Zwei Aufgaben, die auf windschiefe Regelflächen führen.

Von

A. Kiefer (Zürich).

(Als Manuskript eingegangen am 25. Januar 1926.)

I.

Gesucht im Raum der Ort des Punktes, von dem aus die Zentralprojektionen a', b' von zwei windschiefen Geraden a, b auf eine Ebene $\mathcal{E}$ zueinander rechtwinklig liegen.

Sind A, B die Schnittpunkte der Geraden a, b mit der Ebene $\mathcal{E}$, so gehen die Projektionen a', b' der Geraden a, b durch A, beziehungsweise durch B und stehen aufeinander senkrecht. Der Ort des Schnittpunktes von a', b' in der Ebene $\mathcal{E}$ ist der Kreis über der Strecke AB als Durchmesser. Der gesuchte Ort des Punktes im Raum ist also die Regelfläche, die von den sämtlichen Geraden gebildet wird, welche durch die einzelnen Punkte des Kreises gehen und jede der zwei windschiefen Geraden a, b schneiden.

> Die Regelfläche ist das Hyperboloid, welches von den zwei projektivischen Ebenenbüscheln erzeugt wird, deren Scheitelkanten die Geraden a, b sind und wo entsprechende Ebenen je durch denselben Punkt des Kreises hindurchgehen. Jeder Punkt einer Hyperboloiderzeugenden, die a, b schneidet, liefert dieselben Geraden a', b'.

Legt man von irgend einem Punkt des Hyperboloids das Ebenenpaar nach den Geraden a, b, so schneidet die Ebene $\mathcal{E}$ und daher auch jede Parallelebene zu $\mathcal{E}$ das Ebenenpaar in zwei rechtwinkligen Geraden, die auf a, b aufstehen. Hält man also die windschiefen Geraden a, b fest und verschiebt die Bildebene $\mathcal{E}$ parallel, so tritt immer das gleiche Hyperboloid auf. Dasselbe entsteht daher auch so, dass man eine Ebene parallel zu $\mathcal{E}$ verschiebt und in jeder Lage der Ebene über der Verbindungsstrecke ihrer Schnittpunkte mit den Geraden a, b als Durchmesser einen Kreis legt; diese Kreise erfüllen das Hyperboloid.[1]) Wählt man die Parallelebene so, dass die in ihr gelegene, durch die Geraden a, b begrenzte Strecke möglichst klein wird, so ist der Mittelpunkt des zugehörigen Kreises, der dann am kleinsten wird, der Mittelpunkt des Hyperboloids. Mit Hilfe der Kugel über diesem Kreis als Grosskreis erhält man die andere reelle Kreisschnittebene durch den Mittelpunkt und damit in dem gemeinsamen Durchmesser der zwei Kreise eine Achse des Hyperboloids und daraus die Ebene der beiden andern Achsen und dann diese selber.

Um die kürzeste, zu $\mathcal{E}$ parallele Strecke zwischen a, b zu finden, möge b' die Orthogonalprojektion von b auf die Parallelebene durch a zu b bedeuten. Eine Parallelebene zu $\mathcal{E}$ schneide b, b', a in den Punkten P, Q, R. Beim parallelen Verschieben der Ebene behält PQ die Länge und Richtung, QR bleibt parallel und der Winkel PQR ändert seine Grösse nicht, weil seine Schenkel parallel bleiben. Die Strecke PR wird möglichst klein, wenn sie auf QR senkrecht steht. Die gesuchte Strecke zwischen a, b ist parallel zu $\mathcal{E}$ und auch paralle zu einer Ebene, die auf der Schnittlinie von $\mathcal{E}$ mit der Ebene (a, b') senkrecht steht. Man kann die Strecke auch so finden, dass man im speziellen Dreieck PQR, dessen Ecken auf b, b', a und in $\mathcal{E}$ liegen, die Höhe PF zieht, F parallel b' nach a schiebt und durch den erhaltenen Punkt die Parallele zur Dreieckshöhe FP zieht.

Die von zwei windschiefen Geraden a, b begrenzte kleinste Strecke, die zu einer gegebenen Ebene $\mathcal{E}$ parallel läuft, muss parallel sein zu einer Fallinie der Ebene $\mathcal{E}$ gegen eine Parallelebene zu a, b. Die Richtung der Strecke ist von allen Richtungen der Ebene $\mathcal{E}$ diejenige, die mit dem senkrechten Abstand der zwei Geraden den kleinsten Richtungsunterschied bildet.

Es folgt noch: Es gibt unendlich viele Richtungen, in denen die Geraden a, b parallel auf die Ebene $\mathcal{E}$ projiziert, Projektionen a', b geben, die aufeinander senkrecht stehen. Die Projektionsrichtungen sind parallel zu den Erzeugenden des Asymptotenkegels, der zum Hyperboloid gehört.

