Über konfokale Flächen zweiten Grades.

Von

A. KIEFER (Zürich).

(Als Manuskript eingegangen am 14. August 1924.)

In Artikel 193 der SALMON-FIEDLERschen Analytischen Geometrie des Raumes ist der Satz bewiesen: „Der Ort der Berührungspunkte paralleler Tangentenebenen einer Reihe von confocalen Flächen zweiten Grades ist eine Hyperbel."

Im folgenden soll der Satz auf geometrische Art gefunden und zu einigen Folgerungen benutzt werden.

Eine Reihe von konfokalen Flächen ist eine spezielle Flächenschar zweiten Grades, die bestimmt ist durch eine Fläche zweiten Grades F und den imaginären Kugelkreis im Unendlichen, der ebenfalls als Fläche zweiten Grades aufgefasst werden kann. Die beiden Flächen haben unendlich viele gemeinsame Tangentialebenen; sie bilden die imaginäre, gemeinsam umschriebene developpable Fläche, zu der es noch unendlich viele andere eingeschriebene Flächen zweiten Grades gibt. Alle diese Flächen bilden eine Schar konfokaler Flächen. Unter ihnen gibt es eine einzige, die eine gegebene Ebene berührt; von jedem Punkt der Ebene aus kann man nämlich den Tangentialkegel an die gesuchte berührende Fläche finden. Der Punkt liefert an die gegebene Fläche F und an den imaginären Kugelkreis im Unendlichen zwei Tangentialkegel, deren vier gemeinsame Tangentialebenen mit der gegebenen Ebene den fraglichen Tangentialkegel bestimmen. Aus dem Umstand, dass eine Ebene nur von einer Fläche der Schar berührt wird, folgt, dass der Ort der Pole einer Ebene nach den Flächen der Schar eine gerade Linie ist; sie steht im Berührungspunkt der Ebene auf ihr senkrecht, weil der Pol in bezug auf den Kugelkreis die senkrechte Richtung zur Ebene ist. Um also den Berührungspunkt der Ebene mit der sie berührenden Fläche der Schar zu finden, sucht man den Pol der Ebene in bezug auf die gegebene Fläche F und fällt von ihm auf die Ebene das Lot; sein Fusspunkt ist der gesuchte Berührungspunkt. Verschiebt man die Ebene parallel, so bewegt sich ihr Pol auf der konjugierten Durchmessergeraden zur Stellung der Ebene in bezug auf die Fläche F. Die Lote von den Polen auf die bezüglichen Parallelebenen bilden ein Parallelstrahlenbüschel, das zum Büschel der Parallelebenen projektivisch ist. Der gesuchte Ort der Fusspunkte ist das Erzeugnis dieser zwei Büschel, also eine gleichseitige Hyperbel, deren Ebene senkrecht ist auf den Parallelebenen und durch die konjugierte Gerade ihrer Stellung in bezug auf F hindurchgeht. Die zwei Schnittpunkte dieser konjugierten Geraden mit der Fläche F gehören der Hyperbel als Durchmesserendpunkte an; die eine Asymptote ist senkrecht zu den Parallelebenen und die andere ist zu ihnen parallel. Da man zum Auffinden dieser Hyperbel irgend eine der konfokalen Flächen benützen kann, so entsteht der Satz: Nimmt man zu einer festen Geraden im Unendlichen die konjugierte Gerade in bezug auf jede Fläche der konfokalen Schar, so liegen die Geraden in einer Ebene durch den gemeinsamen Mittelpunkt der Schar; schneidet man jede dieser Geraden mit der zugehörigen Fläche, so liegen alle diese Schnittpunktspaare auf einer gleichseitigen Hyperbel.

