Über das topologische Abbild einer Strecke.

Von

WILLY SCHERRER (Zürich).

(Als Manuskript eingegangen am 5. Juli 1924.)

Für diejenigen Gebilde, welche als topologische Abbilder einer Strecke erklärt sind, soll im folgenden eine Definition angegeben werden, welche von dem Begriff der topologischen Abbildung unabhängig und mit der ersten Definition vollständig äquivalent ist.

Lehrsatz: Ein beschränktes, zwei Punkte A und B irreduzibel verbindendes Kontinuum $\widehat{AB}$, welches in jedem seiner Punkte glatt ist, lässt sich topologisch auf eine Strecke abbilden und umgekehrt stellt jedes topologische Abbild einer Strecke ein derartiges Kontinuum dar.

Für die Begriffe der Irreduzibilität und der Glätte gelten folgende Erklärungen.

Ein Kontinuum K heisst irreduzibel zwischen zwei Punkten A und B, wenn kein Teilkontinuum k von K existiert, welches beide Punkte enthält.

Ein Kontinuum K heisst glatt in einem Punkte P, wenn sich zu einer beliebig kleinen ε-Umgebung des Punktes P eine δ-Umgebung desselben Punktes derart bestimmen lässt, dass irgend zwei Punkte dieser δ-Umgebung verbunden werden können durch ein Teilkontinuum von K, welches ganz in der beliebig angenommenen ε-Umgebung verläuft.

(Zu diesen Erklärungen vergleiche man etwa v. KERÉKJARTO, Topologie, S. 46, und namentlich die etwas abweichende Definition der Glätte eines Gebietsrandes, S. 65.)

Die Grundlage für den Beweis bildet folgender

Hilfssatz: Ein beschränktes, zwei Punkte A und B irreduzibel verbindendes Kontinuum $\widehat{AB}$, welches in jedem Punkte glatt ist, wird durch jeden von A und B verschiedenen Punkt C aus $\widehat{AB}$ in zwei ebensolche Teilkontinuen $\widehat{AC}$ und $\widehat{CB}$ zerlegt, welche ausser C keinen weitern Punkt gemein haben.

Beweis: Es sei a_1 die kleinere der beiden Distanzen AC und AB. Man bestimme zu jedem Punkte des Kontinuums $\widehat{AB}$ eine Grösse ε derart, dass irgend zwei Punkte der zu diesem Punkte gehörigen ε-Umgebung durch ein Kontinuum verbunden werden können, welches ganz in einer zweiten Umgebung vom Radius $r_1 < \frac{a_1}{2}$ verläuft (Voraussetzung der Glätte). Jede derartige ε-Umgebung reduziere man auf die zu ihr konzentrische $\frac{\varepsilon}{2}$-Umgebung. Nach dem HEINE-BORELschen Überdeckungssatz gibt es unter diesen $\frac{\varepsilon}{2}$-Umgebungen endlich viele, welche $\widehat{AB}$ ganz bedecken. Nun wähle man eine Grösse $\delta < \frac{a_1}{2}$; welche überdies kleiner sei als jeder dieser endlich vielen Radien $\frac{\varepsilon}{2}$. Darauf werden A und C durch eine zu $\widehat{AB}$ gehörige δ-Kette verbunden. Der auf A folgende Punkt P_1 dieser Kette kann nun mit A durch ein Teilkontinuum von $\widehat{AB}$ verbunden werden, welches ganz in einem Kreise vom Radius r_1 verläuft: A liegt in einer der endlich vielen $\widehat{AB}$ bedeckenden $\frac{\varepsilon}{2}$-Umgebungen und P_1 im Abstand $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$ davon, also sicher in einer ε-Umgebung mit A. Dieses Kontinuum werde nun dem Punkt A hinzugefügt und dasselbe als eine Fortsetzung von A bezeichnet. Alle Punkte dieser Fortsetzung haben nach Konstruktion eine Distanz $\leqq 2\,r_1 < 2 \cdot \frac{a_1}{2} = a_1$ von A. Weder C noch B kann demnach dieser Fortsetzung angehören.

In analoger Weise fassen wir nun die beiden Distanzen ins Auge, welche diese Fortsetzung von den beiden Punkten B und C hat und bezeichnen die kleinere mit a_1'. Ist $a_1' \geqq a_1$, so können wir die δ-Kette ohne weiteres fortführen bis zum ersten Punkt P_1', welcher nicht mehr der Fortsetzung angehört, und diesen Punkt mit dem ihm vorausgehenden durch ein Teilkontinuum von AB verbinden, welches der schon gebildeten Fortsetzung sicher neue Punkte hinzufügt, hingegen weder C noch B erreicht. Nach endlich vielen solchen Schritten muss man auf eine Grösse $a_1^{(i)} = a_2$ stossen, welche kleiner ist als a_1, denn δ selber ist ja $< \frac{a_1}{2}$ und die δ-Kette führt zum Punkt C hin.

