Über einen merkwürdigen geometrischen Ort bei konfokalen Kegelschnitten.

Von

A. HEYER (Bern).

(Mit einer Abbildung.)

(Als Manuskript eingegangen am 30. April 1934.)

Bei der Betrachtung konfokaler Kegelschnitte geht man bequem von folgenden beiden Gleichungen aus:

$$y^2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2}(a^2 - x^2) \text{ (Ellipse)} \tag{1.}$$

$$y^2 = \frac{c^2 - \alpha^2}{\alpha^2}(x^2 - \alpha^2) \text{ (Hyperbel),} \tag{2.}$$

wo die Beziehung besteht $0 < \alpha < c < a$. Hier bedeuten a und α die entsprechenden halben Hauptachsen und c die gemeinsame lineare Exzentrizität. Wir haben also in den beiden Grundgleichungen (1.) und (2.) Beziehungen zwischen den fünf Grössen a, α, c, x, y, welche sich allgemein so ausdrücken lassen $f(x, y, a, c) = 0$ und $f(x, y, \alpha, c) = 0$.

Wenn wir aus (1.) und (2.) je eine Koordinate eliminieren, so erhalten wir

$$x = \frac{a\,\alpha}{c} \text{ (3.) und } y = \frac{\sqrt{(a^2 - c^2)(c^2 - \alpha^2)}}{c} \tag{4.}$$

als Schnittkoordinaten, oder allgemein

$$f(x, a, \alpha, c) = 0 \text{ und } f(y, a, \alpha, c) = 0.$$

Von den fünf möglichen Kombinationen der fünf Grössen zur vierten Klasse bleibt nur noch

$$f(x, y, a, \alpha) = 0.$$

Die entsprechende Gleichung

$$y = \pm \frac{\sqrt{(a^2 - x^2)(x^2 - \alpha^2)}}{x} \quad \text{(5.) oder}$$

$2x = \sqrt{(u+v-y^2)} + \sqrt{(u-v)-y^2}$, wo $u = a^2 + \alpha^2$, $v = 2a\alpha$ bedeutet, erhält man durch Elimination von c aus den Grundgleichungen.

Wir wollen nun das Kurvenbild dieser Funktion näher kennen lernen. Geometrisch handelt es sich um den Ort der Schnittpunkte der konfokalen Kegelschnitte, wenn die Lage des Fokus veränderlich ist (also bei konstanten Werten für die Hauptachsen).

Die beiliegende Abbildung zeigt nur die Hälfte der Kurve. Die andere Hälfte liegt im 2. und 3. Quadranten und ist zur Abbildung symmetrisch in Bezug auf die y-Achse.

Um die Krümmungsverhältnisse der Kurve zu erhalten, suchen wir die ersten beiden Ableitungen der Funktion (5.) und erhalten:

$$y' = \pm \frac{a^2\alpha^2 - x^4}{x^2\sqrt{(a^2 - x^2)(x^2 - \alpha^2)}} \tag{6.}$$

$$y'' = \pm \frac{-4x^4(a^2-x^2)(x^2-\alpha^2)-(a^2\alpha^2-x^4)\{x^2[(a^2+\alpha^2)-2x^2]+2(a^2-x^2)(x^2-\alpha^2)\}}{x^3(a^2 - x^2)(x^2 - \alpha^2)\sqrt{(a^2-x^2)(x^2-\alpha^2)}} \tag{7.}$$

Aus (6.) erhalten wir durch $y' = 0$ ein Maximum bei P_1 mit den Koordinaten $x = \pm\sqrt{a\alpha}$, $y = \pm(a - \alpha)$. (6a.)

Zur Berechnung des Krümmungsradius haben wir

$$\varrho = \frac{\sqrt{(1 + y'^2)^3}}{y''}.$$

Setzen wir die Werte aus (6.) und (7.) ein, so erhalten wir

$$\varrho = \frac{\sqrt{[x^4(a^2 - x^2)(x^2 - \alpha^2) + (a^2\alpha^2 - x^4)^2]^3}}{-4x^7(a^2-x^2)(x^2-\alpha^2)-x^3(a^2\alpha^2-x^4)\{x^2[(a^2+\alpha^2)-2x^2]+2(a^2-x^2)(x^2-\alpha^2)\}} \tag{8.}$$

