Über gerade Nullzylinder.

Von

A. Kiefer (Zürich).

(Als Manuskript eingegangen am 31. Juli 1924.)

Ein gerader Nullzylinder ist ein gerader Kreiszylinder vom Radius null. Man kann einen solchen Zylinder als Fläche zweiten Grades auffassen, die aus den zwei imaginären Ebenen besteht, welche durch die Achse des Zylinders gehen und den imaginären Kugelkreis im Unendlichen berühren; diese zwei Ebenen sind die Doppelebenen der rechtwinkligen Ebeneninvolution, deren Scheitelkante die Zylinderachse ist. Die Schnittpunkte einer solchen Fläche zweiten Grades mit einer Geraden sind die imaginären Doppelpunkte der Punktinvolution, in welcher die Gerade von der eben erwähnten rechtwinkligen Ebeneninvolution geschnitten wird. Die Polarebene eines Punktes P in bezug auf die Fläche ist die Ebene, welche durch die Zylinderachse l geht und auf der Ebene, die l mit P bestimmt, senkrecht steht.

Zwei Nullzylinder mit den windschiefen Achsen l, l_1 bestimmen ein Flächenbüschel zweiten Grades, dessen Grundkurve von den vier imaginären Schnittgeraden gebildet wird, in denen die zwei Paare von Tangentialebenen durch l und l_1 an den imaginären Kugelkreis im Unendlichen sich schneiden. Die vier Geraden bilden ein windschiefes Viereck, von dem zwei Paar Gegenecken auf l, l_1 liegen; die Flächen des Büschels berühren sich in den Ecken des Viereckes und gehen durch seine vier Seiten, von denen keine auf l, l_1 liegt. Die beiden windschiefen Geraden l, l_1 müssen für alle Flächen des Büschels konjugierte Geraden sein; denn auf jeder der zwei Geraden liegen die Berührungspunkte der zwei Tangentialebenen, welche durch die andere der zwei Geraden an die Flächen des Büschels gehen. Das Flächenbüschel schneidet die unendlich ferne Ebene in einem Kegelschnittbüschel. Seine vier Grundpunkte A, B, C, D sind imaginär und ergeben sich, indem man von den unendlich fernen Punkten L, L_1 der zwei Geraden l, l_1 an den imaginären Kugelkreis im Unendlichen Tangentenpaare legt und miteinander schneidet; der unendlich ferne Schnitt jeder Fläche des Büschels besitzt also eingeschriebene Vierecke, die dem imaginären