Ist diese Grösse $a_2 < a_1$ erreicht, so führen wir die genau gleiche Konstruktion auf Grund von a_2 aus, welche wir soeben in bezug auf a_1 beschrieben haben, d. h. wir konstruieren eine zu a_2 passende

δ-Kette vom Punkte $P_1^{(i)} = P_2$ nach C und fügen längs ihr weitere Fortsetzungen hinzu, welche den Bereich der ursprünglichen Fortsetzungen beständig erweitern, ohne aber C oder B zu erreichen.

Indem man auf diese Weise fortfährt, erhält man eine unendliche Folge von Fortsetzungen, von welcher keine endliche Partialfolge C oder B erreichen kann. Dieser Folge von Fortsetzungen zugeordnet ist eine Folge von Distanzen, welche eine gegen 0 konvergierende Teilfolge $a_1, a_2, a_3 \ldots$ enthält. Erweitern wir nun die so konstruierte Folge von Fortsetzungen durch die Menge ihrer Grenzpunkte und nennen wir das so erhaltene Kontinuum den von A ausgehenden Streifen, so folgt aus dem vorigen, dass mindestens einer der Punkte C und B dem Streifen angehören muss.

Es ist nun leicht zu zeigen, dass B nicht zu diesem Streifen gehören kann. Wäre nämlich B ein Grenzpunkt der Fortsetzungsfolge, so könnte man zu einem genügend grossen Index n eine Fortsetzung finden, welche B beliebig nahe kommt. Einer ihrer Punkte liesse sich dann mit B durch ein Teilkontinuum von AB verbinden, welches C nicht trifft. C kann aber nach Konstruktion auf keiner der vorausgehenden Fortsetzungen liegen und A wäre dann mit B durch ein Kontinuum verbunden, welches gegenüber C eine endliche Distanz hat. Diese Möglichkeit widerspricht der Voraussetzung der Irreduzibilität des Kontinuums $\widehat{AB}$. Es gehört also C und nur C zu dem von A ausgehenden Streifen.

Da nun B eine endliche Distanz von dem A mit C verbindenden Streifen hat, so kann man nach der gleichen Methode von B aus eine Folge von zusammenhängenden Kontinuen konstruieren, welche den Streifen AC nicht treffen und deren Distanz von diesem Streifen unter jede beliebige Grösse heruntersinkt. Unter der Grenzmenge dieser Folge existieren also sicher Punkte, welche zum Streifen AC gehören. Würde aber ein von C verschiedener Punkt des Streifens AC zu dieser Grenzmenge gehören, so könnte man ganz analog wie vorher eine Verbindung zwischen A und B herstellen, welche C auslässt.

Die beiden Streifen AC und BC haben also nur den Punkt C gemein. Daraus folgt weiter, dass auch die beiden Streifen AC und BC zwischen den Punkten A und C respektive B und C irreduzibel sind. Wäre nämlich etwa AC reduzibel, so liesse sich A mit C durch ein Teilkontinuum von AC verbinden. Irgendein Punkt P, welcher zum Streifen AC, nicht aber zu diesem Teilkontinuum gehört, könnte dann, da er nicht zu CB gehört, weggelassen werden, ohne dass die Verbindung zwischen A und B unterbrochen würde. Dies widerspricht der Voraussetzung, dass AB irreduzibel sei.

Nach dieser Vorbereitung kommen wir nun zum Beweis des Lehrsatzes:

Man verbinde A und B durch die Strecke AB und errichte auf ihr die Mittelsenkrechte s. Die letztere Linie muss AB mindestens einmal treffen. Von der Menge derjenigen Punkte, welche AB und s gemein haben, nehmen wir denjenigen, welcher dem Mittelpunkt der Strecke AB am nächsten liegt. Ist auf jedem Halbstrahl von s ein solcher Punkt vorhanden, so kann man durch Verbindung einer Indikatrix für die Strecke AB mit einem Drehsinn zur Bestimmung eines Halbstrahls die Auswahl eindeutig und von vornherein bestimmt machen.

Der so erhaltene Punkt C zerlegt $\widehat{AB}$ in zwei Teilkontinuen $\widehat{AC}$ und $\widehat{CB}$, welche nach dem Hilfssatz gleich beschaffen sind wie $\widehat{AB}$ und nur den Punkt C miteinander gemein haben. Überdies sind die Strecken AC und CB einander gleich.

