

Über Sonnenuhren.

Von

HEINZ SCHILT.

(Mit 5 Abbildungen im Text.)

(Als Manuskript eingegangen am 26. April 1935.)

Dieser Aufsatz möchte an die mathematischen und astronomischen Grundlagen der Sonnenuhren erinnern und zeigen, wie sich die gewöhnlichen Sonnenuhren erweitern und verfeinern lassen, so dass an ihnen die mittlere Zeit, Auf- und Untergangszeiten und die Deklination der Sonne abgelesen werden können.

Das Prinzip einer Sonnenuhr.

Unsere Einteilung der Zeit in Tage ist einzig durch den Lauf der Sonne bestimmt. Es ist nun naheliegend, die Sonne auch für die feinere Zeitmessung zu benutzen. Dazu genügt es, eine Bestimmungsgrösse für die Lage der Sonne zu wählen, die sich möglichst gleichmässig mit der Zeit ändert. Eine solche Grösse ist der Stundenwinkel der Sonne. Dieser wird gebildet von der Ebene Sonne-Erdachse (= Stundenkreisebene) und der Meridianebene; er wird gewöhnlich in Stunden gemessen ($1^h = 15^\circ$). Der Sinn seiner Zählung ist so gewählt, dass seine Grösse mit wachsender Zeit zunimmt. Eine Sonnenuhr soll nun direkt diesen Stundenwinkel messen. Nun bildet der Schatten eines zur Erdachse parallelen Stabes mit diesem die Stundenkreisebene. Es genügt daher die Lage des Schattens eines solchen Stabes nach den zugehörigen Stundenwinkeln zu numerieren, um eine Sonnenuhr zu erhalten. Steht die Sonne im Meridian, so haben wir „wahren Mittag“. Da dieser bei uns (für $7\frac{1}{2}^\circ$ ö. v. Greenwich) im Mittel auf $12^h 30$ MEZ fällt¹⁾, so werden wir den Schatten im Meridian mit $12\frac{1}{2}^h$ bezeichnen; damit ist dann auch die Bezeichnung der andern Schattenlagen festgelegt. Bis vor 40 Jahren rechnete man nicht mit Zonenzeit, sondern mit Ortszeit, daher steht bei alten Sonnenuhren im Meridian noch 12^h , diese gehen also der MEZ im Mittel eine halbe Stunde nach.

¹⁾ Genau fällt der mittlere Mittag eines Ortes mit der geogr. Länge λ^h ö. v. Greenwich auf $(12 + 1 - \lambda)^h$ MEZ.

Der Stundenwinkel der Sonne ändert sich nun nicht allein der sehr gleichförmigen Erdrotation wegen, sondern auch infolge der Umlaufsbewegung der Erde um die Sonne. Da diese in einer Ellipse und nach den KEPLER'schen Gesetzen mit veränderlicher Geschwindigkeit erfolgt, so werden wir erwarten, dass sich der Stundenwinkel der Sonne nicht ganz gleichförmig ändert. Ausserdem vollzieht sich diese Umlaufsbewegung in einer Ebene, die schief steht zur Erdachse, also zur Kante des Stundenwinkels; dies bewirkt noch eine weitere Ungleichmässigkeit im Wachsen dieses Winkels. In der Astronomie heisst man den Stundenwinkel der Sonne die „wahre Zeit“. Diese wird daher mit der Zeit unserer Räderuhren, die gleichförmig gehen und „mittlere Zeit“ zeigen, nicht immer übereinstimmen. Die Abweichung der wahren Zeit (WZ) von der mittleren Zeit (MZ) heisst man die Zeitgleichung, diese ist positiv, wenn die mittlere Zeit der wahren Zeit vorgeht. In der Abb. 1 ist der Verlauf der Zeitgleichung $g = MZ - WZ$ während eines Jahres durch eine Kurve dargestellt.

