Über topologische Involutionen.

Von

WILLY SCHERRER (Winterthur).

(Als Manuskript eingegangen am 6. Oktober 1925.)

Einleitung.

Die periodischen Transformationen von Kreisscheibe und Kugelfläche sind von B. von KÉRÉKJÁRTO und L. E. J. BROUWER[1]) erforscht worden. BROUWER[2]) hat darauf den Begriff der topologischen Involution in weitgehender Weise verallgemeinert, sodass aus ihm durch Spezialisierung alle endlichen topologischen Gruppen von zweiseitigen geschlossenen Flächen mit Erhaltung der Indikatrix hervorgehen.

An anderer Stelle[3]) habe ich gezeigt, wie man mit Hilfe spezieller Polygonapproximationen zu einem Beweis des BROUWERschen Translationssatzes[4]) und darüber hinaus zu einem allgemeineren Satze betreffend Translationen über einfach zusammenhängende Gebiete gelangt.

Die folgenden Betrachtungen sollen an ausgewählten Beispielen dartun, dass die gleiche Methode gestattet, das Wesen der speziellen Involutionen, deren Quadrat also die Identität ist, auf geometrisch anschauliche Weise zu erfassen. Sie führt nämlich direkt zur Entstehung der Transformationsbereiche.

In § 1 wird das Wesen der Methode an Hand der bekannten Involutionen der Kugelfläche erläutert.

In § 2 werden Abbildungen behandelt, welche zur topologischen Erzeugung der RIEMANNschen Flächen rationaler Funktionen führen. Diese Abbildungen fallen unter den Begriff der allgemeinen BROUWERschen Involutionen.

---

[1]) Math. Annalen 80, S. 36—41 (1919).

[2]) Amsterd. Akad. Versl. Bd. 27, S. 1201—1203 (1919).

[3]) Vierteljahrsschrift d. Naturf. Ges. Zürich 70, S. 77—84 (1925).

[4]) Math. Annalen 72, S. 37--54 (1912).

Die von KÉRÉKJARTO und BROUWER aufgestellten Sätze über Involutionen sind vollständig dargestellt in von KÉRÉKJÁRTOS ausgezeichneten „Vorlesungen über Topologie" (Springer, Berlin, 1923), S. 223—229.

§ 1. Involutionen der Kugelfläche.

Die Theorie dieser Involutionen erschöpft sich in folgenden zwei Sätzen:

1. Eine indikatrixerhaltende topologische Involution der Kugelfläche ist homöomorph mit einer Drehung um den Winkel π.

2. Eine indikatrixumkehrende topologische Involution der Kugelfläche ist homöomorph mit einer Spiegelung oder mit einer Drehspiegelung vom Winkel π.

Beweis:

1. Der Punkt P gehe über in Punkt P'. Wir repräsentieren die Kugelfläche durch eine euklidische Ebene, in welcher das Unendliche dem Punkte P' entspricht und legen um P als Mittelpunkt eine quadratische Umgebung u von solcher Kleinheit, dass sie von ihrem Bilde u_∞ nicht getroffen wird. Hierauf dehnen wir u unter Beibehaltung der Orientierung konzentrisch aus bis zur Berührung mit dem Bild (man bestimmt etwa mittels des Schnittverfahrens eine obere Grenze des Auseinanderliegens von u und u_∞).

Die Bereiche u und u_∞ haben dann eine abgeschlossene Menge von Randpunkten gemein, welche bei der Transformation in sich übergeht. Enthält diese Menge nur einen (dann invarianten) Punkt R, so kann man u unter Beibehaltung der Orientierung weiter exzentrisch dehnen, bis mindestens ein zweiter gemeinsamer Randpunkt S auftritt.

Wir führen nun folgende Benennungen ein. Ein Randbogen des Originalbereichs u und ein Randbogen des Bildbereich u_∞ heissen einander gegenüberstehend, wenn sie dieselben von u und u_∞ gemeinsam bestimmten Restgebiete begrenzen. Derjenige Randbogen, welcher einen bestimmten Randbogen eines Bereichs zum Umfange dieses Bereichs ergänzt, heisst der Komplementärbogen dieses Bogens.

Sind nun R und S Fixpunkte, so wird der Bogen RS abgebildet auf den seinem Komplementärbogen gegenüberstehenden Bogen. Erweitert man u über RS bis zu den gegenüberstehenden Bogen, so wird der erweiterte Bereich genau abgebildet auf den durch ihn bestimmten Restbereich. Die Transformation ist homöomorph mit einer Drehung um π.