Dem Punkt A lasse man nun den Punkt 0, dem Punkt B den Punkt 1 der reellen Zahlenachse entsprechen. Darauf ordne man C dem Punkt $\frac{1}{2}$, oder als Dualbruch geschrieben, dem Punkt 0,1 zu. Führt man nun die gleiche Konstruktion in bezug auf die Kontinuen $\widehat{AC}$ und $\widehat{CB}$ durch usw., so erhält man lauter verschiedene Punkte. Ist die Approximation auf der $n$ten Stufe angelangt, so ist damit eine Korrespondenz hergestellt zwischen einer Kette von $2^{n-1}+1$ Punkten des Kontinuums $\widehat{AB}$ und sämtlichen Punkten des Intervalles (0; 1), deren Dualbruchentwicklung höchstens n-Stellen hat.

Um nun einzusehen, dass diese Korrespondenz zu einer vollständigen topologischen Abbildung des ganzen Kontinuums $\widehat{AB}$ auf die Zahlstrecke (0; 1) ergänzt werden kann, muss man zeigen, dass die Strecken sämtlicher Approximationsstufen, welche über einem genügend hohen Index liegen, in ihrer Länge beliebig wenig von 0 abweichen. Wäre dies nicht der Fall, so müsste eine Folge von verschiedenen Strecken vorhanden sein, deren Längen beständig oberhalb einer bestimmten Grösse blieben. Dann müssten mindestens zwei verschiedene Grenzpunkte P und Q vorhanden sein von der Eigenschaft, dass ein Punkt P' in beliebiger Nähe von P mit einem Punkt Q' in beliebiger Nähe von Q verbunden ist durch eine Strecke dieser Folge. Wird dieses Punktepaar (P', Q') auf der $n$ten Stufe erreicht, so kann man weiter zu einer Stufe $n+p$ $(p>0)$ vorrücken, welche eine Strecke $P''Q''$ liefert, deren Enden P'' und Q'' in mindestens ebenso kleinen

Umgebungen von P und Q liegen, und von denen sicher eines, etwa Q'', verschieden sein muss von dem entsprechenden Ende Q' der Strecke $P'Q'$.

Die Umgebungen von P und Q, innerhalb deren sich die Punkte P', P'' resp. Q', Q'' befinden, seien bezeichnet mit u_P und u_Q. u_P und u_Q seien so klein gemacht, dass zu je zwei Punkten des Kontinuums $\widehat{AB}$, welche in einer von ihnen liegen, ein zu $\widehat{AB}$ gehöriges verbindendes Teilkontinuum existiert, welches ganz innerhalb der ihr entsprechenden der beiden einander nicht treffenden Umgebungen U_P und U_Q verläuft (Glätte).

Betrachten wir nun die Approximationskette der Stufe $n+p$. Zu ihr gehört die Strecke $P''Q''$, aber auch sämtliche Punkte der Stufe n, also auch P' und Q'. Nach der Symmetrie der Konstruktion gehört aber zu der Strecke $P''Q''$ eine gleich grosse Strecke, welche mit ihr ein Ende gemein hat, und zwar muss dieses Ende Q'' sein, falls P' und P'' zusammenfallen. Wir beschränken uns auf diese Möglichkeit, da man sonst ganz analog verfahren kann. Diese an Q'' anstossende Strecke muss also notwendig aus U_Q herausführen. Lässt man also das ihr entsprechende von den übrigen (abgesehen von den Endpunkten) fremde Teilkontinuum weg und ergänzt dann die Verbindung wieder durch U_Q hindurch, so hat man damit eine Verbindung hergestellt zwischen A und B, welche nicht alle Punkte von $\widehat{AB}$ erschöpft. Dies steht im Widerspruch zur vorausgesetzten Irreduzibilität.

Nun kann die Abbildung folgendermassen zu Ende geführt werden:

Jedem Punkte von $\widehat{AB}$, welcher nicht durch eine endliche Zahl von Approximationsstufen erreicht werden kann, lässt sich ein unendlicher Dualbruch zuordnen, entsprechend der unendlichen Folge ineinanderliegender Teilkontinuen, in welchen er enthalten ist. Verschiedenen Punkten entsprechen so verschiedene Dualentwicklungen, da solche Punkte nach einer endlichen Anzahl von Approximationsstufen in getrennt liegende Intervalle zu liegen kommen.

Umgekehrt entspricht jedem unendlichen Dualbruch eine Folge von ineinanderliegenden Teilkontinuen, welche nur einen Grenzpunkt haben kann. Zwei verschiedenen Dualbrüchen entsprechen auch verschiedene Punkte, da von einer bestimmten Stufe an die Einschachtelung wieder innerhalb getrennter Teilkontinuen vor sich geht.

Im Detail werden die Schlüsse analog wie früher ausgeführt auf Grund der Voraussetzungen der Irreduzibilität und der Glätte und es ergibt sich dabei ohne weiteres auch die Stetigkeit der Abbildung.

Die beiden Bedingungen der Irreduzibilität und Glätte sind somit als hinreichend für das topologische Abbild einer Strecke erkannt worden. Es ist leicht zu zeigen, dass sie auch notwendig sind.

2. Juli 1924.