Kugelkreis umschrieben sind. Jeder Kegelschnitt durch A, B, C, D schneidet die Gerade $L L_1$ in zwei Punkten, die zu den Punkten L, L_1 harmonisch liegen; denn L, L_1 sind die Doppelpunkte der Involution, welche von dem Kegelschnittbüschel auf der Geraden $L L_1$ erzeugt wird. Das Diagonaldreieck des Viereckes $A B C D$ sei $U V W$ und zwar sei U der Schnittpunkt von $A C$ mit $B D$; dann liegen V, W auf $L L_1$ und trennen die Punkte L, L_1 harmonisch. Das Dreieck $U V W$ ist für den imaginären Kugelkreis ein Polardreieck, indem jede seiner Seiten die Polare der Gegenecke ist; der Punkt U ist der reelle Pol von $L L_1$ in bezug auf den Kugelkreis, oder mit andern Worten die senkrechte Richtung zur Stellung $L L_1$ und auch die Punkte V, W sind reell, indem sie die reellen Punkte L, L_1 und den imaginären Kugelkreis harmonisch trennen. Angenommen die Punkte, in denen ein Kegelschnitt des Büschels die Gerade $L L_1$ schneidet, seien X, Y, so sind also X, Y zu L, L_1 harmonisch. Daher ist das Strahlenpaar von X, Y nach A harmonisch zu dem Tangentenpaar $A B$, $A D$ an den Kugelkreis und ebenso sind die Strahlenpaare von X, Y nach B, oder C, oder D harmonisch zu den Tangentenpaaren von B, oder C, oder D an den Kugelkreis. Die Strahlenpaare sind also Paare konjugierter Strahlen in bezug auf den Kugelkreis, und da der Kegelschnitt durch A, B, C, D, X, Y bestimmt ist, so ist er das Erzeugnis von zwei projektivischen Strahlenbüscheln mit den Scheiteln X, Y, wobei die Zuordnung darin besteht, dass entsprechende Strahlen konjugierte Strahlen in bezug auf den Kugelkreis sind, d.h. dass jeder Strahl durch den Pol des entsprechenden hindurchgeht. Denkt man sich durch X, Y zwei windschiefe Erzeugenden der zum Kegelschnitt gehörigen Fläche des Büschels gelegt, so erscheint die Fläche durch zwei Ebenenbüschel erzeugt, mit den zwei Erzeugenden als Scheitelkanten und wobei entsprechende Ebenen aufeinander senkrecht stehen. Also sind alle Flächen des Büschels orthogonale Hyperboloide. Wählt man die Punktepaare X, Y reell, so werden die zugehörigen Kegelschnitte und Flächen zweiten Grades reell. Der jeweilige Kegelschnitt geht ausser durch die Punkte X, Y, deren Tangenten sich übrigens der Zuordnung wegen in U schneiden, noch durch die vier imaginären Berührungspunkte der Tangenten von den Punkten X, Y an den imaginären Kugelkreis. Man kann den Kegelschnitt noch anders erzeugen. Sind X', Y' irgend zwei zu X, Y harmonische Punkte, so gehen von X', Y' an den Kugelkreis zwei Tangentenpaare, und deren vier Schnittpunkte liegen auf dem gleichen Kegelschnitt. Alle diese Gruppen von vier Schnittpunkten, die entstehen, wenn X, Y fest bleiben und das Paar X', Y' sich ändert, müssen nämlich einen Kegelschnitt erfüllen, weil auf jede Tangente nur zwei Schnittpunkte fallen können. Aber dieser Kegelschnitt ist identisch mit demjenigen, der als zu X, Y gehörig bezeichnet wurde; durch X, Y und die vier Berührungspunkte der von X, Y ausgehenden Tangenten geht nur ein Kegelschnitt, auf dem also auch die Ecken aller dem Kugelkreis umschriebenen Vierecke liegen, deren Gegenseitenpaare von Punkten X', Y' ausgehen, die zu X, Y harmonisch liegen. Lässt man X, Y mit dem zu L, L_1 und zum Kugelkreis harmonisch gelegenen Punktepaar V, W zusammenfallen, so wird der zu V, W gehörige Kegelschnitt, nach beiden Erzeugungsarten, zum Linienpaar UV, UW. Die entsprechende Fläche im Flächenbüschel zweiten Grades ist also ein orthogonales Paraboloid. — Wenn die zwei Geraden l, l_1 windschief normal zueinander liegen, so sind ihre unendlich fernen Punkte L, L_1 konjugierte Pole für den Kugelkreis. Unter den Punktepaaren X, Y, die zu L, L_1 harmonisch liegen, treten die imaginären Kreispunkte auf $L L_1$ als Paar auf. Der zugehörige Kegelschnitt geht durch die Berührungspunkte der Tangenten von diesen imaginären Kreispunkten an den Kugelkreis; der Kegelschnitt berührt daher den Kugelkreis doppelt und die Berührungspunkte sind jene zwei imaginären Kreispunkte auf $L L_1$. Unter den Flächen des Flächenbüschels vom zweiten Grad tritt also in dem Falle, wo die Geraden l, l_1 windschief normal sind, eine Rotationsfläche auf, deren Asymptotenkegel ein gerader Kreiskegel ist. —

Angenommen die beiden Geraden l, l_1 seien beliebig windschief im Raum gelegen und P sei ein beliebiger Punkt des Raumes; die Polargerade von P in bezug auf das Flächenbüschel ist die Schnittlinie der Polarebenen von P in bezug auf die zwei Nullzylinder, also die Schnittlinie der zwei Ebenen durch l, l_1, beziehungsweise senkrecht zu den Ebenen (P, l), (P, l_1). Durch diese Gerade gehen alle Polarebenen von P nach den verschiedenen Flächen des Büschels. Lässt man P sich auf einer beliebigen Geraden bewegen, so gehört zu jedem P eine Polargerade; der Ort dieser Polargeraden ist das Erzeugnis von zwei projektivischen Ebenenbüscheln mit l, l_1 als Scheitelkanten, wobei entsprechende Ebenen immer die Polarebenen von P in bezug auf die zwei Nullzylinder sind. Das Erzeugnis ist ein Hyperboloid durch die Geraden l, l_1, die von jeder Polargeraden geschnitten werden, während die zu l, l_1 windschiefen Erzeugenden des Hyperboloids die konjugierten Geraden zu der Geraden, auf der sich P bewegt, in bezug auf die Flächen des Büschels sind. Um die Pole einer Ebene in bezug auf die Flächen des Büschels zu erhalten, kann man P zwei Geraden der Ebene durchlaufen lassen. Zu jeder Geraden gehört ein Hyperboloid durch l, l_1; der gemeinsame Punkt der zwei Geraden liefert eine

