Über die Klassenzahl der quadratischen Körper.

Von

MAX GUT (Zürich).

(Als Manuskript eingegangen am 17. Februar 1927.)

Im folgenden soll gezeigt werden, wie die Klassenzahl für quadratische Körper sehr einfach, und ohne dass es nötig ist, die GAUSSschen Summen zu berechnen, bestimmt werden kann.

Der Grundgedanke ist der, dass wir nicht $L(1)$ betrachten, sondern das zunächst divergente, genauer gesagt oszillierende $L^{(r)}(0)$, auf welches wir auf Grund der HECKEschen Funktionalgleichung übergehen können. Hernach ergibt sich aber der wahre Wert von $L^{(r)}(0)$ einfach auf Grund des bekannten Satzes, dass er gleich dem Limes des CESAROschen Mittels der Koeffizienten der DIRICHLET-Reihe $L^{(r)}(s)$ ist.

Es sei k ein beliebiger algebraischer Zahlkörper, $\zeta_k(s)$ die zu ihm gehörige RIEMANNsche Zeta-Funktion, die für $\sigma > 1$, $s = \sigma + ti$ durch

$$\zeta_k(s) = \prod_{(\mathfrak{p})} \frac{1}{1 - n(\mathfrak{p})^{-s}} \quad ,$$

wo $\mathfrak{p}$ alle Primideale von k durchläuft, dargestellt wird. Es bedeute ferner

$$L(s) = \frac{\zeta_k(s)}{\zeta(s)} \quad ,$$

wo also $\zeta(s)$ die gewöhnliche RIEMANNsche Zeta-Funktion bedeutet.

Dann ist bekanntlich

$$h \cdot \varkappa = \lim_{s=1} L(s) = \frac{\zeta_k(s)}{\zeta(s)} \bigg|_{s=1} \quad ,$$

wo h die Klassenzahl von k ist und in bekannter Bezeichnungsweise (vgl. den HILBERTschen Zahlbericht):

$$\varkappa = \frac{2^{r_1+r_2}\pi^{r_2} R}{w\,|\sqrt{d}\,|} \quad .$$

Die HECKEsche Funktional-Gleichung lautet für den Körper k (vgl. z. B. E. LANDAU, Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale, Leipzig und Berlin 1918, Satz 156, S. 75 unten):

$$\frac{\zeta_k(1-s)}{\left(\cos\frac{\pi s}{2}\right)^r} = \zeta_k(s)\cdot\frac{2^m}{(2\pi)^{ms}}\,|\,d\,|^{s-\frac{1}{2}}\cos\frac{\pi s}{2}\left(\sin\frac{\pi s}{2}\right)^{r_2}\Gamma^m(s) \quad ,$$

und die Funktional-Gleichung der gewöhnlichen RIEMANNschen Zeta-Funktion:

$$\zeta(1-s) = \zeta(s)\cdot\frac{2}{(2\pi)^s}\cos\frac{\pi s}{2}\cdot\Gamma(s) \quad .$$

Dividieren wir die erste Gleichung durch die zweite, so folgt die Funktional-Gleichung für die Funktion $L(s)$:

$$\frac{L(1-s)}{\left(\cos\frac{\pi s}{2}\right)^r} = L(s)\cdot\frac{2^{m-1}}{(2\pi)^{(m-1)s}}\,|\,d\,|^{s-\frac{1}{2}}\cdot\left(\sin\frac{\pi s}{2}\right)^{r_2}\cdot\Gamma^{m-1}(s) \quad .$$

Nun wird für $s = 1$:

$$\lim_{s=1}\frac{L(1-s)}{\left(\cos\frac{\pi s}{2}\right)^r} = h\cdot\varkappa\cdot\frac{2^{m-1}}{(2\pi)^{m-1}}\,|\,d\,|^{\frac{1}{2}} \quad ,$$

und da $r = r_1 + r_2 - 1 \quad , \quad m = r_1 + 2r_2$ ist:

$$\lim_{s=1}\frac{L(1-s)}{\left(\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi s}{2}\right)^r} = \frac{2}{w}\cdot h\cdot R \quad .$$

Damit wird

$$L^{(r)}(0) = \frac{2}{w}\cdot(r!)\cdot R\cdot h \quad , \quad \text{resp.} \quad \lim_{s=0} L^{(r)}(s) = \frac{2}{w}\cdot(r!)\cdot R\cdot h \quad ,$$

wenn unter $L(s)$ in der ersten dieser beiden Formeln die analytische Funktion gemeint ist, in der zweiten die DIRICHLET-Reihe

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s} \quad ,$$

falls deren $r$te Derivierte im Punkte $s = 0$ nach den Prinzipien der Summabilität divergenter DIRICHLET-Reihen summierbar ist.