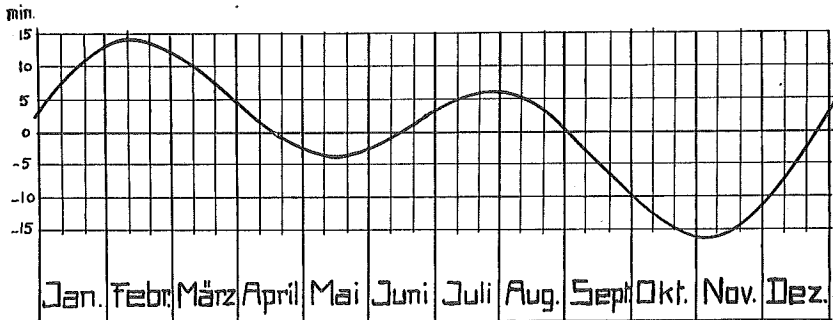


Abb. 1. Zeitgleichung.

Aus dieser Kurve entnimmt man, dass die maximale Abweichung der wahren von der mittleren Zeit 15^{min} beträgt. Eine richtig konstruierte Sonnenuhr kann daher im Vergleich zu den gewöhnlichen Uhren eine Differenz von einer Viertelstunde zeigen. An einer Sonnenuhr mit Halbstundenteilung kann man den Schatten leicht bis auf 5^{min} genau schätzen; mit Hilfe der Zeitgleichung lässt sich daraus auch die mittlere Zeit bis auf 5^{min} genau bestimmen.

Die Konstruktion einer Sonnenuhr.

Die Konstruktion einer Sonnenuhr ist nach dem oben Gesagten nun gegeben. Wichtig ist vor allem, dass der schattenwerfende Stab parallel zur Erdachse konstruiert wird. Durch diesen Stab legt man Ebenen, die je einen Winkel von 15° für Stundenteilung, oder von $7^\circ 30'$ für Halbstundenteilung zueinander bilden. Diese Ebenen bringt

man zum Schnitt mit dem Zifferblatt und erhält damit die Lage der Stundenstriche, vorausgesetzt, dass man das Ebenenbüschel richtig zur Meridianebene legte. Ist das Zifferblatt eben, so kann man mit Hilfe der zentralen Kollineation die Konstruktion der Stundenstriche noch eleganter durchführen. Es genügt nur zu beachten, dass zwei beliebige Zifferblätter für denselben Stab zentralkollinear verwandt sind. Als Kollineationszentrum kann man irgend einen, nicht in den Zifferblättern liegenden Punkt des Stabes wählen. Nun hat das Zifferblatt senkrecht zum Stab reguläre Teilung und lässt sich daher leicht konstruieren. Aus diesem erhält man dann durch zentralkollineare Umformung jedes andere. — Horizontale Sonnenuhren konstruiert man zweckmässig in kotierter Normalprojektion, vertikale dagegen im Zweitafelsystem. Will man horizontale Sonnenuhren berechnen, so kommt man mit dem rechtwinklig sphärischen Dreieck aus, bei vertikalen dagegen benötigt man das schiefwinklig sphärische Dreieck. Wenn φ die geogr. Breite bedeutet, $180 + a$ das Azimut des Stundenstriches einer horizontalen Sonnenuhr, der zum Stundenwinkel s gehört, so besteht zwischen diesen Grössen die Beziehung:

$$tg a = \sin \varphi \, tg s.$$

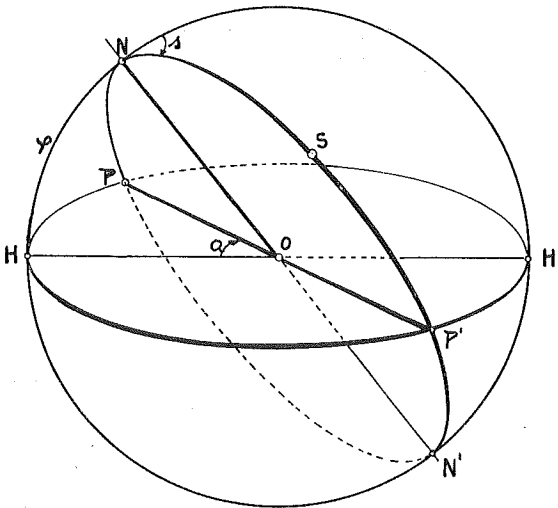


Abb. 2. Schema für horizontale Sonnenuhren.
 HPH'P' Zifferblattebene, HNH'N' Meridian, S Sonne, NO Stab,
 NSP'N'P Stundenkreis, PO Schatten.