Die konfokale Flächenschar besitzt ausser dem unendlich fernen imaginären Kugelkreis noch drei andere Kegelschnitte, die als degenerierte Flächen der Schar auftreten; diese Kegelschnitte heissen Fokalkegelschnitte und liegen aus Symmetriegründen in den drei Hauptebenen der Schar. Durch jede Tangente eines solchen Kegelschnittes gehen zwei Ebenen der gemeinsam umschriebenen Developpablen vierter Klasse der Schar. Man kann die Fokalkegelschnitte folgendermassen finden. Angenommen die gewählte Fläche zweiten Grades F sei, der leichtern Vorstellung wegen, ein Ellipsoid und seine Achsen seien, der Grösse nach abnehmend, a, b, c; dann liegen auf a die reellen Brennpunkte der zwei Hauptschnitte (a, b), (a, c) und auf b die reellen Brennpunkte des Hauptschnittes (b, c). Durch die Brennpunkte (a, b) gehen an den Hauptschnitt (a, b) Tangentenpaare, die nach den imaginären Kreispunkten der Ebene (a, b) laufen; die zur Ebene (a, b) senkrechten Ebenen durch diese Tangenten berühren daher nicht nur die Fläche F, sondern auch den imaginären Kugelkreis; daher sind die Senkrechten in den Brennpunkten (a, b) auf die Ebene (a, b) Tangenten des Fokalkegelschnittes und die Brennpunkte (a, b) selber Punkte des Fokalkegelschnittes, der in der Ebene (a, c) liegt. Nun gehen von den Brennpunkten (a, c) an den Hauptschnitt (a, c) Tangentenpaare, die nach den imaginären Kreispunkten der Ebene (a, c) laufen. Die senkrechten Ebenen durch diese Tangenten zur Ebene (a, c) sind also gemeinsame Tangentialebenen von F und dem imaginären Kugelkreis. Die Brennpunkte (a, c) sind also

Brennpunkte des Fokalkegelschnittes in der Hauptebene (a, c). Dieser Fokalkegelschnitt ist dadurch vollständig bestimmt; denn man kennt von ihm die Scheitelpunkte und die Brennpunkte auf a. Ausserdem geht er durch die Kreis- oder Nabelpunkte der Fläche F auf dem Hauptschnitt (a, c). Legt man in einem solchen Punkt an die Fläche F die Tangentialebene, so schneidet sie F in einem Kreis vom Radius null, d. h. die zwei Geraden von dem Nabelpunkt nach den imaginären Kreispunkten seiner Tangentialebene an F sind Erzeugende von F; die senkrechten Ebenen durch die zwei Erzeugenden zu der Tangentialebene sind Tangentialebenen der Fläche F und des imaginären Kugelkreises. Die Normale zu F im Nabelpunkt ist also Tangente des Fokalkegelschnittes und der Nabelpunkt ist ihr Berührungspunkt, weil Normale und Tangente in einem Punkt des Hauptschnittes (a, c) die Brennpunkte (a, c) harmonisch trennen, wie es sein muss, wenn die Brennpunkte des Hauptschnittes (a, c) die Brennpunkte des Fokalkegelschnittes in der Hauptebene (a, c) sind; übrigens muss der Fokalkegelschnitt alle in der Hauptebene (a, c) gelegenen Nabelpunkte aller Flächen der konfokalen Schar enthalten. Der Fokalkegelschnitt in der Hauptebene (a, b) ist ebenfalls reell; seine Scheitelpunkte sind die Brennpunkte der Hauptschnitte (a, c) und (b, c) und seine Brennpunkte sind die Brennpunkte des Hauptschnittes (a, b). Die Nabelpunkte auf diesem Fokalkegelschnitt sind imaginär. Der dritte Fokalkegelschnitt liegt in der Hauptebene (b, c) und ist imaginär, weil die Brennpunkte auf c für die beiden Hauptschnitte (a, c) und (b, c) imaginär sind. Alle Flächen der konfokalen Schar haben dieselben Hauptebenen und in jeder solchen haben die Hauptschnitte dieselben Brennpunkte. Die Fokalkegelschnitte schneiden jede Fläche der konfokalen Schar orthogonal und jeder Punkt eines solchen kann als Nullkugel aufgefasst werden, die jede Fläche der Schar doppelt berührt, so dass die zwei Tangentialebenen der Berührungspunkte sich in der Tangente des Fokalkegelschnittes schneiden.

