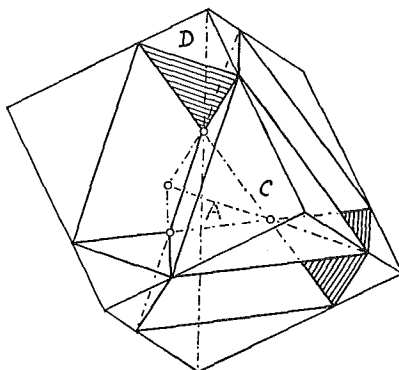


Abb. 6

2. Würfel mit Innentetraeder. Die im vorigen Fall gelegten Ebenen werden parallel verschoben, so dass sie ein Tetraeder (Abb. 6) einschliessen über einer der Flächen A. Die vier Ebenen des Tetraeders schneiden je ein Rechteck B (Abb. 5) aus den Würfel- flächen heraus, mit Längsseiten parallel zu 6 Flächendiagonalen, welche die Kanten eines dem Würfel eingeschriebenen Tetraeder bilden. Statt des regelmässigen Sechsecks schneiden nun diese Ebenen vier Sechsecke heraus, zwar noch mit gleichen Winkeln, aber mit den beiden verschiedenen Seiten des Rechtecks B. In Abb. 5 hat ein solches Sechseck die Seite 1 und die anstossende Längsseite von B und noch zwei Paar solcher Seiten. In den Durchdringungen dieser vier Sechsecke als Doppelstrecken liegen die Kanten des Innentetraeders. Durch Auswahl der in ihnen zusammenstossenden Scheitelzellen erhält man wieder ein 10 Flach und ein 28 Flach. Dabei zählen die Dreiecke des Innentetraeders, als in den Schnittebenen liegend, nicht als besondere Flächen, und ebenso wenig auch dessen Kanten und Ecken. Dieses Tetraeder entsteht in Folge der Einlagerung der Vielflache aus dem Netz in den Raum. Die Doppelstrecken überhaupt gelten nicht als Kanten; die Teilung von Schnittflächen nach Doppelstrecken erfolgt im Netz nur zur Ermöglichung der wirklichen Aufklappungen und jedes

der vier Schnittsechsecke ist als zusammenhängende und durchgehende Fläche zu betrachten. Das Innentetraeder besteht, nebst den Ecken, nur aus seinen Kanten, welche verlängert die Doppelstrecken darstellen. Am 10 Flach (Abb. 5) ist das Innentetraeder als Zelle zu nehmen, da es in Scheitellage ist zu den 6 äusseren Zellen *B*, so dass dieses 10 Flach nun 7 Zellen besitzt, die 8 Lücken umgeben, vier kleine, wie bei 1, über Ecken und vier grosse, wie bei 4, über Flächen des Innentetraeders. Das 28 Flach (Abb. 6) dagegen hat an dessen Stelle das Hohltetraeder als Lücke, die von 8 Zellen wie *C* und *D* eingeschlossen ist, und die in Scheitellage ist zu den 6 übrigen äusseren Lücken innert Kantenrechtecken. $f = 10, e = 12, k = 24, c = -2; f = 28, e = 20, k = 48, c = 0$, beides wie im ersten Fall.

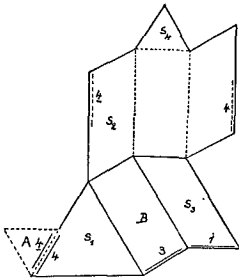


Abb. 7

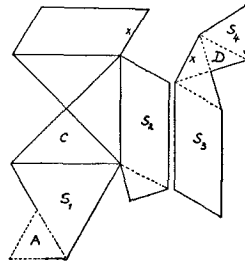


Abb. 8

Die Netze lassen sich so herstellen, dass zuerst das Innentetraeder aufzuklappen ist über *A*, als dessen Grundfläche. Um *A* können die Netze in vier gleichen Teilen angeordnet werden, wie davon je einer in den Abb. 7 und 8 gezeichnet ist. Vom Schnittsechseck *S* ist *S*₁ der an *A* als Seitenfläche des Tetraeders anstossende Teil, zu dem die übrigen Teile *S*₂, *S*₃ und *S*₄ angeklappt werden aus der Verbindung mit den übrigen Flächen *B* bzw. *C* und *D*. Aus dem Netz Abb. 7 entsteht das 10 Flach Abb. 5 mit den einfachen Wendestrecken 1, 2, 3 und mit drei Doppelwendestrecken wie 4 an dem Umfang von *A*, in welchen beide durch diese Doppelstrecken gehenden Ebenen ihre Netzseite wenden. Die drei an die Kanten 1, 2, 3 anstossenden Zellen *B* zeigen die Oberseite des Netzes und die drei untern Zellen dessen Unterseite. Das 10 Flach wird also wieder einseitig und das 28 Flach bleibt ebenfalls zweiseitig. An diesem zeigen alle 4 Zellen wie *D* die Oberseite des Netzes und die wie *C* die Unterseite, so dass jede Zelle mit dreien anderer Netzseite zusammenstösst, womit die Zweiseitigkeit eintritt.