Man beachte, dass in dieser einfachen Formel die Diskriminante d des Körpers k nicht mehr auftritt, und dass, falls die DIRICHLET-Reihe im angegebenen Sinne summierbar ist, im allgemeinen Gliede

$$(-1)^r \cdot \frac{a_n \log^r n}{n^s}$$

derselben, $\log n$ zur $r$ten Potenz auftritt. Nun ist der Regulator R eine Summe von Grössen ähnlicher Bauart, denn eine solche Grösse ist ja ein Produkt von r Logarithmen. Die Fälle $r = 0$ und $r = 1$ werden so besonders interessant.

Handelt es sich um die quadratischen Körper $(m = 2)$, so wissen wir, dass die DIRICHLET-Reihe

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} \quad ,$$

wo $\chi(n) = \left(\frac{d}{n}\right)$ ein vom Hauptcharakter verschiedener reeller Restcharakter mod. $|d|$ ist, mitsamt ihren durch gliedweise Differentiation erhaltenen Derivierten für $\sigma > 0$ konvergiert.

Für den quadratischen imaginären Körper ist $R = 1$ und daher

$$\lim_{s=0} L(s) = \frac{2}{w} \cdot h \quad , \qquad \text{wo } w = \begin{cases} 6 & \text{für } d = -3 \\ 4 & \text{„} \quad d = -4 \\ 2 & \text{„} \quad d < -4 \end{cases} .$$

Für den quadratisch reellen Körper ist $w = 2$ und $R = \log \varepsilon$, wo ε die Grundeinheit mit $\varepsilon > 1$ ist, und somit:

$$\lim_{s=0} L'(s) = h \cdot \log \varepsilon \quad .$$

Nun benutzen wir, wie er für uns hier genügt, den folgenden Satz über divergente DIRICHLET-Reihen:

Sei $f(s)$ eine analytische Funktion, die für $\sigma > 0$ durch die DIRICHLET-Reihe

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s}$$

dargestellt wird, aber auch im Punkte $s = 0$ existiert, ohne dass

$$C(n) = c_1 + c_2 + c_3 + \ldots + c_n$$

für unendliches n einem Limes zuzustreben braucht, existiert dagegen

$\lim\limits_{n=\infty} C'(n)$, wo

$$C'(n) = \frac{C(1) + C(2) + C(3) + \ldots + C(n)}{n}$$

das (erste) CESAROsche Mittel ist, so ist

$$f(0) = \lim_{n=\infty} C'(n) \quad .$$

Sei $n = N \cdot |d| + q$, wo $0 \leqq q \leqq d - 1$, so ist, wegen

$$\chi(n) = \chi(n') \text{ für } n \equiv n' \pmod{|d|} \text{ und } \sum_{n=1}^{|d|} \chi(n) = 0$$

für den quadratisch imaginären Körper, falls $L(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s}$ ist:

$$C(n) = \sum_{l=1}^{n} \chi(l) = \sum_{l=1}^{q} \chi(l) = C(q) \quad .$$

Trägt man in einem rechtwinkligen Koordinatensystem $C(n)$ als Ordinate für die Abszissenwerte x mit $n \leqq x < n + 1$ auf, so ist $n\, C'(n)$ gleich dem Flächeninhalt der zwischen der Treppe, der x-Axe und der Ordinate $n + 1$ gelegenen Fläche. Dabei sind natürlich die Flächeninhalte für Flächen im ersten Quadranten positiv, für Flächen im vierten Quadranten negativ zu rechnen. Ferner soll $C(0) = C(|d|) = 0$ sein.

Das geometrische Bild zeigt sofort, dass

$$\lim_{n=\infty} C'(n) = h \cdot \frac{2}{w} = \frac{1}{|d|} \sum_{n=1}^{|d|-1} (|d| - n) \cdot \left(\frac{d}{n}\right)$$

ist, oder da (vgl. z. B. E. HECKE, Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen, Leipzig 1923, Formel [125], S. 187)

$$\left(\frac{d}{n}\right) = -\left(\frac{d}{m}\right) \text{ ist , wenn } n \equiv -m \pmod{|d|} \text{ ist ,}$$

$$h \cdot \frac{2}{w} = \frac{-1}{|d|} \sum_{n=1}^{|d|-1} n \cdot \left(\frac{d}{n}\right) \quad .$$

Das ist aber die eine der Formeln, die wir beweisen wollten.