Wenn die Geraden a, b sich schneiden, so geht das Hyperboloid

[1]) Darnach könnte man meinen, dass der unendlich ferne ebene Schnitt des Hyperboloids ein Kreis sei, aber infolge analoger Überlegung müsste der unendlich ferne Kegelschnitt einer Fläche zweiten Grades ähnlich zu irgend einem ebenen Schnitt der Fläche sein. Für Kegelschnitte im Unendlichen gilt die gewöhnliche Artunterscheidung nicht mehr; die unendlich ferne Ebene kann als parallel zu jeder im Endlichen gelegenen Ebene aufgefasst werden.

in eine Kegelfläche über, und wenn a, b parallel sind, so wird aus dem Hyperboloid eine Zylinderfläche.

Verlangt man, dass im allgemeinen Fall, wo die Geraden a, b windschief liegen, der Winkel zwischen a', b' nicht $90°$ messe, sondern von der Grösse φ sei, so treten in der Ebene $\mathfrak{E}$ an Stelle des Kreises über AB als Durchmesser zwei Kreise über AB als Sehne mit dem zugehörigen Peripheriewinkel φ. Es entstehen dann zwei Hyperboloide, die wieder durch projektivische Ebenenbüschel oder durch Parallelverschiebung der Ebene erzeugt werden, indem in jeder Ebene über ihrer Strecke zwischen a, b als Sehne die zwei Kreise mit dem Peripheriewinkel φ gelegt werden.

Ein spezieller Fall entsteht, wenn man die zwei Kreise in die Verbindungsgerade der zwei Punkte A, B, also in einen unendlich grossen Kreis übergehen lässt. Der Winkel φ ist dann gleich null; die beiden Geraden a', b' werden parallel und die zwei Hyperboloide gehen in ein hyperbolisches Paraboloid über.

Der Ort eines Punktes, von dem aus die Zentralprojektionen von zwei windschiefen Geraden a, b auf die Ebene $\mathfrak{E}$ in parallele Geraden a', b' übergehen, ist das Paraboloid, das gebildet wird von sämtlichen zur Ebene $\mathfrak{E}$ parallelen Transversalen der Geraden a, b. Jeder Punkt derselben Transversalen liefert die gleichen parallelen Geraden a', b'. Die Richtungen, in denen a, b durch Parallelprojektion auf die Ebene $\mathfrak{E}$ zu parallelen Geraden a', b' werden, laufen nach der unendlich fernen Geraden der Ebene $\mathfrak{E}$, oder nach der Verbindungsgeraden der unendlich fernen Punkte von a, b. Der Schnittpunkt jener zwei unendlich fernen Geraden ist der Mittelpunkt des Paraboloids. Die normale Stellung zur Richtung nach dem Mittelpunkt schneidet die zwei Geraden je in einem Punkt und die zwei Erzeugenden durch diese Punkte schneiden sich im Scheitelpunkt des Paraboloids. Die Tangentialebene im Scheitelpunkt enthält jene zwei Erzeugenden und steht senkrecht zur Richtung nach dem Mittelpunkt. Die zwei projektivischen Ebenenbüschel, welche die Fläche erzeugen und die Geraden a, b als Scheitelkanten besitzen, schneiden die Ebene $\mathfrak{E}$ in zwei Strahlenbüscheln, deren entsprechende Strahlen zueinander parallel laufen.

Die bisherigen Betrachtungen können dadurch verallgemeinert werden, dass man verlangt, die Geraden a', b' in $\mathfrak{E}$ schneiden sich in

Punkten einer gegebenen Geraden, oder eines Kegelschnittes, oder einer andern Kurve. Der Ort des Projektionszentrums im Raum ist die windschiefe Regelfläche, deren Leitkurven die zwei Geraden a, b und die betreffende Kurve in $\mathcal{E}$ sind. Ebenso wenn man die beiden Geraden a, b durch ebene oder räumliche Kurven ersetzt. Ferner kann man zur Ebene $\mathcal{E}$ noch eine zweite Ebene $\mathcal{F}$ hinzufügen und nach dem Ort des Punktes fragen, von dem aus die Zentralprojektionen der zwei windschiefen Geraden a, b auf jede der zwei Ebenen ein Paar sich rechtwinklig schneidender Geraden ist. Der Ort ist die Durchdringungskurve der zwei, in bekannter Weise zu $\mathcal{E}$, a, b und zu $\mathcal{F}$, a, b gehörigen Hyperboloide, die beide durch a, b hindurchgehen.

Der Ort besteht aus zwei unter sich windschiefen Transversalen zu a, b; jeder Punkt derselben Transversalen führt zu denselben Rechtwinkelpaaren, deren Schenkel sich beziehungsweise auf der Schnittlinie von $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ treffen. Die unendlich fernen Punkte der zwei Transversalen liefern Parallelprojektionen.

