Abschätzung des Betrages einer Determinante.

Von

A. Bloch und G. Pólya.

Als Manuskript eingegangen am 18. Januar 1933.

I.

Bezeichnet D die n-zeilige Determinante mit den reellen Elementen a_{ik}, so ist

$$(1)\quad |D| \leqq \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\left(|a_{i1}| + |a_{i1} - a_{i2}| + |a_{i2} - a_{i3}| + \cdots + |a_{i,n-1} - a_{in}| + |a_{in}|\right).$$

Der allgemeine Faktor unter dem Produktzeichen ist die Hälfte der totalen Schwankung der $(n+2)$-gliedrigen Folge

$$(2)\qquad 0,\ a_{i1},\ a_{i2},\ a_{i3},\ \ldots,\ a_{i\nu},\ \ldots,\ a_{in},\ 0.$$

Um die Bedeutung dieses Faktors besser zu verstehen, setze man

$$a_{i0} = a_{i,n+1} = 0,$$

und man teile die Indices ν $(\nu = 0, 1, 2, \ldots, n)$ in zwei Klassen ein: Es gehöre ν

zur Klasse $\mathfrak{P}$, wenn $a_{i\nu} - a_{i,\nu+1} > 0$, hingegen

zur Klasse $\mathfrak{N}$, wenn $a_{i\nu} - a_{i,\nu+1} \leqq 0$.

Man erstrecke die Summe

$\sum\limits_{\mathfrak{P}}$ über die ν, die zur Klasse $\mathfrak{P}$,

$\sum\limits_{\mathfrak{N}}$ über die ν, die zur Klasse $\mathfrak{N}$

gehören. Es ist

$$\sum_{\mathfrak{P}} (a_{i\nu} - a_{i,\nu+1}) + \sum_{\mathfrak{N}} (a_{i\nu} - a_{i,\nu+1}) = \sum_{\nu=0}^{n} (a_{i\nu} - a_{i,\nu+1}) = 0.$$

Setzt man

$$\sum_{\mathfrak{P}} (a_{i\nu} - a_{i,\nu+1}) = V_i ,$$

so ist

$$V_i = \sum_{\mathfrak{P}} (a_{i\nu} - a_{i,\nu+1}) = - \sum_{\mathfrak{N}} (a_{i\nu} - a_{i,\nu+1}) \tag{3}$$

$$= \sum_{\mathfrak{P}} |a_{i\nu} - a_{i,\nu+1}| = \sum_{\mathfrak{N}} |a_{i\nu} - a_{i,\nu+1}|$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{n} |a_{i\nu} - a_{i,\nu+1}| .$$

V_i ist also der allgemeine Faktor unter dem Produktzeichen in (1), die Hälfte der totalen Schwankung der Folge (2). Nennt man V_i kurz die Variation der i-ten Zeile, so lautet die Ungleichung (1) so: Der Betrag einer Determinante kann das Produkt der Variationen der Zeilen nicht übersteigen.

Es sei folgender Spezialfall hervorgehoben: Zu jedem i ($i = 1, 2, \ldots, n$) gehört ein $h = h_i$ (h kann mit i variieren) so, dass die Ungleichungen

$$0 \leqq a_{i1} \leqq a_{i2} \leqq \cdots \leqq a_{i,h-1} \leqq a_{ih} \geqq a_{i,h+1} \geqq \cdots \geqq a_{in} \tag{4}$$

bestehen. (Es sind für h_i alle Werte 1, 2, ..., n zugelassen; $h_i = 1$ heisst, dass die Elemente der i-ten Zeile monoton fallen, usw.). Unter der Bedingung (4) ist die totale Schwankung der Folge (2) genau $2\,a_{ih}$, also $V_i = a_{ih}$. Nennt man a_{ih} das Hauptelement der i-ten Zeile, so lässt sich die Ungleichung (1) im vorliegenden Spezialfall so aussprechen: Der Betrag einer durch (4) charakterisierten speziellen Determinante kann das Produkt der Hauptelemente nicht übersteigen. Der Betrag der Determinante wird dem Produkt der Hauptelemente gleich, wenn diese in verschiedenen Kolonnen und links von ihnen lauter Nullen stehen.

Wir wenden uns jetzt zum Beweis der allgemeinen Ungleichung (1).