Für den reellen quadratischen Körper gilt, falls

$$L'(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n) \log n}{n^s} \quad ,$$

also $c_n = -\chi(n) \cdot \log n$ bedeutet , und $U_k = \log 1 = 0$ ist für

$$k = 1\,,2\,,3\,,\ldots \left[\frac{d-5}{2}\right], \left[\frac{d-3}{2}\right], \left[\frac{d+1}{2}\right], \left[\frac{d+3}{2}\right] \ldots\,,$$

$$\ldots d + \left[\frac{d-5}{2}\right],\ d + \left[\frac{d-3}{2}\right],\ d + \left[\frac{d+1}{2}\right],\ d + \left[\frac{d+3}{2}\right], \ldots$$

dagegen:

$$U_{\left[\frac{d-1}{2}\right]} = -\sum_{1}^{\left[\frac{d-1}{2}\right]} \chi(l) \cdot \log l$$

$$U_{d+\left[\frac{d-1}{2}\right]} = -\sum_{\left[\frac{d+1}{2}\right]}^{d+\left[\frac{d-1}{2}\right]} \chi(l) \cdot \log l$$

$$U_{2d+\left[\frac{d-1}{2}\right]} = -\sum_{d+\left[\frac{d+1}{2}\right]}^{2d+\left[\frac{d-1}{2}\right]} \chi(l) \cdot \log l\,,$$

also allgemein für $\mu = 1\,,2\,,3\,,\ldots$:

$$U_{\mu d+\left[\frac{d-1}{2}\right]} = -\sum_{(\mu-1)d+\left[\frac{d+1}{2}\right]}^{\mu d+\left[\frac{d-1}{2}\right]} \chi(l) \cdot \log l\,,$$

die Gleichung

$$C(n) = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_{n-1} + U_n + \sum_{\nu d+\left[\frac{d+1}{2}\right]}^{n} - \chi(l) \cdot \log l\,,$$

wenn das ganzzahlige n so bestimmt wird, dass in der letzten Summe über höchstens $d-1$ aufeinanderfolgende Werte summiert wird (von n an abwärts gezählt). Ist n von der Form $\nu d + \left[\frac{d-1}{2}\right]$, so tritt die Summe am Schlusse der rechten Seite überhaupt nicht auf.

Wir behaupten, dass

$$\lim_{n=\infty} \sum_{l=1}^{n} U_l = \log \frac{\prod\limits_{a} \sin\left(\pi \frac{a}{d}\right)}{\prod\limits_{b} \sin\left(\pi \frac{b}{d}\right)}\,,$$

wo a und b alle Werte $1\,,2\,,3\,,\ldots \left[\frac{d-1}{2}\right]$ durchlaufen, für welche

$$\left(\frac{d}{a}\right) = -1 \quad , \quad \text{bezw.} \left(\frac{d}{b}\right) = +1$$

ist.

In der Tat ist, da $\chi(n) = \left(\frac{d}{n}\right) = \left(\frac{d}{m}\right) = \chi(m)$ ist, wenn $n \equiv -m \,(\mathrm{mod.}\, d)$ ist (HECKE l. c.), für $\mu = 1, 2, 3, \ldots$

$$U_{\mu d + \left[\frac{d-1}{2}\right]} = \log \prod_{l=1}^{\left[\frac{d}{2}\right]} \left\{ \left((\mu d - l)(\mu d + l) \right)^{-\chi(l)} \right\} ,$$

und da es gleich viele $\chi(n) = +1$, wie $\chi(n) = -1$ gibt, falls n ein ganzes Restsystem mod. d durchläuft, oder (wegen der soeben benutzten Formel) ein halbes Restsystem mod. d von aufeinander direkt folgender Zahlen, wenn wir von $n \equiv 0 \,(\mathrm{mod.}\, d)$ an aufwärts oder aber abwärts gehen,

$$U_{\mu d + \left[\frac{d-1}{2}\right]} = \log \prod_{l=1}^{\left[\frac{d}{2}\right]} \left\{ \left(\left(1 - \frac{l}{\mu d}\right) \left(1 + \frac{l}{\mu d}\right) \right)^{-\chi(l)} \right\}$$

$$= \log \prod_{l=1}^{\left[\frac{d}{2}\right]} \left\{ \left(1 - \frac{1}{\mu^2} \frac{l^2}{d^2}\right)^{-\chi(l)} \right\} .$$

Unter Berücksichtigung der bekannten Produkt-Darstellung der Sinus-Funktion

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{\mu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\mu^2}\right)$$

und des Wertes $U_{\left[\frac{d-1}{2}\right]}$ folgt das zu Beweisende. Denn die andern U_k sind ja gleich Null.