Würfel geteilt durch Innenoktaeder

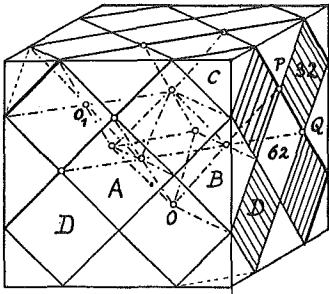


Abb. 9

Schnittsechseck

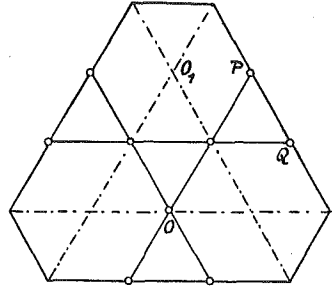


Abb. 10

3. Würfel mit Innenoktaeder. Legt man zu den 4 Ebenen des 1. Falles parallele Ebenen zu beiden Seiten im gleichen Abstand, so schliessen sie ein Innenoktaeder ein und zerlegen den Würfel in ein einseitiges 32 Flach und ein zweiseitiges 62 Flach. In Abb. 9 sind die Spuren der Schnittebenen so angenommen, dass sie die Würfelflächen je in 5 Quadrate und 8 Dreiecke teilen. Die schraffierten Quadrate, zusammen 24 Flächen samt den 8 Schnittsechsecken *S* Abb. 10 bilden das 32 Flach und die übrigen 54 Flächen damit das 62 Flach. In jedem Schnittsechseck sind 6 Doppelstrecken, von denen die innern drei eine Oktaederfläche einschliessen mit Ecken *O* und die übrigen drei grenzen daran Dreiecke ab, die über den Oktaederflächen innere Tetraeder nach *O₁* bilden. Von den 8 Ebenen liegen 4 Schnittgerade im Unendlichen, die noch zu den innern 24 Doppelstrecken gehören: $8 \cdot 7 : 2$.

Für die Netze sind zwei parallele *S* ganz gelassen, und die übrigen *S* sind zerlegt und ihre Teile an die andern Flächen, an Quadrate in Abb. 11 und an rechtwinklige Dreiecke und Quadrate in Abb. 12, angefügt als gleichseitige Dreiecke, Trapeze und Parallelogramme. Die an *S* angefügten Flächen sind dreimal so auszuführen, wie einmal gezeichnet. Die Vielfache werden dann aus drei Teilen zusammengesetzt, aus dem mittleren Teil, der zwischen den beiden parallelen ganzen *S* liegt und den beiden nach aussen daran angesetzten Teilen. Im mittleren Teil können für sich abgeschlossene 6 innere Dreiecke am Netz nicht angefügt werden, doch ist ihre Lage leicht an den Modellteilen ersichtlich. In Abb. 11 sind die obern Flächen an punktierten Strecken nach oben zu klappen, zur Herstellung des obern äussern Teiles, dies dreifach und an allen 6 Seiten von *S* ausgeführt. Die unten

an *S* angefügten Flächen sind nach unten zu klappen für den mittleren Teil. Daraus entstehen am 32 Flach Abb. 13 die obere Wendestrecken 1, 2, 3 und seitliche wie 4 und 7, wobei 7 eine Doppelstrecke ist. Die drei Zellen um die Lücke 1, 2, 3 zeigen die Unterseite des Netzes und die daran anstossenden wie 4 die Oberseite. In der unten anstossenden Mittelschicht zeigen die 6 Quadrate wieder die Unterseite des Netzes. In entsprechender Art entsteht aus dem Netz nach Abb. 12 das 62 Flach Abb. 14, aber als zweiseitig ohne Wendestrecken. Jede Zelle stösst mit Zellen anderer Netzseite zusammen. *A* zeigt die Oberseite, *B* die Unterseite und *C* wieder die Oberseite. $f = 32, e = 48, k = 96, c = -16; f = 62, e = 56, k = 132, c = -14$; mit gleicher Differenz der Charakteristik wie in den vorigen Fällen.