Polargerade, welche ebenfalls beiden Hyperboloiden gemeinsam ist. Die zwei Hyperboloide durchdringen sich daher noch in einer vierten Geraden. Der Ort der Pole einer Ebene in bezug auf die Flächen des Büschels ist demnach eine gerade Linie, welche l, l_1 schneidet. Lässt man die Ebene ins Unendliche fallen, so sind ihre Pole in bezug auf die Flächen deren Mittelpunkte. Der Ort der Mittelpunkte aller Flächen des Büschels ist also eine gerade Linie und zwar die senkrechte Transversale von l, l_1; denn die Polarebenen eines Punktes auf der unendlich fernen Geraden LL_1 nach den zwei Nullzylindern schneiden sich in jener Transversalen. Ihr unendlich ferner Punkt ist U. Der Punkt U und die Gerade LL_1 sind Pol und Polare für den Kugelkreis und auch für jeden Kegelschnitt des Büschels im Unendlichen. Das gemeinsame Tripel von Kugelkreis und jeweiligem Kegelschnitt hat also eine feste Ecke in U und die zwei andern Ecken liegen immer auf der Geraden LL_1. Das heisst, dass für alle Flächen des Büschels die eine Achse auf die senkrechte Transversale zu l, l_1 fällt und die beiden andern Achsen parallel zur Ebene mit der Stellung LL_1 laufen.