Ist R kein Fixpunkt, so kann man S als sein Bild annehmen. Jeder der Bögen RS und SR wird auf den ihm genüberstehenden abgebildet. Fallen sie mit diesen zusammen, so enthält jeder in seinem Innern genau einen Fixpunkt und es ergibt sich das gleiche Resultat wie oben.

Ist RS nicht mit dem gegenüberstehenden Bogen identisch, so enthält RS entweder einen Fixpunkt oder genau ein von zwei gemeinsamen Randpunkten begrenztes Intervall, dessen Inneres keine solchen Punkte trägt und welches auf den ihm gegenüberstehenden Bogen abgebildet wird. Ein derartiges Intervall heisse ein freies Intervall.

Wir erweitern nun u, indem wir im Innern des freien Intervalles ein Quadrat von solcher Kleinheit anlegen, dass es das Bild des erweiterten Bereiches u nicht trifft und dehnen es nach aussen bis zur nächsten Berührung. Auf dem nach aussen grenzenden Konturteil des angesetzten Quadrates ergibt sich wieder ein freies Intervall. Wir setzen die Dehnungen in der gleichen Weise fort. Falls nicht nach einer endlichen Zahl von Schritten ein Fixpunkt erreicht wird, müssen die aufeinanderfolgenden Quadrate gegen Null konvergieren. Dann werden auch die freien Intervalle und damit die jeweiligen Restgebiete, welche ineinander liegen, klein. Die Dehnung konvergiert demnach gegen einen einzigen Punkt T, welcher invariant sein muss. Die Randstücke RT und TS des erweiterten Bereiches sind gegen T konvergierende Streckenzüge, also einfache Bögen. Analog verfährt man mit dem Komplementärbogen. Die Aufgabe ist damit zurückgeführt auf den am Anfang behandelten Fall und Satz 1 ist bewiesen.

2. Wir erhalten wieder mindestens zwei Berührungspunkte R und S.

R sei kein Fixpunkt und S sein Bild. Der Bogen wird abgebildet auf den seinem Komplementärbogen gegenüberstehenden Bogen. Man kann also u über RS unmittelbar bis zum gegenüberstehenden Bogen erweitern und erhält leicht die Homöomorphie der Transformation mit einer Drehspiegelung vom Winkel π.

R sei kein Fixpunkt. Da nach dem Vorigen eine Drehspiegelung vorliegt, sobald nur ein Berührungspunkt nicht invariant ist, so muss jeder Berührungspunkt ein Fixpunkt sein. Jedes von Berührungspunkten freie Intervall ist ein freies Intervall im früheren Sinne, das auf den gegenüberstehenden Bogen abgebildet wird. Wir wählen diejenigen freien Intervalle aus, deren Durchmesser grösser ist als ε und dehnen u über dieses Intervall in der früheren Weise aus. Aus der Kette der nun vorhandenen freien Intervalle wählen wir alle diejenigen aus, deren Durchmesser grösser ist als $\frac{\varepsilon}{2}$ und dehnen u über diese aus und so fort nach Massgabe der Grössen $\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{8}, \ldots \frac{\varepsilon}{2^n} \ldots$ Falls einspringende Winkel vorkommen, setzt man das Dehnungsquadrat genau in diesen Winkel ein. Dann enthält jedes entstehende freie Intervall höchstens einen einspringenden Winkel. Nach einer endlichen Zahl von Schritten werden die neu hinzukommenden Quadrate klein. Die Annahme, dass die freien Intervalle nicht sämtlich klein würden, stünde im Widerspruch zu ihrer Auswahl. Also werden auch die gegenüberstehenden Bögen und damit die Restgebiete klein (im Durchmesser). Die approximierte Fixpunktmenge zerfällt somit durch irgend zwei ihrer Punkte in zwei Teilkontinuen, welche nur diese Punkte gemein haben, ist demnach eine einfache geschlossene Linie. Die Transformation ist homöomorph mit einer Spiegelung und Satz 2 ist bewiesen.

§ 2. Topologische Erzeugung der RIEMANNschen Flächen rationaler Funktionen.