Und für

$$\left.\begin{array}{llll} \text{den Punkt } A & : x = \alpha, & \varrho_1 = \dfrac{a^2 - \alpha^2}{\alpha} \\[2ex] \text{den Punkt } B & : x = a, & \varrho_2 = \dfrac{a^2 - \alpha^2}{a} \\[2ex] \text{den Punkt } P_1 & : x = \sqrt{a\alpha}, & \varrho_3 = \dfrac{a - \alpha}{4} \end{array}\right\} \text{ als absolute Werte.} \tag{8a.}$$

In Polarkoordinaten ($x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$) lautet die Kurvengleichung

$$r^2 = \frac{a^2 + \alpha^2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 + \alpha^2)^2 - \frac{4a^2\alpha^2}{\cos^2\varphi}}\,. \tag{9.}$$

Zur Probe setzen wir hier $\varphi = 0$ und erhalten

$$r_0{}^2 = \frac{(a^2 + \alpha^2) \pm (a^2 - \alpha^2)}{2}$$

$$1.)\ r_0 = a\,, \qquad 2.)\ r_0 = \alpha \qquad (10.)$$

als halbe Hauptachsen der beiden Kegelschnitte.

Wenn die Wurzel aus (9.) wegfallen soll, so muss $\cos^2\varphi = \frac{4\,a^2\,\alpha^2}{(a^2+\alpha^2)^2}$, $\cos\varphi = \pm\frac{2\,a\,\alpha}{a^2+\alpha^2}$; dann ist $r = t$ die Tangente von 0 aus, also $t^2 = \frac{a^2+\alpha^2}{2}$, $t = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2+\alpha^2}$. (11.)

Für den Berührungspunkt P_0 sind

$$x = t\cos\varphi = \frac{a\,\alpha\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+\alpha^2}} \text{ und } y = t\sin\varphi = \frac{a^2-\alpha^2}{\sqrt{2\,(a^2+\alpha^2)}} \qquad (12.)$$

die Werte für die Berührungskoordinaten.

Um die Entfernung $0P_1$ des höchsten Punktes vom Ursprung zu erhalten, haben wir [nach (6a.)]

$$r_1^2 = x^2 + y^2 = a\,\alpha + (a-\alpha)^2 = a^2 + \alpha^2 - a\,\alpha$$

$$r_1 = \sqrt{a^2+\alpha^2-a\,\alpha}\,.$$

Für diesen Radiusvektor ist $\cos\varphi = \sqrt{\frac{a\,\alpha}{a^2+\alpha^2-a\,\alpha}}$.

Wir setzen diesen Wert in (9.) ein und erhalten:

$$r^2 = \frac{a^2+\alpha^2}{2} \pm \frac{1}{2}(a^2+\alpha^2-2\,a\,\alpha) \text{ und hieraus}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1.)\ \ r_1^2 = a^2+\alpha^2-a\,\alpha,\ \text{was schon bekannt ist, und} \\ 2.)\ \ r_2^2 = a\,\alpha,\ r_2 = \sqrt{a\,\alpha}.\ \text{Es ist also } r_2 = OP_2 = ON \end{array}\right\}.$$

Ferner ist $OM = x_2 = \frac{a\,\alpha}{\sqrt{a^2+\alpha^2-a\,\alpha}}$ $MP_2 = y_2 = (a-\alpha)\sqrt{\frac{a\,\alpha}{a^2+\alpha^2-a\,\alpha}}$

als Koordinaten von P_2.

