Einseitige Polyeder aus dem Tetraeder.

Von

K. MERZ (Chur).

(Mit 2 Abbildungen im Text.)

(Als Manuskript eingegangen am 30. November 1937.)

Vier Scheiteloktanten eines konvexen Polyeders bilden zusammen ein einseitiges Polyeder[1]). Dieser Satz wird hier für zwei Fälle auf das regelmässige Tetraeder angewandt, indem drei zueinander rechtwinklige Ebenen dadurch gelegt werden.

I. Einseitiges Hendekaeder.

Ausser in Heptaeder und Pentadekaeder[2]) lässt sich das regelmässige Tetraeder auch in zwei kongruente einseitige Hendekaeder zerlegen. Dabei sind eine Schnittebene mittelparallel zu zwei windschiefen Kanten zu nehmen und die übrigen beiden Ebenen durch eine jede dieser Kanten senkrecht zur ersten Ebene. Als Achsenschnitte dieser drei Ebenen mit dem Tetraeder entstehen ein Quadrat und zwei Dreiecke, die einander durchdringen in den drei Doppelstrecken der beiden 11 Flache, die gebildet werden von je vier Scheitelachteln. Jede Fläche des Tetraeders wird dabei in einer Mittelparallelen und einer Höhe geschnitten, wodurch je zwei Dreiecke und zwei Trapeze entstehen. Ein 11 Flach wird dann gebildet von vier solchen Trapezen wie E, vier benachbarten Dreiecken wie F und den drei Achsenschnitten die durch O gehen.

Für das gezeichnete Netz des 11 Flachs sind die drei Achsenschnitte durch die Doppelstrecken geteilt und zwar das Quadrat halbiert in zwei Rechtecke, das eine Dreieck durch eine Mittel-

[1]) K. MERZ. Einseitige Polyeder aus Oktanten: Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Phys.-math. Klasse 1937 II.

[2]) K. MERZ. Einseitiges Pentadekaeder. Commentarii Mathematici Helvetici, vol. 10, pag. 1, 1937.

Netz 11 Flach

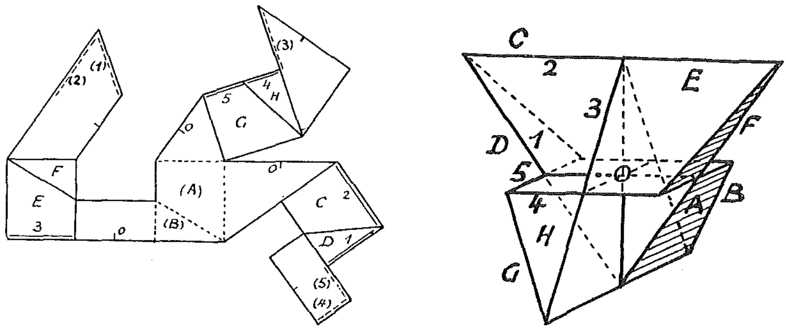

Abb. 1.

parallele geteilt in Dreieck und Trapez und das andere durch eine Höhe in zwei deckungsgleiche Dreiecke. Zur Bildung des 11 Flachs aus diesem Netz werden *(A)* und *(B)* nach oben geklappt, samt den drei anstossenden Achsenschnitthälften, um die punktierten Seiten, bis die drei *O* in einen Punkt fallen, womit ein Achtel des 11 Flachs gebildet ist. Dazu wird in Scheitellage mit *C* und *D* durch Klappung nach unten und mit Vervollständigung des Quadrates der Mittelebene das zweite Achtel angesetzt. Ebenso bildet man mit *E* und *F* und dem noch freien Trapezteil des Achsenschnittdreiecks das dritte Achtel, worauf mit *G* und *H* samt einer Dreieckshälfte das vierte Achtel eingefügt wird und die Möbiusbänder längs 1, 2, 3, 4, 5, in einem windschiefen Kantenzuge sich schliessen: die Oberseite 1 des Netzes an die Unterseite (1) bis 5 an (5), womit die Einseitigkeit des 11 Flachs eintritt.