Wir betrachten eindeutige und stetige Abbildungen einer Kugelfläche F auf eine Kugelfläche F', deren Inversion folgende Bedingungen erfüllt:

1. Einem Punkt P' von F' entsprechen auf F mindestens einmal n verschiedene Punkte $P_1, P_2, \ldots P_n$, nie aber mehr.

2. Entsprechen einem Punkte P' von F' die Punkte $P_1, P_2, \ldots P_m$ und grenzt man um die letzteren Punkte m ausserhalb voneinanderliegende Umgebungen $u_1, u_2, \ldots u_m$ ab, so gibt es um P' eine Umgebung u', von der jeder Punkt bei der Inversion in jeder der Umgebungen $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots \overline{u}_m$ mindestens einen Punkt liefert.

Sei nun P' ein Punkt von F', dessen inverses Bild aus n verschiedenen Punkten $P_1, P_2, \ldots P_n$ besteht. Zufolge der Voraussetzung 1. unter Stetigkeit der Inversion ergibt sich daraus, dass die Beziehung zwischen u' und den in einer der Umgebungen u_i liegenden inversen Bildern von u' umkehrbar eindeutig und stetig ist, d. h. eine genügend kleine Kreisumgebung u' von P' wird durch die Inversion abgebildet auf die Jordanumgebungen $u_1, u_2, \ldots u_n$ von $P_1, P_2, \ldots P_n$. Erweitert man nun den Kreis u' so wenig, dass die Schwankung der inversen Bilder kleiner ist als die halbe Minimaldistanz der Umgebungen u_i, so ist auch der erweiterte Kreis u' abgebildet auf auseinanderliegende erweiterte Umgebungen u_i.

Wir dehnen nun den Kreisbereich u' kontinuierlich bis zu einem (notwendigerweise nicht punktförmigen) Grenzkreis K' von der Eigenschaft, dass jeder in seinem Innern liegende Teilbereich abgebildet wird auf n auseinanderliegende Jordanbereiche, während das für den Bereich K' selbst nicht zutrifft. Bei diesem Übergang erzeugt jeder Bereich u_i ein Grenzkontinuum K_i.

Diese Kontinua enthalten eine Menge von Randpunkten, von welchen jeder Punkt mindestens zweien der Kontinua angehört. Da die Inversion zu jedem inneren Punkt von K' im Innern jedes der Kontinua K_i,

$K_2, \ldots K_n$ genau einen Punkt liefert, so gehört auch zu jedem Randpunkt von K' in jedem dieser Kontinua mindestens ein Randpunkt. Würde die Inversion aber zu einem Randpunkt P' von K' auf dem Rande von K_i mehr als einen Punkt, etwa die Punkte P_i und Q_i liefern, so bestimme man im Innern von K_i 2 Punkte $\overline{P}_i$ und $\overline{Q}_i$ nahe bei P_i resp. Q_i. Die Bilder $\overline{P}'$ und $\overline{Q}'$ dieser Punkte liegen dann nahe bei P'. Führt man nun $\overline{P}'$ auf einen kurzen Bogen im Innern von K' nach $\overline{Q}'$, so geht das inverse Bild von $\overline{P}'$ in dasjenige von $\overline{Q}'$ über. Zufolge der Stetigkeit kann aber $\overline{P}_i$ nicht den endlichen Abstand $\overline{P}_i \overline{Q}_i$ durchlaufen, muss aber notwendig im Innern von K_1 bleiben. Der Punkt $\overline{Q}'$ würde somit bei der Inversion mehr als einen Punkt im Innern von K_i liefern, was einen Widerspruch bedeutet. Die Kontinua $K_1, K_2, \ldots K_n$ müssen daher topologische Abbilder von K', also ebenfalls Jordanbereiche sein. Wird der Randpunkt R' von K' auf die Punkte R_{α_1}, $R_{\alpha_2}, \ldots R_{\alpha_\lambda}$, abgebildet, in welchen genau α_1 resp. $\alpha_2, \ldots \alpha_\lambda$ der Bereiche $K_1, K_2, \ldots K_n$ zusammenstossen, so muss die Beziehung

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\lambda = n$$

bestehen. Im Innern der durch die K_i bestimmten Restgebiete kann kein weiterer zu R inverser Punkt liegen, da sonst eine kleine Verschiebung von R ins Innere von K' mehr als n inverse Bilder erzeugen müsste. Die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\lambda$ geben somit genau die Vielfachheit der Punkte $R_{\alpha_1}, R_{\alpha_2}, \ldots R_{\alpha_\lambda}$ an.