II.

Gesucht die gemeinsamen Normalen zu zwei beliebig im Raum gegebenen Kreisen $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$.

Die Normalen eines Kreises $\mathcal{K}_1$ sind die Geraden, welche $\mathcal{K}_1$ rechtwinklig schneiden; jede solche Normale schneidet auch die Gerade g_1, die im Mittelpunkt des Kreises auf seiner Ebene senkrecht steht und umgekehrt ist jede Gerade, welche g_1, $\mathcal{K}_1$ schneidet, eine Normale von $\mathcal{K}_1$. Beim zweiten Kreis $\mathcal{K}_2$ gibt es ebenfalls eine im Mittelpunkt zur Kreisebene senkrechte Gerade g_2. Die gesuchten gemeinsamen Normalen zu den zwei Kreisen sind die gemeinsamen Transversalen zu $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$, g_1, g_2. Die Transversalen zu $\mathcal{K}_1$, g_1, g_2 bilden eine windschiefe Regelfläche vierten Grades, weil das Hyperboloid, das eine beliebige Gerade l mit g_1, g_2 bestimmt, von $\mathcal{K}_1$ in vier Punkten geschnitten wird. Die Regelfläche enthält den Kreis $\mathcal{K}_1$ als einfache Kurve, weil durch jeden Punkt von $\mathcal{K}_1$ eine einzige Transversale nach g_1, g_2 geht; die Geraden g_1, g_2 sind Doppelgeraden der Fläche, weil durch jeden Punkt irgend einer der beiden zwei Transversalen nach der andern und nach dem Kreis $\mathcal{K}_1$ laufen. Doppelt tritt auch die Gerade auf, welche den Schnittpunkt von g_2 und der Ebene von $\mathcal{K}_1$ mit dem Mittelpunkt von $\mathcal{K}_1$ verbindet; die Gerade schneidet nämlich den Kreis in zwei Punkten und tritt für jeden der zwei Punkte auf. Die gewonnene Regelfläche vierten Grades wird von dem Kreise $\mathcal{K}_2$ in acht Punkten geschnitten und durch jeden läuft eine Gerade, welche g_2, g_1, $\mathcal{K}_1$ schneidet. D. h.:

> Zu zwei beliebig im Raum gegebenen Kreisen gibt es acht gemeinsame Normalen.

Man kann die acht Normalen noch anders finden. Die Kreise $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ und die Gerade g_1 bestimmen als Leitkurven eine Regelfläche achten Grades; $\mathcal{K}_1$, g_1 und eine beliebige Gerade l bestimmen nämlich eine Regelfläche vierten Grades und da sie $\mathcal{K}_2$ in acht Punkten schneidet, trifft umgekehrt die Regelfläche $\mathcal{K}_1$, g_1, $\mathcal{K}_2$ die Gerade l in acht Punkten, d. h. die Regelfläche $\mathcal{K}_1$, g_1, $\mathcal{K}_2$ ist vom Grade acht. Diese Regelfläche wird von g_2 in acht Punkten geschnitten; somit gibt es zu den zwei Kreisen $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ acht gemeinsame Normalen. Für die Regelfläche achten Grades $\mathcal{K}_1$, g_1, $\mathcal{K}_2$ ist die Gerade g_1 vierfach, weil von jedem Punkt von g_1 vier Transversalen ausgehen, die beide Kreise schneiden; jeder der zwei Kreise ist doppelt, weil von irgend einem Punkt eines jeden der beiden nach dem andern und nach g_1 zwei Transversalen laufen. Die Fläche enthält noch vier Doppelgeraden, nämlich die zwei Geraden vom Mittelpunkt des Kreises $\mathcal{K}_1$ nach den Schnittpunkten seiner Ebene mit dem Kreis $\mathcal{K}_2$ und ferner die zwei Geraden vom Schnittpunkt von g_1 und der Ebene von $\mathcal{K}_2$ nach den Schnittpunkten der Ebene von $\mathcal{K}_2$ mit dem Kreis $\mathcal{K}_1$.

Wenn die Geraden g_1, g_2 sich schneiden, so gehen vom Schnittpunkt nach den zwei Kreisen zwei gerade Kreiskegel; ihre vier gemeinsamen Erzeugenden sind Normalen der zwei Kreise. Von diesen vier Normalen können höchstens zwei reell sein. Dass vom Schnittpunkt von g_1 und g_2 vier Normalen ausgehen, stimmt damit, dass g_1 vierfache Gerade der Regelfläche achten Grades ist und dass daher der Schnittpunkt von g_2 mit g_1 für vier Schnittpunkte von g_2 mit der Fläche zählt. Die andern vier Normalen liegen in der Ebene der Geraden g_1, g_2; diese Ebene schneidet jeden der zwei Kreise in zwei Punkten und die vier Normalen sind die Geraden, welche jeden der zwei Punkte des einen Kreises mit jedem der zwei Punkte auf dem andern Kreis verbinden. Von diesen vier Normalen sind, bei reellen Kreisen, alle vier reell. Ihre Schnittpunkte mit g_2 sind Punkte der Regelfläche achten Grades.