Bei einer vertikalen Sonnenuhr sei A das Azimut der Normalen des Zifferblattes, t der Winkel zwischen Vertikale und Schatten, dann folgt aus dem nautischen Dreieck:

$$\operatorname{ctg} t = \operatorname{ctg} s \frac{\cos A}{\cos \varphi} + \operatorname{tg} \varphi \sin A.$$

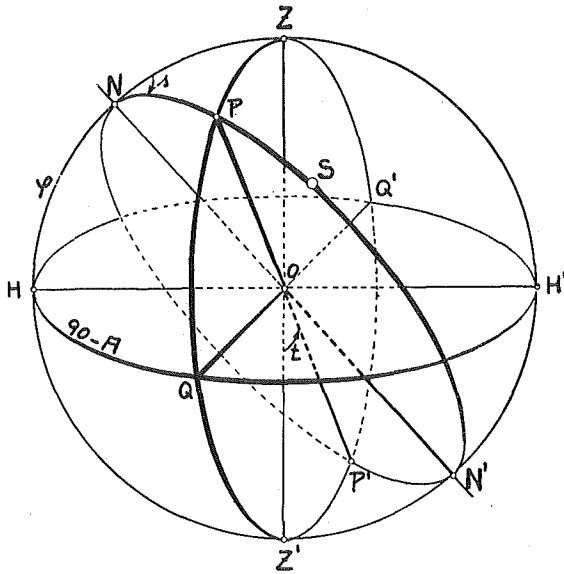


Abb. 3. Schema für vertikale Sonnenuhren.

HQ'H'Q Horizont, HNZN'H'N'Z' Meridian, ZQ'P'Z'QP Zifferblattebene, S Sonne, ON' Stab, NPSN'P' Stundenkreis, OP' Schatten.

Verfeinerung und Erweiterung einer Sonnenuhr.

Jede Sonnenuhr lässt sich noch wesentlich verfeinern und erweitern, wenn man nicht bloss den Schatten eines Stabes, sondern den eines Punktes, z. B. der Stabspitze berücksichtigt. Zum Festlegen des Schattens stehen uns nun zwei Freiheitsgrade zur Verfügung, und wir können daher nicht nur die Stunden der wahren Zeit eintragen, sondern auch deren Abweichung von der mittleren Zeit. Ausserdem lassen sich an einer solchen Sonnenuhr auch noch die Auf- und Untergangszeiten der Sonne ablesen.

Um eine Übersicht über die Einteilung eines Zifferblattes einer Punktsonnenuhr zu erhalten, denke man sich die scheinbare Bewegung der Sonne während eines Jahres un stetig verlaufend. Die Deklination (= Abweichung vom Himmelsäquator) der Sonne soll sich in jeder Nacht sprungweise ändern und während des Tages konstant bleiben. Die Sonne würde also jeden Tag am Himmel genau einen Parallelkreis beschreiben, was in Wirklichkeit für Sonnenuhren mit genügender Genauigkeit erfüllt ist. Die Strahlen durch einen Punkt beschreiben also während eines Tages einen geraden Kreiskegel.

Schneidet man den Strahlenkegel, der zum schattenwerfenden Punkt gehört, mit dem Zifferblatt, so erhalten wir die zu dem betreffenden Tag gehörende Schattenbahn. Auf jeder Schattenbahn kann man nun die Punkte notieren, die den Stunden der wahren Zeit entsprechen, es sind die Schnittpunkte der Stundenstriche der Stabsonnenuhr mit den Schattenbahnen. Die Punkte für die Stunden der mittleren Zeit findet man, indem man die zum betreffenden Tag gehörende Zeitgleichung auf der Schattenbahn vom Stundenpunkt der wahren Zeit aus nach rückwärts oder nach vorwärts abträgt, je nachdem die Zeitgleichung positiv oder negativ ist. Da nun jeder Parallelkreis der Äquatorzone im allgemeinen — Ausnahmen bilden nur die Wendekreise — im Laufe eines Jahres zweimal von der Sonne beschrieben wird, die dazu gehörigen Zeitgleichungen aber ungleich sind, so werden wir auf jeder Schattenbahn zwei Punkte für die gleiche Stunde mittlerer Zeit erhalten; der eine gehört dem Frühlings-, der andere dem Herbsthalbjahre an. Die Kurven, die die Punkte gleicher Stunden mittlerer Zeit verbinden, werden etwa die Form einer flachen Acht haben.