Wir setzen ferner $V_k = \log 1 = 0$ für

$$k = 1, 2, 3, \ldots \left[\frac{d-7}{2}\right], \left[\frac{d-5}{2}\right], \left[\frac{d-1}{2}\right], \left[\frac{d+1}{2}\right], \ldots$$

$$\ldots d + \left[\frac{d-7}{2}\right], d + \left[\frac{d-5}{2}\right], d + \left[\frac{d-1}{2}\right], d + \left[\frac{d+1}{2}\right], \ldots$$

und

$$V_{\left[\frac{d-3}{2}\right]} = -\sum_{l=1}^{\left[\frac{d-1}{2}\right]} \left(\left[\frac{d-1}{2}\right] - l \right) \cdot \chi(l) \cdot \log l ,$$

endlich für $\mu = 1, 2, 3, \ldots$

$$V_{\mu d + \left[\frac{d-3}{2}\right]} = -\sum_{l=-\left[\frac{d-1}{2}\right]}^{\left[\frac{d-1}{2}\right]} \left(\left[\frac{d-1}{2}\right] - l\right) \cdot \chi(l) \cdot \log(\mu d + l)$$

$$= \log \prod_{l=-\left[\frac{d-1}{2}\right]}^{\left[\frac{d-1}{2}\right]} \left\{ (\mu d + l)^{-\left(\left[\frac{d-1}{2}\right]-l\right)\chi(l)} \right\}$$

Da, wie schon ausgeführt, $\chi(n) = \left(\frac{d}{n}\right) = \left(\frac{d}{m}\right) = \chi(m)$ ist für $n \equiv -m \pmod{d}$, und wir beim Durchlaufen eines halben Restsystems direkt aufeinanderfolgender Zahlen von $l \equiv 0 \pmod{d}$ ausgehend, nach aufwärts oder aber nach abwärts gleich viele $\chi(l) = +1$ wie $\chi(l) = -1$ antreffen, sind im Zähler des Logarithmen-Argumentes von $V_{\mu d + \left[\frac{d-3}{2}\right]}$ gleich viele Faktoren wie im Nenner, falls die Faktoren mit ihrer Multiplizität gezählt werden.

Dann wird, falls ν so bestimmt ist, dass $n = \nu d + \left[\frac{d-3}{2}\right] + q$, wo $0 \leqq q < d$ ist,

$$C'(n) = \frac{1}{n}\left(n\,U_1 + (n-1)\,U_2 + (n-2)\,U_3 + \ldots + 2\,U_{n-1} + U_n\right) +$$

$$+ \frac{1}{n}\left(V_1 + V_2 + V_3 + \ldots + V_{n-1} + V_n\right) +$$

$$+ \frac{1}{n}\left(-\sum_{r=1}^{q} (q-r) \cdot \chi\left(\left[\frac{d-1}{2}\right] + r\right) \cdot \log\left(\nu d + \left[\frac{d-1}{2}\right] + r\right)\right),$$

wobei die letzte Summe überhaupt nicht auftritt, falls $q = 0$ oder $= 1$ ist. Lässt man hier n über alle Grenzen wachsen, so konvergiert der erste Ausdruck auf der rechten Seite auf Grund eines bekannten Theoremes gegen

$$\lim_{n=\infty} \sum_{l=1}^{n} U_l = \log \frac{\prod_a \sin\left(\pi \frac{a}{d}\right)}{\prod_b \sin\left(\pi \frac{b}{d}\right)},$$

die beiden andern, wie eine auf Grund der letzten Bemerkung über die

$$V_{\mu d + \left[\frac{d-3}{2}\right]}$$

leichte Bildung einer Majorante, resp. Minorante ergibt, wie

$$\text{const.}\ \frac{\log n}{n}$$

gegen Null. Man hat nämlich im Argument des Logarithmus jenes Ausdruckes (in der Produktdarstellung) nur etwa alle Zähler mit ihrer Multiplizität etwa durch $(\mu + 1)\,d$, alle Nenner durch $(\mu - 1)\,d$ zu ersetzen, wo μ schon etwa grösser als 3 sei, resp. umgekehrt.

Es folgt mithin, dass

$$h \cdot \log \varepsilon = \log \frac{\prod\limits_a \sin\left(\pi \frac{a}{d}\right)}{\prod\limits_b \sin\left(\pi \frac{b}{d}\right)}$$

ist, wo a und b alle Werte $1, 2, 3, \ldots \left[\frac{d-1}{2}\right]$ durchlaufen, für welche

$$\left(\frac{d}{a}\right) = -1 \quad , \quad \text{bezw.}\ \left(\frac{d}{b}\right) = +1 \qquad \text{ist.}$$

Wir können auch schreiben

$$\varepsilon^{2h} = \frac{\prod\limits_a \sin\left(\pi \frac{a}{d}\right)}{\prod\limits_b \sin\left(\pi \frac{b}{d}\right)} \quad ,$$

wobei jetzt aber a und b alle Werte $1, 2, 3, \ldots d-2, d-1$ durchlaufen, für welche

$$\left(\frac{d}{a}\right) = -1 \quad , \quad \text{bezw.}\ \left(\frac{d}{b}\right) = +1$$

ist. Das war aber zu beweisen.