Einige Fragen aus den Elementen der Darstellenden Geometrie.

Von

A. Kiefer (Zürich).

(Als Manuskript eingegangen am 4. März 1929.)

I.

Wenn P', P'' in dem System der vereinigten Bildebenen der Grund und Aufriss des Punktes P sind, und man diese Punkte vertauscht, also P' mit Q'' und P'' mit Q' bezeichnet, so kann man fragen, welche Lage die Punkte P, Q im Raume zueinander haben. Die Punkte P, Q haben in verkehrtem Sinne gleiche Abstände von den zwei Bildebenen; der Punkt P liegt so weit oberhalb oder unterhalb der ersten Bildebene als der Punkt Q hinter oder vor der zweiten Bildebene liegt. Daher liegen die zwei Punkte P, Q symmetrisch zur Deckebene oder hintern Halbierungsebene[1]), d. i. die Ebene, welche diejenigen zwei Quadranten halbiert, durch welche die zweite Bildebene gedreht wird, bis sie mit der ersten Bildebene zusammenfällt. Die Mitte $M'\cdot''$ von $P'P''$ ist die vereinigte Projektion der Mitte von PQ in der Deckebene. Die vereinigten Spurpunkte $S_{1\cdot 2}$ der Geraden PQ liegen so, dass $OS_{1\cdot 2} = 2\,OM'\cdot''$ ist, wenn O der Schnittpunkt der sogenannten Ordnungslinie $P'P''$ mit der Achse ist, d. i. die Schnittlinie der beiden Bildebenen.

II.

Wenn g', g'' in dem System der vereinigten Bildebenen der Grund und Aufriss der Geraden g sind, so kann man g', g'' miteinander vertauschen, d. h. g' mit l'' bezeichnen und g'' mit l'; dann entsteht die Frage nach der Lage der Geraden g, l im Raum. Wählt man auf der Geraden g den Punkt P und vertauscht seine Projektionen, so entsteht der symmetrische Punkt Q zum Punkt P in bezug auf die Deckebene. Durchläuft der Punkt P die Gerade g, so beschreibt der Punkt Q die symmetrische Gerade l zur Geraden g in bezug auf die

[1]) Dieses Resultat ergibt sich auch durch folgende Überlegung. Die Strecken $P'Q'$, $P''Q''$ fallen in verkehrtem Sinne aufeinander. Daher hat die Mitte M von PQ zusammenfallende Projektionen und liegt in der Deckebene. Die Strecke PQ steht auf der Deckebene senkrecht, weil die Projektionen in verkehrtem Sinne zusammenfallen.

Deckebene. Die gegebene Gerade g und die durch Vertauschen ihrer Projektionen entstehende Gerade l liegen symmetrisch zur Deckebene. Die Spurpunkte der beiden Geraden g , l fallen verkehrt aufeinander. Man erhält also zu einer Geraden die symmetrische Gerade in bezug auf die Deckebene, indem man die Spurpunkte der Geraden vertauscht. Die Verbindungsgerade der beiden Spurpunkte von g ist die vereinigte Spur der Ebene (g , l). Der Schnittpunkt G', G'' von g', g'' ist der gemeinsame Schnittpunkt der Deckebene mit der Geraden g und mit der Geraden l. Die Verbindungslinie des Punktes G'·'' mit dem Punkt, wo die vereinigten Spuren die Achse treffen, ist die Halbierungslinie des Winkels (g , l) und zugleich die Affinitätsachse der Ebene (g , l). Die beiden Geraden g , l haben noch eine andere Halbierungslinie; sie steht senkrecht auf der Deckebene, zu welcher g , l symmetrisch liegen. Die Projektionen der Halbierungslinie gehen durch G'·'' und laufen senkrecht zur Achse, das ist die Schnittlinie der beiden Bildebenen; die Spurpunkte der Halbierungslinie liegen auf den vereinigten Spuren der Ebene (g , l). Liegt g in einer Bildebene, so fällt die entsprechende Gerade l in die andere Bildebene.

Durch einen Punkt R' , R'' des Raumes geht ein Strahlenbündel; vertauscht man die Projektionen der einzelnen Strahlen, so entsteht das symmetrische Strahlenbündel in bezug auf die Deckebene, dessen Scheitelpunkt der symmetrische Punkt von R in bezug auf die Deckebene ist. Die Projektionen der einzelnen Strahlen des Bündels auf die Deckebene bilden ein Strahlenbüschel, dessen Grund und Aufriss zusammenfallen; der Scheitelpunkt ist der Fusspunkt des Lotes von R auf die Deckebene, d. h. die Mitte von R' , R''.

III.