Sei nun P' ein Punkt des durch K' bestimmten Restgebietes G'. Die inverse Abbildung muss zu P' in jedem der durch $K_1, K_2, \ldots K_n$ bestimmten Restgebiete mindestens einen Punkt liefern. Enthielte etwa das Restgebiet G_i keinen solchen Punkt, so wähle man darin den beliebigen Punkt Q_i, dessen Bild Q' in G' liegen muss und führe nun P' im Innern von G' nach Q'. Der Übergang des zu P' inversen Systems in das inverse zu Q' erzeugt zufolge der Voraussetzung 2. eine kontinuierliche Verbindung zwischen Q_i und einem Punkte des inversen Systems von P'. Diese Verbindung müsste einen der Bereiche $K_1, K_2, \ldots K_n$ treffen, was einen Widerspruch bedeutet. Durch einen analogen Schluss zeigt man, dass irgend zwei der Bereiche K_i kein endliches Bogenstück gemein haben (man bringt den eben benutzten Punkt Q_i in das Innere eines solchen Bogens).

Aus diesen Überlegungen folgt, dass die Bereiche nur endlich viele Randpunkte gemein haben und zusammen höchstens n Restgebiete bestimmen.

Nach den früheren Schlüssen sind die gemeinsamen Randpunkte der Bereiche K_i vielfache Punkte. Wir markieren ihre Bilder auf dem Rande von K' und bezeichnen sie mit R', S', T', U', ... Die weitere Dehnung von K' erfolge über das Innere des Bogens $R'S'$ und zwar so, dass der ganze Restbogen $S'T'U'$, . . . R' gemieden wird und das jeweils vorhandene Restgebiet gegen diesen Bogen konvergiert. Zufolge der obigen Ausführungen können im Restbereich von K' nur endlich viele Bilder von vielfachen Punkten liegen. Werden bei der Dehnung über $R'S'$ einige getroffen, so zerfällt der Dehnungsbogen in eine endliche Zahl von Teilbögen. Die weitere Dehnung erfolgt analog über einen dieser Teilbögen.

Nach einer endlichen Zahl solcher Dehnungen sind sämtliche Bilder von vielfachen Punkten erreicht. Wir übertragen die eben angegebene Bezeichnung auf die letzte Stufe. Jeder der Teilbögen $R'S'$, $S'T'$, $T'U'$ . . . wird durch die Inversion abgebildet auf genau n Randbögen der Bereiche K_1, K_2, . . . K_n. Ein Punkt P' des zu K' gehörigen Restbereiches wird abgebildet auf genau n Punkte P_1, P_2, . . . P_n, welche in den durch die K_i bestimmten Restgebieten liegen. Eine Umgebung von P' wird ebenso abgebildet auf n Umgebungen der Bildpunkte. Diese Umgebung kann kontinuierlich und ohne Hemmung bis zur völligen Bedeckung des durch K' bestimmten Restbereiches $\overline{K}'$ erweitert werden. Die Bilder von $\overline{K}'$ sind n Bereiche $\overline{K}_1$, $\overline{K}_2$, . . . $\overline{K}_n$, welche die Restbereiche erschöpfen. Da sie topologische Abbilder von K' sind und überdies keine neuen vielfachen Punkte erzeugen dürfen, ergibt sich die Richtigkeit folgender Behauptungen.

1. Die Bereiche $\overline{K}_1$, $\overline{K}_2$, . . . $\overline{K}_n$ sind identisch mit den durch K_1, K_2, . . . K_n bestimmten Restbereichen.

2. Irgendein Teilbogen $R'S'$, $S'T'$, . . . des Randes von K' wird abgebildet auf n Teilbögen, von denen nie 2 dasselbe Restgebiet der Bereiche K_1, K_2, . . . K_n begrenzen.

3. Durchläuft ein Punkt P' den Rand von K' mit einem bestimmten Umlaufsinn, so durchlaufen seine Bilder P_1, P_2, . . . P_n die Ränder von K_1, K_2, . . . K_n alle mit dem gleichen Umlaufsinn.