II.

Wir betrachten eine bestimmte Zeile und lassen deren Index i fort, sodass wir kurz a_ν, V für $a_{i\nu}$, V_i schreiben. Die algebraischen Komplemente der Elemente

$$a_1, \; a_2, \; \ldots, \; a_\nu, \; \ldots, \; a_n$$

seien bzw.

$$b_1, \; b_2, \; \ldots, \; b_\nu, \; \ldots, \; b_n ,$$

so dass

$$D = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_\nu b_\nu + \cdots + a_n b_n .$$

Wir wählen (willkürlich aber fest) eine Grösse B_0 und setzen

$$B_\nu = B_{\nu-1} + b_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Es ist

$$\begin{aligned} D &= a_1(B_1 - B_0) + a_2(B_2 - B_1) + \cdots + a_n(B_n - B_{n-1}) \\ &= (0 - a_1)B_0 + (a_1 - a_2)B_1 + \cdots + (a_{n-1} - a_n)B_{n-1} + (a_n - 0)B_n \\ &= \sum_{\nu=0}^{n} (a_\nu - a_{\nu+1}) B_\nu \\ &= \sum_{\mathfrak{P}} (a_\nu - a_{\nu+1}) B_\nu + \sum_{\mathfrak{N}} (a_\nu - a_{\nu+1}) B_\nu ; \end{aligned}$$

wir wenden die unter I eingeführten Bezeichnungen an. Es soll B_ν sein Maximum für $\nu = M$ und sein Minimum für $\nu = m$ erreichen. Man findet, unter Benützung von (3),

$$B_m V - B_M V \leqq D \leqq B_M V - B_m V$$

$$\text{(5)} \qquad |D| \leqq V(B_M - B_m) = V |b_{p+1} + b_{p+2} + \cdots + b_{p+q}| ;$$

es wurde der kleinere der beiden Indices m und M mit p, der grössere mit $p+q$ bezeichnet.

Zur besseren Auffassung der Ungleichung (5) sei die analoge Formel der Integralrechnung hieher gesetzt: Wenn $f(a) = f(b) = 0$, und die totale Schwankung der Funktion $f(x)$ im Intervalle $[a, b]$ endlich und gleich T ist, dann gibt es zu einer vorgegebenen integrablen Funktion $g(x)$ zwei Zahlen α, β, so dass $a \leqq \alpha \leqq b$, $a \leqq \beta \leqq b$ und

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = \frac{1}{2} T \int_\alpha^\beta g(x)\, dx .$$

III.

Wir schreiben die Ungleichung (5) in der Form

$$\text{(5')} \quad |D| \leqq |0.b_1 + \cdots + 0.b_p + V_i b_{p+1} + \cdots + V_i b_{p+q} + 0.b_{p+q+1} + \cdots + 0.b_{p+q+r}| ;$$

wir schreiben wieder ausführlicher V_i für V und setzen $n - p - q = r$. Wir lesen (5′) so: Der Betrag von D nimmt nicht ab, wenn die i-te Zeile von D ersetzt wird durch

$$\underbrace{0, 0, \ldots, 0,}_{p \text{ Mal}} \quad \underbrace{V_i, V_i, \ldots, V_i,}_{q \text{ Mal}} \quad \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{r \text{ Mal}}$$

mit geeigneten p, q, r; $p + q + r = n$. Man beachte, dass die aus D auf diese Weise entstehende Determinante in ihrer i-ten Zeile dieselbe Variation V_i aufweist wie D. Man wiederhole diese Operation für alle Zeilen, und dividiere jede Zeile der schliesslich entstandenen Determinante durch ihre Variation, die Determinante selbst also durch $V_1 V_2 \dots V_n$. Wir erreichen so eine wesentliche

Reduktion des zu beweisenden Satzes:
Es genügt die Ungleichung (1) bloss für solche spezielle Determinanten zu beweisen, deren alle Zeilen aus Nullen und Einsern in folgender Art aufgebaut sind:

$$(6) \qquad \underbrace{0, 0, \dots, 0,}_{p \text{ Mal}} \; \underbrace{1, 1, \dots, 1,}_{q \text{ Mal}} \; \underbrace{0, 0, \dots, 0,}_{r \text{ Mal}}$$

$p \geqq 0$, $q \geqq 0$, $r \geqq 0$. Natürlich können p, q, r mit dem Index i der Zeile variieren, nur $p + q + r = n$ muss fest bleiben.