Die Symmetrieebene, d. i. die Ebene, welche den ersten und dritten Quadranten halbiert und die Deckebene stehen mit mancherlei Aufgaben im Zusammenhang. Jede Gerade, die zur Symmetrieebene oder zur Deckebene parallel ist, bildet mit beiden Bildebenen gleich grosse Winkel; im ersten Fall bilden die Projektionen der Geraden mit der Achse in verkehrtem Sinne gleiche Winkel und im zweiten Falle sind die Projektionen der Geraden zueinander parallel. Alle Geraden des Raumes, welche mit beiden Bildebenen gleich grosse Neigungswinkel besitzen und zwei gegebene windschiefe Geraden des Raumes schneiden, erfüllen ein hyperbolisches Paraboloid, für welches die zwei Geraden Leitlinien sind, während die dritte Leitlinie im ersten Falle die unendlich ferne Gerade der Symmetrieebene und im zweiten Falle die unendlich ferne Gerade der Deckebene ist. Wenn eine Ebene zur Symmetrieebene oder zur Deckebene parallel ist und man legt in die Ebene irgendein Polygon oder eine Figur, so sind die zwei Projektionen kongruent, und zwar im ersten Falle in verkehrtem Sinne und im zweiten Falle im gleichen Sinne. Wenn eine Ebene zur Symmetrieebene oder zur Deckebene senkrecht steht, so bildet die Ebene mit beiden Bildebenen gleiche Winkel; legt man in die Ebene ein Polygon oder eine Figur, so sind Grund und Aufriss von gleichem Inhalt.

IV.

Wenn e_1, e_2 in dem System der vereinigten Bildebenen die erste und zweite Spur der Ebene E sind, so kann man e_1, e_2 miteinander vertauschen, d. h. e_1 mit f_2 und e_2 mit f_1 bezeichnen; dann entsteht die Frage nach der Lage der zwei Ebenen E, F im Raum. Legt man in die Ebene E zwei beliebige Geraden g, l, und vertauscht man die Spuren der Ebene, so vertauschen sich die Spurpunkte von g und auch von l; man erhält die symmetrischen Geraden zu g, l in bezug auf die Deckebene. Durch Vertauschen der Spuren einer Ebene entsteht die zur Ebene in bezug auf die Deckebene symmetrisch gelegene Ebene.[1]) Wenn die Spuren einer Ebene zusammenfallen, so muss sie mit ihrer zur Deckebene symmetrisch gelegenen Ebene zusammenfallen; in der Tat ist die Ebene senkrecht zur Deckebene. Irgendein Punkt der Ebene und sein symmetrischer in bezug auf die Deckebene liegen so, dass die Strecke zwischen den Projektionen der zwei Punkte von der Affinitätsachse der Ebene halbiert wird. Wenn zwei Ebenen zur Deckebene symmetrisch liegen, so entstehen durch Vertauschen der Projektionen der Punkte der einen Ebene die Punkte der andern Ebene; die zwei Ebenen haben eine gemeinsame Affinitätsachse.

Hat man durch die Gerade g ein Ebenenbüschel und vertauscht man g' mit g'' und auch die Spuren der Ebenen, so entsteht das zur Deckebene symmetrisch gelegene Ebenenbüschel. Die Ebenen schneiden die Deckebene in Geraden, die durch den Schnittpunkt von g', g'' nach den Schnittpunkten der Spuren mit der Achse gehen, d. i. die Schnittlinie der beiden Bildebenen.

V.

Wenn in dem System der vereinigten Bildebenen die Spuren e_1, e_2 einer Ebene E aufeinander senkrecht stehen, so kann man nach der

[1]) Man kann dieses Ergebnis auch anders finden. Man vertauscht die Projektionen von e_1 untereinander und ebenso diejenigen von e_2; das gibt die Spuren f_2, f_1 der neuen Ebene, die also zu e_1, e_2 in bezug auf die Deckebene symmetrisch liegt.

besonderen Lage aller solchen Ebenen E im Raume fragen. Hält man den Schnittpunkt O der beiden Spuren auf der Achse fest und dreht die eine Spur um diesen Punkt, so beschreibt sie ein Strahlenbüschel und die andere Spur beschreibt ebenfalls ein Strahlenbüschel; die beiden Strahlenbüschel sind projektivisch. Dreht man die zweite Bildebene mit dem in ihr gelegenen Strahlenbüschel auf, bis sie auf der ersten Bildebene senkrecht steht, so bleibt das Büschel der ersten Spuren zum Büschel der zweiten Spuren projektivisch. Denkt man sich immer durch entsprechende Strahlen eine Ebene gelegt, so umhüllt die Ebene eine Kegelfläche zweiter Klasse mit dem Punkt O als Spitze. Die Kegelfläche berührt jede der zwei Bildebenen, und zwar längs der Geraden, die in der einen oder anderen Bildebene in dem festen Punkte O auf der Achse senkrecht steht. Die Kegelfläche wird von jeder Parallelebene zu einer Bildebene in einer Parabel geschnitten und jede zur Achse senkrechte Ebene schneidet eine gleichseitige Hyperbel heraus. Die Gesamtheit aller Ebenen, deren Spuren im vereinigten System der beiden Bildebenen aufeinander senkrecht stehen, besteht aus den Parallelebenen zu den Tangentialebenen einer Kegelfläche zweiter Klasse, welche die angegebene Lage hat.

VI.