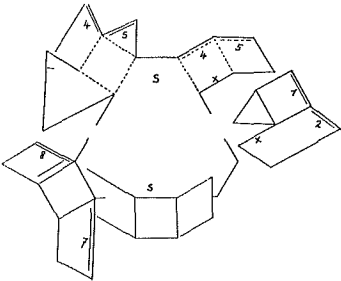


Abb. 11

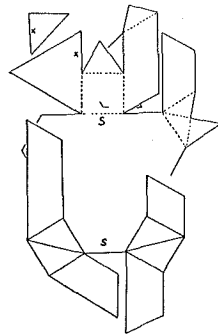


Abb. 12

Das 32 Flach hat 32 Zellen, nämlich die 24 Zellen unter den äusseren Quadraten wie *D* und, vom 10 Flach her, die 8 Innentetraeder, welche das Hohl-oktaeder einschliessen, das in Scheitellage ist zu den 12 seitlichen Lücken, an Stelle von *B*, die je von 4 Quadratseiten windschief als Kanten eingeschlossen sind und die innen vier Rauten und zwei Dreiecke haben, letztere als Flächen von zwei Innentetraedern. Das 62 Flach hat an jeder Würfelfecke eine Zelle *C*, an jeder Würfelkante eine Zelle *B* und in jeder Würfelfläche eine Zelle *A*, so dass mit dem Innenoktaeder zusammen 27 Zellen entstehen. Über den Kanten des Innenoktaeders sind die 12 Zellen *B* in Scheitellage und über dessen Ecken ebenso die 6 Zellen *A*. Über den Flächen des Innenoktaeders liegen 8 Hohl-tetraeder, als Lücken, über deren Spitzen die Zellen *C* ansetzen. Überhaupt treten an Stelle der Zellen des einen Teilvielflaches die Lücken des andern. Der Würfel zerfällt also im Ganzen in 59 Zellen. Das Innenoktaeder hat über seinen Flächen die 8 Innen-

tetraeder nach O_1 , über seinen Kanten die 12 Achteckfläche B und über seinen Ecken die 6 Fünffläche A . Dann stossen ferner an die Kanten der Innentetraeder noch 24 Fünffläche D , und an deren Spitzen sind die 8 Sechseckfläche C .

32 Flach mit Hohloктаeder

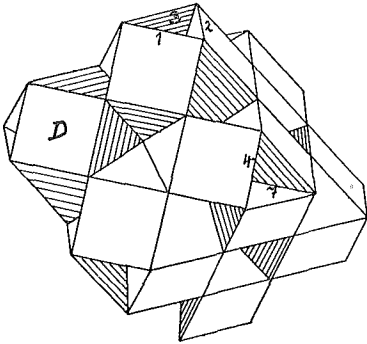


Abb. 13

62 Flach mit Innenoktaeder

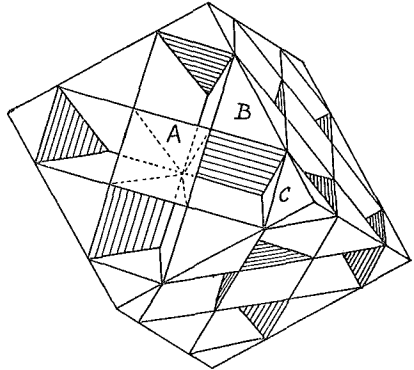


Abb. 14

4. Eine Vereinfachung von diesen 59 Zellen auf 21 Zellen (Abb. 15) tritt ein, wenn die Ecken O des Innenoktaeders in die Mitte der Würfel­flächen rücken, wodurch die Spitzen O_1 der Innentetraeder in die Würfel­ecken fallen. Die Flächen A werden dabei zu den Punkten O , die D zu Strecken als halbe Diagonalen in den Quadraten, und die C zu Punkten in O_1 . Dafür dehnen sich die Dreiecke B aus zu Quadratvierteln. Als äussere Zellen bleiben somit nur 12 Vier­fläche, aussen begrenzt je von zwei Dreiecken B und innen von zwei gleichseitigen Dreiecken der Innentetraeder. Diese Vier­fläche bilden mit dem Innenoktaeder die 13 Zellen eines 32 Flachs, das mit den 24 Flächen B aussen die ganze Würfeloberfläche einnimmt, während im Innern des Würfels die 8 Lücken der Innentetraeder sind, zwischen den durchgehenden Schnittebenen, welche auch das Innenoktaeder einschliessen. Benachbarte Zellen B stossen in halben Quadratdiagonalen zusammen, die daher als zwei zusammenfallende Kanten zu zählen sind und die O als vier Ecken und die Würfel­ecken O_1 als drei Ecken von verschiedenen Zellen B . $f = 32$, $e = 48$, $k = 60$, $c = -20$. Jedes der 12 Vier­fläche B liegt für sich in Scheitellage an einer Kante des Innenoktaeders, so dass diese Vier­fläche die andere Netzseite zeigen als das Innenoktaeder, indem an der Kante als Doppel-