IV.

Wir betrachten eine Determinante, deren jede Zeile die Gestalt (6) hat. Wenn in einer Zeile $q = 0$ ist, so verschwindet die Determinante, und der Fall ist erledigt. Somit haben wir nur solche Determinanten zu betrachten, in welchen für jede Zeile $q > 0$ gilt; jede Zeile hat dann die Variation 1, und wir haben zu zeigen, dass der Betrag der Determinante höchstens 1 ist, also, dass der Wert der Determinante (eine ganze Zahl) 1 oder 0 oder -1 ist.

Man subtrahiere aus der 1-sten Kolonne die 2-te, dann aus der 2-ten die 3-te, usw., zum Schluss aus der $(n-1)$-ten die n-te. Es entsteht eine neue Determinante, deren jede Zeile höchstens zwei von 0 verschiedene Elemente enthält; sind zwei nichtverschwindende Elemente vorhanden, so ist das eine 1 und das andere -1; ist nur ein nichtverschwindendes Element vorhanden, so ist es 1 oder -1. Es ist nun von einer solchen Determinante zu beweisen, dass ihr Wert nur 1 oder 0 oder -1 sein kann. Sind in jeder Zeile genau zwei Elemente von 0 verschieden, so ist die Summe der Elemente in jeder Zeile gleich 0, also die Determinante auch gleich 0. Gibt es eine Zeile mit lauter Nullen, so ist der Fall auch erledigt. Es bleibt somit nur der Fall übrig, in welchem es eine Zeile mit genau einem nichtverschwindenden Element $(= \pm 1)$ gibt. Durch Entwicklung nach den Elementen dieser Zeile gelangt man, von einer n-zeiligen Determinante ausgehend, zu einer $(n-1)$-zeiligen von dem gleichen absoluten Betrag und von der gleichen Bauart. Da für einzeilige Determinanten der Satz offenbar gilt, ist er somit durch vollständige Induktion als allgemein gültig erwiesen.

V.

Um die Anwendungsmöglichkeiten der Ungleichung (1) durch ein Beispiel zu erläutern, wollen wir jetzt ein interessantes Resultat von HAAR auf neuem Wege herleiten, allerdings in einer etwas abgeschwächten Form; wir meinen den Satz [1]):

Wenn die Funktionen $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ im Intervalle $[0, 1]$ zueinander orthogonal und normiert sind, dann befindet sich unter ihnen mindestens eine Funktion, deren totale Schwankung $\sqrt{\frac{n}{e}}$ übersteigt. Es ist vorausgesetzt, dass $n \geqq 2$ ist.

Die Voraussetzung besagt, dass

$$\int_0^1 \varphi_\mu(x)\ \varphi_\nu(x)\, dx = \begin{cases} 0 \text{ für } \mu \neq \nu, \\ 1 \text{ für } \mu = \nu \end{cases} \tag{7}$$

ist $(\mu, \nu = 1, 2, \ldots, n)$. Wir wollen die totale Schwankung von $\varphi_\mu(x)$ im Intervalle $[0, 1]$ mit T_μ bezeichnen. — Wir behaupten, dass es unter den Funktionen $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ höchstens eine gibt, deren untere und obere Schranke dasselbe Vorzeichen besitzen: Denn gäbe es zwei verschiedene mit positiver unterer Schranke (z. B.), so könnte ja das Integral über ihr Produkt nicht verschwinden. Es sei die Ausnahmefunktion, wenn es eine gibt, $\varphi_n(x)$, also sei auf alle Fälle $\varphi_\mu(x)$ für $\mu = 1, 2, \ldots, n-1$ so beschaffen, dass entweder ihre obere Schranke > 0 und ihre untere $\leqq 0$ ist, oder die untere Schranke < 0 und die obere $\geqq 0$. In beiden Fällen ist, wie leicht ersichtlich,

$$|\varphi_\mu(0)| + |\varphi_\mu(1)| \leqq T_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{8}$$