Der eingangs zitierte Satz, der sich auf konfokale Flächen und Ebenenbüschel bezieht, deren Scheitelkanten in der Ebene des imaginären Kugelkreises liegen, kann nun ohne weiteres auf Ebenenbüschel übertragen werden, deren Scheitelkanten in der Ebene eines Fokalkegelschnittes liegen. Nämlich: Wählt man in einer Hauptebene einer konfokalen Flächenschar eine Gerade und legt durch sie an alle Flächen der Schar Tangentialebenen, so erfüllen die Berührührungspunkte einen Kegelschnitt. Seine Ebene geht durch den Pol der gewählten Geraden in bezug auf den Fokalkegelschnitt der betreffenden Hauptebene und durch die konjugierte Gerade zur gewählten

Geraden in bezug auf irgend eine Fläche der Schar; die Ebene steht daher auf der Hauptebene senkrecht. Auf dem Kegelschnitt liegen die Schnittpunkte jeder Fläche der Schar mit der konjugierten Geraden zur gewählten Geraden in bezug auf die betreffende Fläche; daher geht der Kegelschnitt durch den Pol der Geraden in bezug auf den Fokalkegelschnitt der Hauptebene. Ferner liegen auf dem Kegelschnitt die dreimal zwei Berührungspunkte der Tangentialebenen durch die gewählte Gerade an die zwei andern Fokalkegelschnitte und an den imaginären Kugelkreis im Unendlichen. Der letzte Umstand hat zur Folge, dass der Kegelschnitt ein Kreis sein muss. Irgend eine senkrechte Ebene zu einer Hauptebene schneidet die zwei nicht darin gelegenen Fokalkegelschnitte in vier Punkten eines Kreises, dessen Schnittpunkte mit der Hauptebene Endpunkte eines Kreisdurchmessers und konjugierte Pole für den Fokalkegelschnitt der Hauptebene sind.

Wählt man ein Ebenenbüschel, dessen Scheitelkante beliebig im Raum angenommen ist, so ist der Ort der Berührungspunkte der Ebenen des Büschels mit den Flächen der konfokalen Schar eine Kurve, die sich folgendermassen ergibt. Man sucht zu jeder Ebene des Büschels die Pole in bezug auf zwei Flächen der Schar und schneidet die Verbindungsgerade der zwei Pole mit der betreffenden Ebene. Der gesuchte Ort ist somit das Erzeugnis von zwei Punktreihen und eines Ebenenbüschels, die projektivisch aufeinander bezogen sind, oder das Erzeugnis von drei projektivischen Ebenenbüscheln, von denen die zwei ersten entstehen, indem man jede der zwei projektivischen Punktreihen mit dem Träger der andern durch ein Ebenenbüschel verbindet. Der Ort ist eine Raumkurve dritter Ordnung, welche die gegebene Gerade zweimal schneidet, nämlich in den Doppelpunkten der zwei vereinigten projektivischen Punktreihen, in denen die Gerade von den ersten zwei Büscheln geschnitten wird. Die Kurve dritter Ordnung schneidet auch jeden der drei Fokalkegelschnitte und den imaginären Kugelkreis zweimal, nämlich in den Berührungspunkten ihrer durch die Gerade gehenden Tangentialebenen. Man könnte die Kurve auch so erzeugen, dass man zu jeder Ebene durch die gegebene Gerade den Pol in bezug auf die Fläche F sucht und von ihm auf die Ebene lotet; der Ort der Fusspunkte ist die Kurve. Die Lote bilden die eine Schar der Erzeugenden eines Paraboloids, das die Gerade in den gleichen Punkten wie die Kurve schneidet.

Sind unter den Flächen einer konfokalen Schar diejenigen gesucht, die eine gegebene Gerade berühren, so kann man, wie eben angegeben, die zur Geraden gehörige Raumkurve dritter Ordnung aufsuchen. In jedem ihrer zwei Schnittpunkte mit der Geraden wird die letztere von einer gesuchten Fläche berührt, so dass es deren zwei gibt. Man kann sie noch anders finden. Die Tangentialebenen durch die Gerade an die Flächen der Schar bilden eine Involution. Jede ihrer zwei Doppelebenen wird von der zugehörigen Fläche der Schar in einem Punkte berührt, der auf der Geraden liegt. Die zwei Ebenen müssen aufeinander senkrecht stehen und reell sein, weil die Ebeneninvolution das Paar Tangentialebenen durch die Gerade an den imaginären Kugelkreis im Unendlichen enthält.