strecke der Übergang der Netzseiten von aussen nach innen an den Zellen stattfindet. Dieses 32 Fläch ist daher zweiseitig. Die äusseren Zellen sind unter sich voneinander getrennt und nur mit dem Innenoktaeder verbunden. Der äussere Würfel, mit den trennenden Doppelkanten in den Quadratdiagonalen, zeigt überall die eine Netzseite und nur das Innenoktaeder hat aussen die andere.

Vereinfachung, 32 Fläch

8 Fläch mit Hohlloктаeder

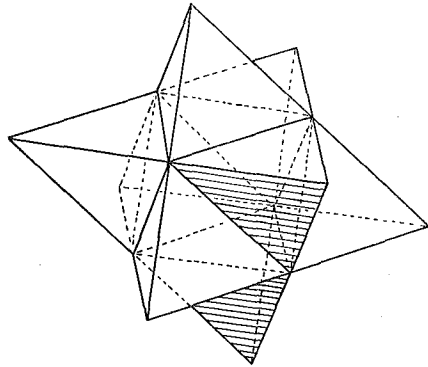
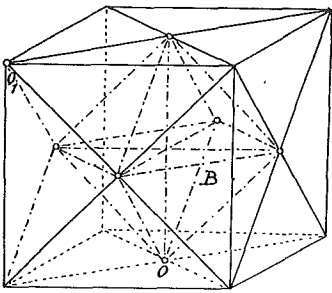


Abb. 15

Abb. 16

Das zugehörige Ergänzungsvielflach besteht aus den 8 Zellen der Innentetraeder, welche das Hohlloктаeder einschliessen und es ist das 8 Fläch (Abb. 16), gebildet von den 8 Schnittflächen S' welche als Dreiecke mit den Quadratdiagonalen als Seiten aus dem Würfel geschnitten werden. Diese 8 Dreiecke durchdringen einander in den Kanten des Oktaeders als 12 Doppelstrecken und ihre Seiten bilden aussen die 24 Kanten der 8 Tetraeder, die dem als Lücke zu betrachtenden Oktaeder aufgesetzt sind. Dieses 8Fläch stellt als Sternpolyeder die Durchdringung der beiden dem Würfel eingeschriebenen Tetraeder dar. $f = 8, e = 14, k = 24, c = -2$.

Dieses 8 Fläch (Abb. 16) ist somit aus dem 32 Fläch (Abb. 13) entstanden, indem dessen Flächen D immer schmäler wurden, bis zu Kanten, womit auch die Lücken, wie bei 1, zu Ecken sich zusammensogen. Damit treten die 8 Innentetraeder des 32 Flachs hervor und bilden die noch bleibenden 8 Zellen, welche das Hohlloктаeder einschliessen. Der allgemeine Fall führt also zu diesem 8 Fläch, das in 2 Tetraeder zerfällt, die aus diesem Übergang her ungleiche Netzseiten zeigen. Entsprechend entsteht aus dem 62 Fläch (Abb. 14) das als Würfel erscheinende 32 Fläch (Abb. 15), indem die Lücken neben A sich beidseitig schliessen und die unter A

liegenden Hohltetraeder mit ihren Spitzen in die Würfelflächen reichen und innen die Lücken bilden bis an das Innenoktaeder als Zelle.

Diese Ausführungen zeigen, wie der Grundsatz der Anordnung der Scheitelzellen zu interessanten neuen Vielflachen führt. Von besonderer Bedeutung ist die Gliederung der Polyeder durch Lücken und Innenpolyeder, wodurch Vielflache hoher Zusammenhangszahl erzielt werden und von mannigfaltigen Gestaltungen. Wesentlich ist dabei die Bildung von Doppelstrecken, die durch die Einlagerung der Netze in den Raum entstehen und Bündel oder Kanten von Innenpolyedern bilden. Bei diesen Untersuchungen ist die Herstellung von Modellen wegleitend, wobei die beiden Netzseiten zu unterscheiden sind.

Vergl. K. MERZ: Einseitige Polyeder aus dem Tetraeder, Jahrg. 83, Seite 108, Vierteljahrsschrift d. Naturf. Gesellsch. in Zürich, 1938.