Die Schnittpunkte der Sonnenbahn eines Tages mit dem Horizont sind die Auf- und Untergangspunkte der Sonne. Die entsprechenden Punkte auf dem Zifferblatt ergeben sich als Schnittpunkte der Schattenbahn mit der horizontalen Ebene durch den schattenwerfenden Punkt. Die zu diesen Punkten gehörende Zeit, die auf der Schattenbahn leicht abgelesen werden kann, ist die entsprechende Auf- und Untergangszeit der Sonne.

Auf ebenen Zifferblättern sind die Verhältnisse noch besonders einfach. Die Schattenbahnen sind hier Kegelschnitte, die ein Büschel bilden. Die projektiven Eigenschaften dieses Büschels untersucht man am besten an einem Zifferblatt, das senkrecht zur Achse der Kegel steht. Da die Strahlenkegel gerade Kreiskegel sind, so werden in diesem Zifferblatt die Schattenbahnen konzentrische Kreise sein. Kreise in einer Ebene gehen aber immer durch die beiden imaginären Kreispunkte, die auf der unendlich fernen Geraden liegen. Konzentrische Kreise haben nun ausserdem alle den Mittelpunkt und die unendlich ferne Gerade zu Pol und Polaren. Die Verbindungsgeraden des Mittelpunktes mit den beiden Kreispunkten sind daher die allen Kreisen gemeinsamen Tangenten in diesen Punkten. Unser Kegelschnittbüschel der Schattenbahnen ist also durch zwei Punkte mit Tangenten bestimmt. Da sowohl die Punkte, als auch die Tangenten immer imaginär sind, so verwendet man zur Konstruktion der Kegelschnitte Pol und Polaren.

Der Pol P_0 , der dem Mittelpunkt der konzentrischen Kreise entspricht, ist in irgend einem ebenen Zifferblatt gegeben als Durchstosspunkt der Kegelachse mit dem Zifferblatt. Die Polare p_0 ist die Schattenbahn zur Zeit der Tag- und Nachtgleichen. Nun besitzt unser Kegelschnittbüschel ausser diesen noch unendlich viele Pole und Polaren. Ihre Lage ergibt sich aus der folgenden Überlegung. Im Büschel der konzentrischen Kreise ist irgend ein Durchmesser Polare jenes Punktes auf der unendlich fernen Geraden, dessen Richtung senkrecht zum Durchmesser ist. Auf einem beliebigen Zifferblatt entspricht dem Durchmesser ein bestimmter Stundenstrich; die zur Richtung gehörende Gerade, die auf der Polaren p_0 den Pol des Stundenstriches ausschneidet, ist der 6 Stunden davon entfernte Stundenstrich. Die Beziehung ist nun ausserdem involutorisch, d. h. wenn p_1 die Polare zu P_1 ist, so schneidet p_1 auf p_0 den Pol zur Geraden P_0P_1 aus. Die Verhältnisse sind in Abb. 4 dargestellt; es bedeutet P_i immer den Pol zur Geraden p_i .

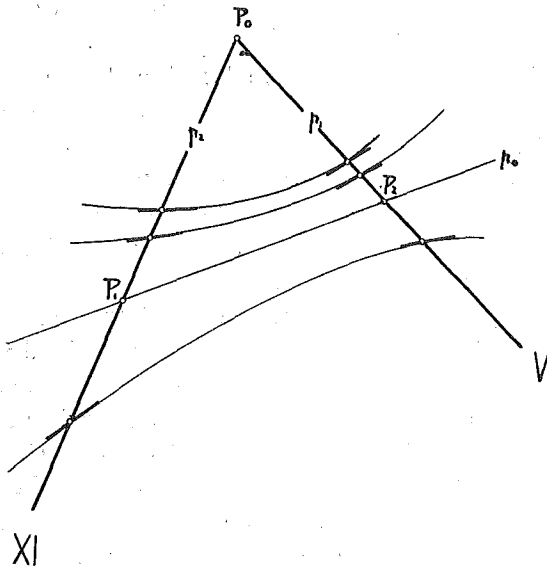


Abb. 4. Pol und Polaren der Schattenbahnen.