Vereinigen wir nun K' und $\overline{K}'$ längs eines der Teilbögen, etwa $R'S'$, so wird der erhaltene Bereich $K' + \overline{K}'$, d. h. die längs $S'T'U'$. . . R' geschlitzte Kugel, abgebildet auf die längs den Bögen R_iS_i zusammenhängenden Bereiche $K_i + \overline{K}_i$. Der Bogen $S'T'U'$ . . . R' stellt einen Verzweigungsschnitt dar. Wird die Fläche F' in n übereinanderliegenden Blättern dargestellt, so ist in der Art, wie die Bildbereiche $K_i + \overline{K}_i$ längs der Bögen S_iT_i, T_iU_i, ... zusammenhängen, das Heftungsschema enthalten.

Unter Benutzung der EULERschen Relation erhält man mittels Abzählung der „Winkel" die Relation

$$\alpha + 2\,\alpha_3 + \ldots + (\lambda - 1)\,\alpha_\lambda + 2\,n - 2$$

Die Eigenschaft 3. gibt übrigens ein Mittel an die Hand, um durch successive Dehnungen alle möglichen Kombinationen in ihrer Entstehung zu überblicken.

Es ergibt sich dabei auch folgende Interpretation der obigen Relation. Bezeichnet man als Gewicht mehrerer Gebiete die Summe ihrer um 1 verminderten und negativ gerechneten Zusammenhangszahlen und ihrer positiv gerechneten Anzahl, so steigt das Gewicht bei der Bildung eines zweifachen Punktes um $+ 1$, bei einem λ-fachen Punkte um $+ (\lambda - 1)$, im ganzen also um

$$\alpha_2 + 2\,\alpha_3 + \ldots + (\lambda - 1)\,\alpha_\lambda$$

Am Anfang, wenn noch keine mehrfachen Punkte vorhanden sind, beträgt das Gewicht

$$-(n - 1) + 1 = -n + 2$$

Am Schluss aber sind genau n Gebiete mit den Zusammenhangszahlen 0 vorhanden, das Gewicht ist also

$$0 + n = n$$

Die ganze Zunahme des Gewichts beträgt somit

$$n - (-n + 2) = 2\,n - 2$$

woraus sich wieder die obige Relation ergibt.

Die in der vorstehenden Arbeit verwendete Methode lässt sich weiter ausgestalten und gestattet vorerst einmal die vollständige Charakterisierung der involutorischen (2-periodischen) Transformationen sämtlicher orientierbaren Polyederflächen.

Die in dieser Richtung gewonnenen Resultate sollen hier formuliert werden. Ihre ausführliche Begründung muss ich mir für einen spätern Zeitpunkt vorbehalten.

Wir fassen also eine involutorisch transformierte[1]) orientierbare Polyederfläche ins Auge und treffen folgende Festsetzungen.

Ein *variabler* Rückkehrschnitt ist ein die Fläche nicht zerlegender Rückkehrschnitt, welcher sein Abbild nicht trifft.

[1]) Unter Transformation sei im folgenden immer eine umkehrbar eindeutige und stetige Abbildung verstanden.

Ein Drehzykel ist ein die Fläche nicht zerlegender Rückkehrschnitt, welcher in sich übergeht und keinen Fixpunkt aufweist.

Ein Schnittzykel $n$ter Ordnung ist ein System von n einander nicht treffenden Querschnitten der Fläche, welche n Ränder der Fläche so verbinden, dass bei Zusammenziehung dieser Ränder auf Punkte eine einfache geschlossene Linie entsteht.

Von zwei Schnittzykeln werde gesagt, dass sie sich nicht treffen, wenn ihre Querschnitte sich nicht treffen und die Ränder des einen Zykels verschieden sind von denen des andern.

Ein System von einander nicht treffenden Rückkehrschnitten und Schnittzykeln, welches die Fläche in zwei einander homöomorphe Bestandteile zerlegt, die bei der Involution ineinander übergehen, heisse ein die Involution halbierendes Schnittsystem.

Dann gelten folgende Tatsachen:

Satz 1. Wird eine orientierbare Polyederfläche mit Erhaltung der Indikatrix involutorisch in sich transformiert, so lässt sich ein die Involution halbierendes **minimales** Schnittsystem angeben, welches gebildet wird entweder von einem Paar variabler Rückkehrschnitte oder von invarianten Rückkehrschnitten und Schnittzykeln zweiter Ordnung mit invarianten Rändern und höchstens einem Schnittzykel erster Ordnung.