Am entstandenen 11 Flach bleiben zwei Tetraederkanten erhalten, wie die eine an *C* und *E* und die gegenüberliegende. Die beiden Achtel an einer solchen Kante sind deckungsgleich, sie gehen durch Drehung um die Hauptachse ineinander über, sonst sind aber die Achtel an der einen Kante gegengleich zu denen an der andern. Jedes Achtel ist ein 5 Flach, begrenzt von zwei Trapezen, zwei Dreiecken und einem Quadrat. Als Körper sind diese Achtel voneinander getrennt, da sie einander nur je in drei Kanten an den Doppelstrecken berühren. Der Zusammenhang im 11 Flach wird von den durchgehenden Achsenschnittflächen gebildet.

Von den sechs Ecken eines Achtels sind aussen je zwei freie gewöhnliche Dreikantsecken, wie an *E F*, eine Ecke ferner fällt für alle Achtel in *o*, die übrigen drei Ecken werden zu besonderen überschlagenen Ecken am 11 Flach, wegen ihrer Lage in den Endpunkten der Doppelstrecken, wie z. B. der Schnittpunkt der Flächen *C* und *E* und der beiden Achsschnittdreiecke. Diese vier Ebenen ergeben vier Kanten, von denen zwei in die Tetraederkante fallen, nach deren Mitte die Doppelstrecke als 5. Schnittgerade geht, die nicht als Kante zählt. Das nämliche gilt auch an einer Ecke, wie wo 1 und 5 zusammenstossen, wo zudem zweimal zwei Kanten in Geraden liegen, in einer Quadrat- und einer Dreiecksseite. Daraus ergibt sich noch eine wichtige Folge für das Netz. Die Seite 5 der Fläche *G* stösst nur mit der einen Hälfte einer Quadratseite zusammen, während die andere Hälfte mit *D* eine Kante bildet. Es kommen also am 11 Flach an den sechs überschlagenen Ecken und den vier Ecken des Quadrates in 20 Fällen n i c h t g a n z e Seiten der Flächen des Netzes zur Kantenbildung, wie sonst bei Polyedernetzen gewöhnlich angenommen wird, und was hier nur an vier Kanten eintritt.

Die Elemente des beschriebenen einseitigen Hendekaeders sind:

$$f = f_3 + f_4 = 6 + 5 = 11,\ e = e_3 + e_4 = 8 + 6 = 14,\ k = 24,\ c = e - k + f = 1.$$

II. Einseitige Dekaeder und Enneaeder.

An einem regelmässigen Tetraeder werde durch jede der drei Kanten einer Fläche eine Ebene gelegt, so dass die drei Ebenen in drei Achsen unter rechten Winkeln in *O* einander schneiden. Diese drei Ebenen bestimmen die Oktanten, welche durch Auswahl

10 Flach und 9 Flach

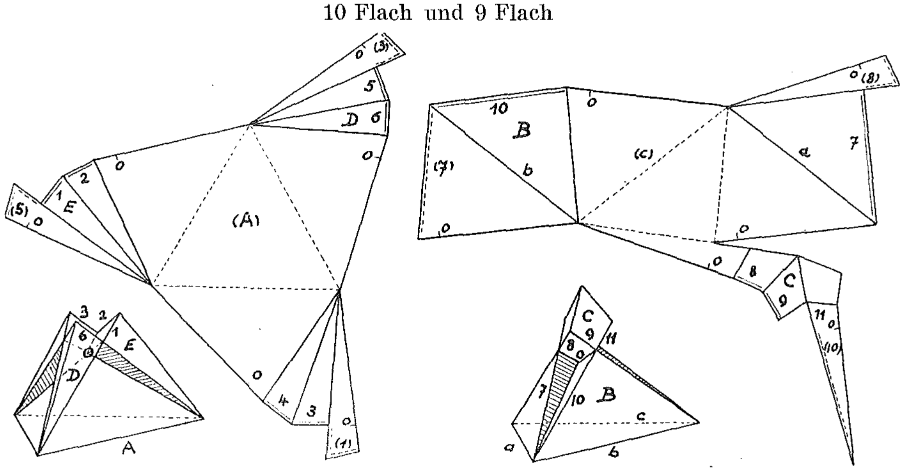

Abbildung 2.