Nun erhält man aus (7) durch sukzessive Anwendung einer bekannten Integralformel für die GRAM'sche Determinante [2]), der Ungleichung (1), und schliesslich von (8)

$$1 = \begin{vmatrix} \int_0^1 \varphi_1(x)\ \varphi_1(x)\, dx \ldots \int_0^1 \varphi_1(x)\ \varphi_{n-1}(x)\, dx \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \int_0^1 \varphi_{n-1}(x)\ \varphi_1(x)\, dx \ldots \int_0^1 \varphi_{n-1}(x)\ \varphi_{n-1}(x)\, dx \end{vmatrix} =$$

---

[1]) A. HAAR, Mathematische Zeitschrift XXXI (1929), S. 128—137, beweist mehr: $\sqrt{n}$ für gerades, und $\sqrt{n - n^{-1}}$ für ungerades n, statt $\sqrt{e^{-1} n}$.

[2]) Vgl. z. B. G. PÓLYA und G. SZEGÖ, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis (Berlin 1925) Bd. I, S. 48, Nr. II 68.

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 \begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_1(x_2) & \dots & \varphi_1(x_{n-1}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_{n-1}(x_1) & \varphi_{n-1}(x_2) & \dots & \varphi_{n-1}(x_{n-1}) \end{vmatrix} dx_1\, dx_2 \dots dx_{n-1}$$

$$\leqq \frac{1}{(n-1)!} \prod_{\mu=1}^{n-1} \left(\frac{|\varphi_\mu(0)| + T_\mu + |\varphi_\mu(1)|}{2} \right)^2$$

$$\leqq \frac{1}{(n-1)!} (T_1\, T_2 \dots T_{n-1})^2;$$

bei Anwendung der Ungleichung (1) bringen wir die Kolonnen der Determinante unter dem $(n-1)$-fachen Integralzeichen in eine solche Reihenfolge, dass $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ monoton angeordnet werden. Es folgt

$$(T_1\, T_2 \dots T_{n-1})^2 \geqq (n-1)! > \left(\frac{n}{e}\right)^{n-1}. \tag{9}$$

Die letzte Ungleichung wird aus der Exponentialreihe so hergeleitet: Für $n \geqq 2$ ist

$$e^n > \frac{n^{n-2}}{(n-2)!} + \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{n^n}{n!} + \frac{n^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$= \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} \left(\frac{n-1}{n} + 1 + 1 + \frac{n}{n+1} \right)$$

$$\geqq \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} \left(\frac{1}{2} + 1 + 1 + \frac{2}{3} \right) > \frac{n^{n-1}}{(n-1)!}\, e.$$

Nun ergibt (9)

$$(T_1\, T_2 \dots T_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} > \sqrt{\frac{n}{e}},$$

woraus die ausgesprochene Behauptung offenbar folgt.

Ähnlich erhält man das folgende verwandte Resultat:

Bilden die beiden normierten Funktionenreihen

$$\psi_1(x),\ \psi_2(x),\ \dots,\ \psi_n(x),$$
$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \dots,\ \varphi_n(x)$$

ein biorthogonales System im Intervalle $[0, 1]$, ist

$$\psi_\mu(0) = \psi_\mu(1) = \varphi_\mu(0) = \varphi_\mu(1) = 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots, n),$$

und wird die totale Schwankung von $\psi_\mu(x)$ mit S_μ, die von $\varphi_\mu(x)$ mit T_μ bezeichnet, so ist

$$S_1\, T_1 \,.\, S_2\, T_2 \dots S_n\, T_n \geqq 4^n \,.\, n!,$$

und mindestens eines der Produkte $S_\mu\, T_\mu$ ist grösser als

$$\frac{4n}{e}.$$

Eine andere, unmittelbare Folgerung der Ungleichung (1) ist[3]:
Wenn der Kern $K(x, y)$ der Integralgleichung

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x, y)\, \varphi(y)\, d y = f(x)$$

beschränkt, dem Betrage nach $\leqq M$ ist, wenn ferner dieser Kern in bezug auf eine der beiden Variablen x, y eine endliche Totalschwankung besitzt, die, unabhängig von der anderen Variablen, $\leqq 2V$ ist, so wird die Potenzreihe der Fredholm'schen Determinante durch die der Funktion $e^{(M+V)\lambda}$ majoriert.

[3]) Vgl. S. A. Gheorghiu, Comptes Rendus CLXXXVI (1929), S. 838—840, insbesondere S. 840.