Sind g_1 und g_2 parallel, so liegen die zwei Kreise in parallelen Ebenen. Von den vier Normalen durch den unendlich fernen Schnittpunkt von g_1, g_2 fallen zwei ins Unendliche und gehen durch die gemeinsamen imaginären Kreispunkte der zwei parallelen Kreisebenen.

Die vier andern Normalen, die in der Ebene (g_1, g_2) liegen, sind wieder die vier Verbindungslinien der zwei Punktepaare, in denen die zwei Kreise von der Ebene (g_1, g_2) geschnitten werden. Liegen die zwei Kreise zugleich in derselben Ebene, so fallen von den vier Normalen in der Ebene (g_1, g_2) alle vier mit der Zentralen der zwei Kreise zusammen.

Fallen g_1, g_2 zusammen, so haben die zwei, wieder in parallelen Ebenen liegenden Kreise, unendlich viele gemeinsame Normalen, nämlich die Erzeugenden der zwei koaxialen geraden Kreiskegel, die durch die zwei Kreise hindurchgehen.

Unter der Annahme, dass $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ sich in einem Punkte schneiden, geht durch ihn eine Normale; sie steht auf der Ebene der zwei Kreistangenten im Schnittpunkt senkrecht. Die sieben andern Normalen gehen durch die Schnittpunkte von g_2 mit einer Regelfläche siebenten Grades, indem sich von der Regelfläche achten Grades $\mathcal{K}_1$, g_1, $\mathcal{K}_2$ die Ebene durch g_1 und den Schnittpunkt von $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ absondert.

In dem Falle, wo die zwei Kreise sich in zwei Punkten schneiden, aber in verschiedenen Ebenen liegen, lassen sich wieder alle acht Normalen angeben. Es schneiden sich nämlich g_1, g_2; durch den Schnittpunkt gehen, wie schon gesehen, vier Normalen, worunter zwei nach den Schnittpunkten der zwei Kreise und die vier andern Normalen liegen in bekannter Weise in der Ebene (g_1, g_2).

Wenn von den zwei Kreisen der eine z. B. $\mathcal{K}_1$ zu einer Geraden k_1 wird, so hat man die Normalen als die Geraden zu suchen, welche k_1 normal und zugleich g_2, $\mathcal{K}_2$ schneiden. Die Geraden, welche k_1 normal schneiden und zugleich g_2 treffen, bilden die Erzeugenden eines Paraboloids, dessen Leitgeraden k_1, die normale Stellung zu k_1 und g_2 sind. Das Paraboloid wird vom Kreis $\mathcal{K}_2$ in vier Punkten geschnitten.

> Zu einer Geraden k_1 und einem Kreis $\mathcal{K}_2$, die beliebig im Raume liegen, gibt es vier gemeinsame Normalen.

Wenn k_1 und g_2 sich schneiden, so liegen zwei Normalen in der Ebene durch den Schnittpunkt senkrecht zu k_1 und laufen nach den Schnittpunkten der Ebene mit dem Kreis $\mathcal{K}_2$; die andern zwei Normalen liegen in der Ebene (k_1, g_2) und gehen durch die Endpunkte des in dieser Ebene gelegenen Kreisdurchmessers senkrecht zu k_1.

Ist k_1 parallel zu g_2, so fallen zwei Normalen in den Kreisdurchmesser, der k_1 schneidet. Die beiden andern Normalen gehen durch den unendlich fernen Schnittpunkt von k_1 und g_2 nach den unendlich fernen imaginären Punkten von $\mathcal{K}_2$. — Ist k_1 parallel zur Kreisebene, so laufen zwei Normalen parallel zu g_2 und liegen in der Ebene durch k_1 senkrecht zur Kreisebene. Die zwei andern Normalen liegen in der Ebene durch g_2 senkrecht k_1 und verbinden den Schnittpunkt auf k_1 mit den zwei Schnittpunkten auf $\mathcal{K}_2$. — Lässt man beide Kreise in gerade Linien ausarten, so gibt es zu den zwei Geraden, wenn sie nicht parallel sind, im Endlichen nur eine gemeinsame Normale, die vierte gemeinsame Erzeugende der zwei Paraboloide, deren Erzeugenden beide Geraden schneiden und zwar die eine oder die andere senkrecht.