Man kann die Frage im vorigen Abschnitt dadurch verallgemeinern, dass man verlangt, dass die beiden Spuren e_1 , e_2 einer Ebene im System der vereinigten Bildebenen nicht aufeinander senkrecht stehen, sondern einen Winkel von konstanter Grösse φ einschliessen. Hält man wieder den Schnittpunkt O der Spuren auf der Achse fest, so gehören zu einer ersten Spur zwei Lagen der zweiten Spur, von denen jede mit der ersten Spur den Winkel φ einschliesst. Wählt man eine zweite Spur, so gehören zu ihr ebenfalls zwei Lagen der ersten Spur, von denen jede mit der zweiten Spur den Winkel φ einschliesst. Die beiden Büschel der ersten und zweiten Spuren sind also zwei-zweideutig aufeinander bezogen. Bringt man die Aufrissebene mit dem Büschel der zweiten Spuren in senkrechte Lage zur Grundrissebene, so bleiben die beiden Strahlenbüschel zwei-zweideutig aufeinander bezogen. Daher umhüllen die Verbindungsebenen von entsprechenden Strahlen eine Kegelfläche vierter Klasse. Sie berührt jede der zwei Bildebenen längs der zwei Geraden, die der Achse entsprechen, d. h. durch O gehen und mit der Achse den Winkel φ einschliessen. Die Gesamtheit der Ebenen im Raum, deren Spuren im System der vereinigten Bildebenen den konstanten Winkel φ einschliessen, besteht aus den Parallelebenen zu den Tangentialebenen einer Kegelfläche vierter Klasse, welche die angegebene Lage hat.

VII.

Wenn in dem System der vereinigten Bildebenen die Projektionen g', g'' der Geraden g aufeinander senkrecht stehen, so kann man nach der besonderen Lage von allen solchen Geraden g im Raume fragen. Wählt man den Schnittpunkt O von g', g'' auf der Achse und hält ihn fest, so gehört zu jeder Geraden g' eine Lage von g'' und umgekehrt. Entsprechende Geraden stehen immer aufeinander senkrecht und bilden zwei projektivische Strahlenbüschel. Dreht man die Aufrissebene mit den zweiten Projektionen der Geraden, bis sie auf der Grundrissebene senkrecht steht, so bleibt die Projektivität der beiden Strahlenbüschel bestehen. Legt man jetzt durch das Büschel der Geraden g' die ersten projizierenden Ebenen und durch das Büschel der Geraden g'' die zweiten projizierenden Ebenen, so entstehen zwei projektivische Ebenenbüschel. Ihr Erzeugnis ist eine Kegelfläche zweiten Grades, welche jede Bildebene längs der Geraden berührt, die im Punkte O auf der Achse senkrecht steht. Die Gesamtheit aller Geraden des Raumes, deren Projektionen in dem System der vereinigten Bildebenen aufeinander senkrecht stehen, besteht aus allen parallelen Geraden zu den Erzeugenden dieser Kegelfläche zweiten Grades.

VIII.

Man kann die Frage im vorigen Abschnitt dadurch verallgemeinern, dass man verlangt, dass die Projektionen g', g'' einer Geraden g im vereinigten System der beiden Bildebenen nicht aufeinander senkrecht stehen, sondern einen Winkel von konstanter Grösse φ einschliessen. Wählt man wieder den Schnittpunkt O von g', g'' auf der Achse und hält ihn fest, so gehören zu jeder Lage von g' zwei Lagen von g'', die ebenfalls durch O gehen und mit g' den Winkel φ einschliessen; umgekehrt entsprechen irgendeiner Lage von g'' durch O zwei Lagen von g', die ebenfalls durch O gehen und mit g'' den Winkel φ einschliessen. Die beiden Büschel der Strahlen g' und g'' sind also zwei-zweideutig aufeinander bezogen. Bringt man die Aufrissebene mit dem Büschel der Geraden g'' in senkrechte Lage zur Grundrissebene, so kann man durch die Geraden des Büschels g'' die zweiten projizierenden Ebenen legen und durch das Büschel der Geraden g' kann man die ersten projizierenden Ebenen legen. Diese zwei Büschel von projizierenden Ebenen entsprechen sich ebenfalls zwei-zweideutig. Sie erzeugen daher durch das Schneiden entsprechender Ebenen eine Kegelfläche vierten Grades. Jede Gerade des Raumes, die zu einer Erzeugenden der Kegelfläche vierten Grades parallel ist, hat im System der vereinigten Bildebenen zwei Projektionen, die einen Winkel von gegebener Grösse φ einschliessen.

Bemerkung. Der Verfasser dieses Artikels überlegte die verschiedenen Fragen, die vermutlich bekannt sind, vor vielen Jahren. Damals untersuchte sein früherer Schüler Herr HENDRIK DE VRIES (jetzt Professor in Amsterdam) die Frage nach den Geraden, die entstehen, wenn man im vereinigten System von drei paarweise aufeinander senkrecht stehenden Bildebenen den Grundriss einer Geraden mit dem Seitenriss zusammenfallen lässt. Die bezügliche Publikation findet sich in Nieuw Arch. von Wisk. 2e Reeks. Deel I. 1894.