Ich möchte noch bemerken, dass man natürlich die Kegelschnitte auch durch zentralkollineare Umformung des Äquatorzifferblattes erhalten kann. Doch ist dies nicht zu empfehlen, da die Schattenbahnen in diesem Zifferblatt sehr weit weg liegen, für die Tag- und Nachtgleichen sind sie ja im Unendlichen. Die Konstruktion mit Hilfe von Pol, Polaren und projektiver Büschel ist da viel

bequemer und eleganter. Als Tage, für die man eine Schattenbahnkurve zeichnet, wählt man am besten die Tage des Eintritts der Sonne in ein neues Tierkreiszeichen, da die zugehörigen Deklinationen günstig liegen, wie folgende kleine Zusammenstellung zeigt:

	Frühling	Deklination	Herbst	
♈	Steinbock Dez. 21.	-23° 27'	Dez. 21.	Steinbock
♉	Wassermann Jan. 20.	-20° 10'	Nov. 22.	Schütze
♊	Fische Febr. 19.	-11° 30'	Okt. 23.	Skorpion
♋	Widder März 21.	0° 00'	Sept. 23.	Waage
♌	Stier April 21.	11° 30'	Aug. 23.	Jungfrau
♍	Zwillinge Mai 21.	20° 10'	Juli 22.	Löwe
♎	Krebs Juni 21.	23° 27'	Juni 21.	Krebs

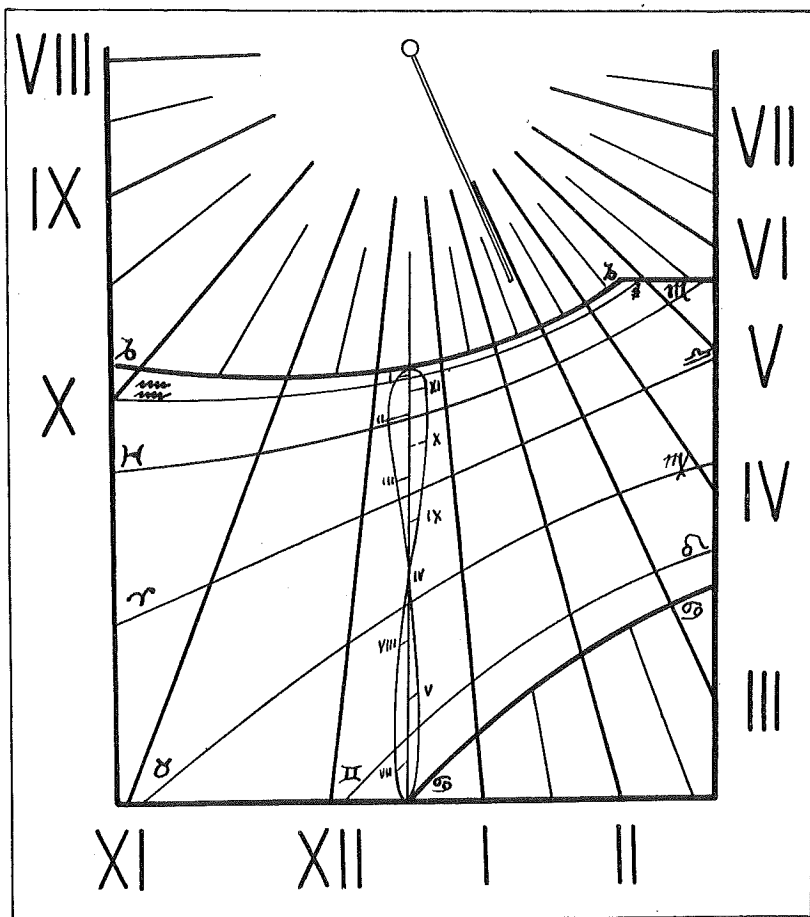


Abb. 5. Vertikale Punktsonnenuhr.

Geogr. Breite $\varphi = 46^\circ 54'$, Azimut der Zifferblattnormalen $A = 27^\circ 30'$,
 ———— Projektion des Stabes.

Die Abb. 5 stellt ein Zifferblatt einer ebenen vertikalen Sonnenuhr dar, an ihr kann man das hier Dargelegte leicht überblicken; die Kurve der mittleren Zeit ist nur für den wahren Mittag eingezeichnet.

Stabsonnenuhren sieht man heute noch relativ viele, dagegen sind in Zürich meines Wissens nur zwei Punktsonnenuhren. Die eine davon befindet sich am Freien Gymnasium, die andere im Giebelfeld des Südostportals der Predigerkirche.