von je vier Scheiteloktanten aus dem Tetraeder zwei einseitige Vielflache ergeben, ein 10 Flach und ein 9 Flach. Die Achsenschnitte sind gleichschenklige Dreiecke über den Seiten a, b, c der Grundfläche des Tetraeders mit Schenkeln von der Länge der Strecken 10 und 11 zusammen. Die Grundfläche A des Tetraeders bleibt ganz, seine andern drei Flächen werden je zerlegt in vier Teile, in ein Dreieck B und im Scheitel dazu ein Viereck C sowie in zwei seitliche Dreiecke D und E. Zum 10 Flach gehören A und 6 Dreiecke wie D, zum 9 Flach dreimal Flächen wie B und C, während A fehlt, so dass das 9 Flach unten offen ist, indem es ein Kantendreieck a, b, c besitzt, von dessen Ecken die Doppelstrecken durch O gehen bis zur nächsten Ecke, wie im Schnitt von 7 und 8. Bei jedem dieser beiden Vielflache kommen noch die drei Achsenschnitte dazu, die in den drei Doppelstrecken einander durchdringen.

Im Netz sind diese Doppelstrecken kenntlich durch den Punkt O. In den Doppelstrecken dürfen sich keine Möbiusbänder schliessen, denn dadurch würde die Flächenzahl je um 1 vergrössert, ohne dass aber am fertigen Polyeder Änderungen eintreten. Nur würden die beiden Teile eines Achsenschnittes als zwei Flächen zählen, statt als eine und die Doppelstrecke wäre auch als Kante zu zählen, obschon sie eigentlich nicht als solche hervortritt, als Strecke in einer ebenen Fläche. Also Flächen- und Kantenzahl vermehren sich je um 1, so dass die Charakteristik 1 bleibt. Aber dabei würden dann Schliessungsstellen der Möbiusbänder aussen am Polyeder wegfallen, und sie bildeten nicht mehr die geschlossene Grenze eines Oktantenausschnittes. Bei der Aufklappung der Netze, die um die punktierten Kanten nach oben beginnt und im übrigen nach unten erfolgt, vereinigen sich alle Punkte O eines Netzes im Achsenschnittpunkt. Beim 10 Flach schliessen sich die Möbiusbänder in 1 bis 6, beim 9 Flach in 7 bis 10. Beim 10 Flach entsteht über A eine Pyramide mit drei seitlich vorspringend angesetzten Pyramiden mit viereckigen Grundflächen nach oben. Beim 9 Flach bildet sich oben mit C ein aufgesetztes 6 Flach über der hohlen Grundpyramide, deren Hohlraum von den drei Achsenschnittdreiecken gebildet wird als leerer Oktant. Die Elemente sind 1. $f = 10$, $e = 6$, $k = 15$. 2. $f = 9$, $e = 10$, $k = 18$ und für beide Fälle $c = e - k + f = 1$.

Der Grund, dass im hier beschriebenen Fall die Summe der Anzahl der Flächen beider Teile des Tetraeders nur 19 ist, statt 22 (wie bei 7 und 15 Flach und bei zweimal 11 Flach), liegt darin, dass eine Fläche des Tetraeders, nämlich A, von den Schnittebenen nicht geteilt wird. Diese Fläche liefert daher beim 10 Flach nur eine Fläche, statt zwei und beim 9 Flach keine statt zwei, so dass eine Verminderung der Flächenzahlen zusammen um 3 eintritt.

Satz: Legt man an einem Tetraeder durch jede Kante einer Fläche eine Ebene nach innen, so teilen diese drei Ebenen das Tetraeder in ein 9 Flach und ein 10 Flach, als einseitige Ergänzungsvielflache kleinster Summe bei zugleich kleinster vorhandener Differenz ihrer Flächenanzahlen.

Vom Verfasser ausgeführte Modelle dieser Polyeder wurden der Sammlung des Mathematischen Institutes der Universität Zürich einverleibt.