Um die Fläche des Büschels zu finden, die durch einen gegebenen Punkt P geht, kann man auf jeder Geraden durch P den zweiten Schnittpunkt mit der Fläche angeben. Die Flächen des Büschels schneiden eine Gerade durch P in einer Involution, von der zwei Paare bekannt sind, nämlich die imaginären Doppelpunkte der zwei Involutionen, welche die rechtwinkligen Ebeneninvolutionen um l, l_1 aus der Geraden herausschneiden. Das gemeinsame Paar dieser zwei Involutionen ist reell und bildet die Doppelpunkte der Involution, welche das Flächenbüschel aus der Geraden herausschneidet; der dem Punkte P entsprechende Punkt dieser Involution ist der zweite Schnittpunkt der Geraden mit der Fläche durch P. Legt man die Gerade durch P so, dass sie zur senkrechten Transversalen von l, l_1 parallel läuft, und bezeichnet man den Schnittpunkt der Geraden mit der Fläche mit P', so schneidet die mittelsenkrechte Ebene von PP' die senkrechte Transversale von l, l_1 im Mittelpunkt M der Fläche. Ist umgekehrt auf dieser Transversalen der Mittelpunkt M der Fläche gewählt, so kann man für jede Gerade durch M die Endpunkte des auf ihr gelegenen Durchmessers der Fläche finden. Man sucht auf der Geraden, wie vorhin, die Doppelpunkte der Involution, welche das Flächenbüschel herausschneidet und ermittelt dasjenige Paar, dessen Mitte der Punkt M ist. Die Punkte des Paars bilden die Endpunkte des Durchmessers. Soll das zum Mittelpunkt M der Fläche gehörige Punktepaar X, Y im Unendlichen auf LL_1 gefunden werden, das in schon auseinandergesetzter Weise den unendlich fernen ebenen Schnitt der Fläche liefert, so kann man den Umstand benützen, dass die Reihe der Flächenmittelpunkte auf der senkrechten Transversalen von l, l_1 und die Paare der von X, Y gebildeten Involution projektivisch aufeinander bezogen werden können. Von der Pojektivität kennt man drei entsprechende Elemente, nämlich auf der senkrechten Transversalen von l, l_1 den Mittelpunkt M_1 auf l, den Mittelpunkt M_2 auf l_1, den unendlich fernen Punkt U_∞ und von der Involution die Paare L (Doppelpunkt), L_1 (Doppelpunkt) und V, W. Die Involution kann man projektivisch machen zur Reihe der vierten harmonischen Punkte von irgendeinem Punkt z. B. V in bezug auf die Punktepaare der Involution, also zu den Punkten L, L_1, V. Bezeichnet man den zum Mittelpunkt M gehörigen Punkt auf $L L_1$ mit Z, so besteht die Gleichheit der Doppelverhältnisse $(M_1\ M_2\ U_\infty\ M) = (L\ L_1\ V Z)$; hieraus kann man Z konstruieren und damit ist das gesuchte Punktepaar der Involution dasjenige, das zu V, Z harmonisch liegt. Soll für eine Fläche des Büschels die Tangentialebene in einem Punkte P gefunden werden, so sucht man zu P die Polargerade in bezug auf das Büschel; die Ebene von P nach dieser Polargeraden ist die gesuchte Tangentialebene, weil sie die Polarebene von P in bezug auf die Fläche ist. Man kann auch die zwei Erzeugenden der Fläche durch P finden. Zu diesem Zwecke schneidet man die Tangentialebene von P der Fläche mit den rechtwinkligen Ebeneninvolutionen um l, l_1; die Scheitelpunkte der herausgeschnittenen Strahleninvolutionen seien L^*, L_1^*. Die entsprechenden Strahlen zum gemeinsamen Scheitelstrahl schneiden sich in P. Die gesuchten Erzeugenden durch P sind die reellen Diagonalen des imaginären Viereckes, dessen Ecken die Schnittpunkte der zwei Paare imaginärer Doppelstrahlen der zwei Strahleninvolutionen sind. Die beiden Strahleninvolutionen liegen für jede der zwei Erzeugenden perspektivisch; die letzteren, d. h. die Diagonalen des imaginären Viereckes ergeben sich daher folgendermassen. Man sucht bei der Involution mit dem Scheitel L^* das Strahlenpaar, das zu $L^*L_1^*$ und L^*P harmonisch liegt und bei der Involution mit dem Scheitel L_1^* das Strahlenpaar, das zu $L_1^*L^*$ und L_1^*P harmonisch liegt. Die beiden Strahlenpaare müssen wegen der harmonischen Lage im Viereck sich auf seinen Diagonalen schneiden. Folglich sind die gesuchten Erzeugenden durch P die zwei Verbindungslinien der gegenüberliegenden Schnittpunkte der zwei reellen Strahlenpaare. Das gleiche Verfahren kann man auf die Punkte X, Y der unendlich fernen Geraden $L L_1$ anwenden und erhält für die zu X, Y gehörige Fläche des Büschels die Tangentialebenen in X, Y, ferner den auf ihnen gelegenen Mittelpunkt der Fläche und ihre Erzeugenden durch X, Y. Nimmt man eine Erzeugende durch X und die zu ihr windschiefe durch Y, so kann man diese zwei Erzeugenden als Scheitelkanten von projektivischen Ebenenbüscheln wählen, deren entsprechende Ebenen aufeinander senkrecht stehen; die zu X, Y gehörige Fläche des Büschels wird dadurch als orthogonales Hyperboloid erzeugt.

Ist unter den Flächen des Büschels diejenige gesucht, die eine gegebene Ebene berührt, so kann man die Ebene mit den zwei rechtwinkligen Ebeneninvolutionen um l, l_1 schneiden und bei den entstandenen Strahleninvolutionen zum gemeinsamen Scheitelstrahl die entsprechenden Strahlen suchen. Ihr Schnittpunkt ist der Berührungspunkt der Ebene mit der Fläche. Das weitere wie vorhin.

Sind unter den Flächen des Büschels diejenigen gesucht, die eine gegebene Gerade berühren, so schneidet man die zwei rechtwinkligen Ebeneninvolutionen um l, l_1 mit der Geraden, und sucht das gemeinsame Paar der entstandenen zwei Punktinvolutionen. Dieses gemeinsame Paar liegt harmonisch zu den imaginären Doppelpunkten beider Punktinvolutionen; es repräsentiert also die Doppelpunkte derjenigen Involution, welche von den Flächen des Büschels aus der Geraden herausgeschnitten wird. Die beiden Punkte des gemeinsamen Paars sind also die Berührungspunkte der gegebenen Geraden mit den gesuchten Flächen, deren es zwei gibt. Das weitere wie vorhin.

Bemerkung. Die Ausführungen lassen sich verallgemeinern; man kann die geraden Nullzylinder durch schiefe Nullzylinder ersetzen, bei denen an Stelle der rechtwinkligen Ebeneninvolutionen beliebige elliptische Ebeneninvolutionen getreten sind. Ferner gibt es duale Betrachtungen.