Nimmt man im Raum einen beliebigen festen Punkt, so liefert er nach jeder Fläche der konfokalen Schar eine Polarebene und einen Tangentialkegel. Man kann nach der Enveloppe der Polarebenen und nach dem Orte der Berührungskegelschnitte fragen. Durch den Punkt geht ein Tangentialkegel an die gegebene Fläche F und ein solcher nach dem imaginären Kugelkreis. Die beiden Kegelflächen bestimmen eine Schar; in ihr gibt es drei Kegelflächen, die sich auf zwei Ebenenbüschel reduzieren, deren Scheitelkanten in der gleichen Ebene liegen. Das heisst, durch den Punkt gehen drei Flächen der konfokalen Schar. Daraus folgt, dass die Enveloppe der Polarebenen des Punktes nach den Flächen der Schar eine developpable Fläche dritter Klasse ist. Es folgt weiter, dass der Ort der Berührungskegelschnitte eine Fläche fünfter Ordnung ist; eine beliebige Gerade durch den Punkt wird nämlich, wie schon gesehen, von zwei Flächen der konfokalen Schar berührt und es gibt drei Flächen, die durch den Punkt gehen, weshalb er dreifacher Punkt der Fläche fünfter Ordnung ist.

Die für eine konfokale Flächenschar gefundenen Resultate lassen sich ohne weiteres auf eine beliebige Flächenschar zweiten Grades ausdehnen.

Durch duale Übertragung ergeben sich Eigenschaften des Flächenbüschels vom zweiten Grad, das von der Gesamtheit aller Flächen zweiten Grades gebildet wird, welche durch die gemeinsame Schnittkurve zweier solcher Flächen hindurch gehen.

Z. B.: Zieht man bei einem Flächenbüschel zweiten Grades durch die Spitze einer seiner vier Kegelflächen eine Gerade und legt man in jedem Punkt der Geraden an die durch den Punkt gehende Fläche des Büschels die Tangentialebene, so ist die Enveloppe derselben eine Kegelfläche zweiten Grades. Die Spitze derselben wird gefunden, indem man zur gewählten Geraden die konjugierte Gerade in bezug auf irgend eine Fläche des Büschels sucht und dann schneidet mit der Polarebene der Geraden in bezug auf diejenige Kegelfläche des Büschels, durch deren Spitze die Gerade gezogen wurde. Schneidet man die Gerade mit jeder der drei andern Kegelflächen des Büschels und legt in jedem Schnittpunktspaar an die betreffende Kegelfläche die Tangentialebenen, so gehören die sechs Ebenen ebenfalls der Enveloppe an. Die Enveloppe entsteht noch auf andere Weise. Nimmt man zur Geraden die konjugierte Gerade in bezug auf jede Fläche des Büschels und legt man immer durch die konjugierte Gerade an die betreffende Fläche des Büschels die Tangentialebenen, so bildet die Gesamtheit dieser Ebenenpaare die Enveloppe.

Wenn man im Raum eine beliebige Gerade wählt und in jedem Punkt derselben an die hindurchgehende Fläche des Flächenbüschels zweiten Grades die Tangentialebene legt, so bildet die Gesamtheit dieser Ebenen eine developpable Fläche dritter Klasse, von der zwei Ebenen durch die gewählte Gerade hindurchgehen, weshalb sie von zwei Flächen des Büschels berührt wird.

Wählt man eine beliebige Ebene und legt in jedem Punkt derselben an die hindurchgehende Fläche des Büschels die Tangentialebene, so bildet die Gesamtheit dieser Ebenen eine Fläche fünfter Klasse, für welche die gewählte Ebene dreifache Ebene ist.