Satz 2. Wird eine orientierbare Polyederfläche mit Umkehrung der Indikatrix involutorisch in sich transformiert, so lässt sich immer ein die Involution halbierendes **minimales** Schnittsystem angeben, welches neben eventuell vorhandenen Rückkehrschnitten mit lauter Fixpunkten und Schnittzykeln beliebiger Ordnung höchstens entweder ein Paar variabler Rückkehrschnitte oder einen Drehzykel enthält.

Satz 3. Zwei Involutionen einer orientierbaren Polyederfläche sind dann und nur dann topologisch äquivalent, wenn sie ausser im Verhalten der Indikatrix in der Zusammensetzung der sie halbierenden minimalen Schnittsysteme[1]) übereinstimmen.

---

[1]) Diese minimalen Schnittsysteme sind — wie schon die Benennung andeuten soll — eindeutig bestimmt hinsichtlich ihrer in Satz 1 resp. 2 angegebenen Zusammensetzung aus variabeln Rückkehrschnitten, invarianten Rückkehrschnitten, Schnittzykeln erster und zweiter Ordnung resp. variabeln Rückkehrschnitten, Drehzykeln, invarianten Rückkehrschnitten mit lauter Fixpunkten, Schnittzykeln beliebiger Ordnung.

Für indikatrixerhaltende Involutionen ergeben sich die Folgerungen:

Satz 4. Zwei indikatrixerhaltende Involutionen einer orientierbaren Polyederfläche sind dann und nur dann topologisch äquivalent, wenn sie in der Anzahl der Fixpunkte und der Anzahl der invarianten Ränder übereinstimmen.

Satz 5. Bei einer indikatrixerhaltenden Involution einer orientierbaren Polyederfläche vom Geschlecht p ist die Summe aus der Anzahl der Fixpunkte und der Anzahl der invarianten Ränder kongruent $2p+2$ (mod. 4) und erreicht im Maximum diesen Wert.

Für indikatrixumkehrende Involutionen gibt es kein Analogon zu Satz 4. Hingegen gilt

Satz 6. Bei einer indikatrixumkehrenden Involution einer orientierbaren Polyederfläche vom Geschlecht p ist die Summe der Anzahl der Schnittzykel eines die Involution halbierenden minimalen Schnittsystems entweder kongruent $p+1$ (mod. 2) oder kongruent p (mod. 2), je nachdem das Schnittsystem keinen oder einen Drehzykel enthält.

Fasst man die topologisch äquivalenten Involutionen einer Fläche zu einer Klasse zusammen, so gestatten die angegebenen Sätze eine Zählung der verschiedenen Klassen. Für geschlossene Flächen kann man die Anzahl explicite angeben:

Satz 7. Die Anzahl der verschiedenen Involutionsklassen einer orientierbaren geschlossenen Polyederfläche vom Geschlecht p ist gleich $\left[\frac{p+3}{2}\right]$ oder $\left[\frac{3p+4}{2}\right]$, je nachdem die Indikatrix erhalten bleibt oder nicht.

Vermutlich liefert die gleiche Methode auch die Charakterisierung der Involutionen von nicht orientierbaren Flächen. Als erstes Resultat sei hier die Charakterisierung für Flächen vom Zusammenhang der projektiven Ebene erwähnt. Bezeichnen wir der Kürze halber eine Kreisscheibe, in welcher je zwei einander diametral gegenüberliegende Punkte des Randes identifiziert sind, als projektive Kreisscheibe, so gilt

Satz 8. Jede involutorische Transformation einer nicht orientierbaren geschlossenen Fläche vom Geschlecht 1 ist topologisch äquivalent einer Drehung der projektiven Kreisscheibe um den Winkel π.

An Stelle der Drehung der projektiven Kreisscheibe kann man auch eine Spiegelung an einem ihrer Durchmesser treten lassen:

Man stelle in kartesischen Koordinaten die Drehung dar durch die Formeln

$$\begin{aligned} x' &= -x \\ y' &= -y \end{aligned}$$

Die Spiegelung durch

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= -y \end{aligned}$$

dann liefern etwa die Formeln

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= x \\ \bar{y} &= \left|\sqrt{1-x^2}\right| - y \end{aligned}\right\} \quad (y \geqq 0)$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= -x \\ \bar{y} &= -\left|\sqrt{1-x^2}\right| - y \end{aligned}\right\} \quad (y \leqq 0)$$

eine topologische (sogar involutorische) Transformation der projektiven Kreisscheibe in sich, welche Drehung und Spiegelung miteinander vertauscht.