Ausserdem bestehen die einfachen Beziehungen

$$r_1^2 + r_2^2 = a^2 + \alpha^2 \text{ und } r_1^2 - r_2^2 = (a-\alpha)^2\,.$$

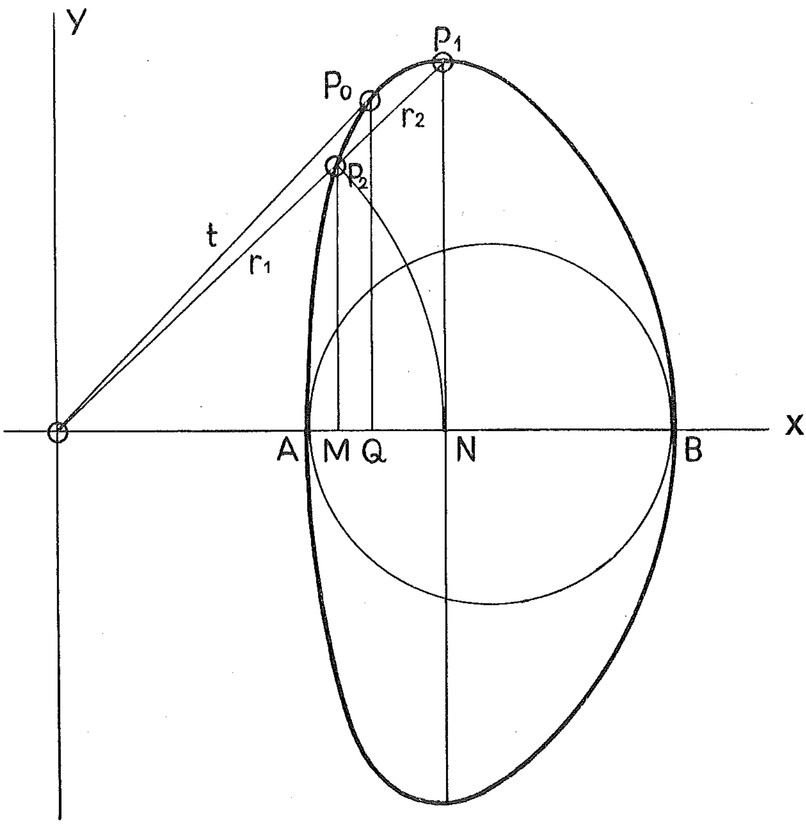
Wenn man berechnen will, für welchen Wert von c der höchste Punkt erreicht wird, so muss man nur aus einer der beiden Gleichungen $\frac{a\,\alpha}{c} = \sqrt{a\,\alpha}$ oder $\sqrt{\frac{(c^2-\alpha^2)(a^2-c^2)}{c}} = a - \alpha$ die Grösse c bestimmen. In beiden Fällen erhält man $c = \sqrt{a\,\alpha}$.

Das war vorauszusehen, denn dieser Wert c ist der Wert der Abszisse des Maximalpunktes.

Für den Inhalt der Fläche im 1. Quadranten haben wir

$$I = \int_{\alpha}^{a} \frac{\sqrt{(a^2 - x^2)(x^2 - \alpha^2)}}{x}\, dx = \left(\frac{a-\alpha}{2}\right)^2 \pi$$

Dies ist der Inhalt des Kreises über dem Durchmesser $AB = a - \alpha$. Die Peripherie dieses Kreises halbiert also die Fläche des vorgezeichneten Blattes.



Beim Nachlesen in dem Buche von LORIA[1]) fand ich pag. 185 eine ähnliche Kurve

$y^4 - 6a^2y^2 + 4x^2y^2 + a^4 = O$, die von LEIBNIZ aufgestellt worden war mit der Forderung, deren Quadratur zu finden.

[1]) Dr. GINO LORIA (Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven I, zweite Auflage, deutsch von F. SCHÜTTE, Leipzig 1910).

JAKOB BERNOULLI gelang die Lösung dieser Aufgabe, indem er der Gleichung die Form gab

$$y = \sqrt{2a^2 - x^2} + \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Als Resultat fand er

$$\int_0^a \left(\sqrt{2a^2 - x^2} + \sqrt{a^2 - x^2}\right) dx = 2\int \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{\pi a^2}{2}.$$

Diese Kurve ist abgebildet im genannten Werk auf Tafel V Fig. 36. Sie besteht aus zwei Blättern, ähnlich der meinigen [2]). Besonders interessierte mich das Resultat der Quadratur, wonach der Inhalt eines ganzen Blattes $= \pi a^2$ ist. Bei meiner Kurve bedeutet der Kreisinhalt $\left(\frac{a - \alpha}{2}\right)^2 \pi$ die Fläche eines halben Blattes. In beiden Fällen aber ist der Durchmesser des betreffenden Kreises gleich der Länge des auf der Symmetrieachse liegenden Durchmessers des Blattes.

Ausser anderm ergibt sich beim Vergleichen der beiden Kurven noch das Bemerkenswerte, dass in beiden Kurven $ON = OP_2$ ist (nach meiner Figurenbezeichnung).

---

[2]) Zum Vergleichen sollte man in einer der beiden Kurven die Koordinatenachsen miteinander vertauschen.