Die Geschwindigkeitszunahme der Erdbebenwellen mit der Tiefe, berechnet aus Beobachtungen über das Explosionsbeben in Oppau.

Von

ERNST MEISSNER.

(Als Manuskript eingegangen am 25. November 1923.)

In dem Vortrage über Erdbeben, den Herr DE QUERVAIN am 19. November 1923 in unserer Gesellschaft gehalten hat, zeigte er Diagramme eines Rigibebens vor, die einen auffallend starken Einsatz in der Vertikalkomponente aufwiesen. Es lässt sich daraus schliessen, dass auf der Station Degenried, also in verhältnismässig kleiner Entfernung vom Herd (ca. 40 km) die Bebenstrahlen recht steil ausgetreten sind. Hieraus wieder ergibt sich ein grosser Tiefgang dieser Strahlen und damit eine beträchtliche Zunahme der Wellengeschwindigkeit mit der Tiefe.

Es scheint mir daher am Platz, eine Rechnung nachträglich hier zu publizieren, die ich letzten Winter angestellt hatte, um den Tiefengradienten der Geschwindigkeit aus Beobachtungen zu ermitteln; dies umsomehr, als die Richtigkeit des etwas überraschenden Resultates von dritter Seite angezweifelt wurde.

Aus den Beobachtungen über das Explosionsbeben in Oppau vom 21. September 1921 hatten HECKER, WRINCH und JEFFREY u. a.[1]) Werte für die mittlere Laufgeschwindigkeit berechnet, die recht erheblich voneinander abwichen. Daraufhin hat DE QUERVAIN[1]) das Beobachtungsmaterial sorgfältig revidiert und reduziert und folgendes gefunden:

	Beobachtung No. 1	2	3	4	5	6	7	8	9
Herddistanz in km	27	78	106	113	168	212	238	250	365
Mittl. Geschw. in km/sec	4,8	4,8	4,9	5,0	5,0	5,0	5,3	5,3	5,5

Die gesetzmässige Zuname der mittleren Geschwindigkeit mit der Herddistanz ist augenscheinlich. Vorhandene starke Streuungen können durch Ungenauigkeiten in den Beobachtungen erklärt werden; sie können aber auch dem Umstande zugeschrieben werden, dass die geologischen

[1]) Jahresbericht des schweiz. Erdbebendienstes 1921.

Verhältnisse des Untergrundes auf der Laufstrecke ziemlich stark wechseln. Wenn daher im folgenden eine lineare Zunahme der Geschwindigkeit mit der Tiefe vorausgesetzt wird, so kann der so berechnete Gradient nur den Charakter eines Mittelwertes haben. Er ist in Wirklichkeit eine Ortsfunktion. Nach der folgenden Rechnung ergibt sich dafür der Wert 0,032 $\sec^{-1}$. Das ist überraschend viel. Indessen dürfen sich Einwände gegen das Resultat nicht auf Formeln stützen, die nur mit Annäherung für flach verlaufende Strahlen gelten. Die nachfolgende Rechnung ist streng und innerhalb der gemachten Voraussetzungen zwingend. Da der Oberflächenwert der Laufgeschwindigkeit nicht sehr genau bekannt war, wurde er neben dem Gradienten als zweite Unbekannte angesehen und nach den Methoden der Fehlerrechnung ermittelt. Es ergab sich dafür 4,8 km/sec. DE QUERVAIN hat in guter Übereinstimmung damit aus dem Alpnacher Sprengungsbeben den Wert 4,7 ± 0,1 gefunden.

In der Rechnung kann wegen der Kleinheit der Herddistanzen von der Erdkrümmung ganz abgesehen werden. Es handelt sich um die Wellenausbreitung in einem unendlichen Halbraum, der von einer horizontalen Ebene, der Erdoberfläche begrenzt ist. Der Herd 0 liegt in dieser Ebene. Es wird angenommen, dass die Laufgeschwindigkeit mit der Tiefe z linear zunimmt. Bezeichnet also c ihren Wert an der Oberfläche, λ den Gradienten, v die Geschwindigkeit in der Tiefe z; so gilt

$$v = c + \lambda \cdot z \tag{1}$$

c und λ sind aus den Beobachtungen zu finden.

Auf einem Bebenstrahl, der von 0 ausgeht, seien x und z die laufenden Koordinaten eines Punktes P, τ der Winkel des Strahls in P zur Horizontalen e, der Wert von τ für 0, also auch der Emergenzwinkel an der Austrittsstelle A des Strahles, t resp. T die Laufzeit auf dem Bogen OP resp. OA, $\Delta = OA$ die Herddistanz von der Station A, Δ/T die scheinbare Laufgeschwindigkeit C für A. Dann ist

$$t = \int_0^P \frac{ds}{v} = \int_0^z \frac{\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2}}{c+\lambda z}\, dz \tag{2}$$

Für den Strahl wird dieses Integral zu einem Minimum. Dies ergibt:

$$\frac{\frac{dx}{dz}}{(c + \lambda z)\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2}} = \text{konstant}$$

oder wegen

$$\frac{dx}{dz} = \operatorname{cotg} \tau$$

und

$$\tau = e \quad \text{für} \quad z = 0$$

$$\cos \tau = \cos e \cdot \left(1 + \frac{\lambda}{c} z\right) \tag{3}$$

Setzt man $h = \frac{c}{\lambda}$ und $R = \frac{h}{\cos e}$ (4)

so wird

$$z = R \cdot \cos \tau - h \tag{3'}$$

und dies ist die Gleichung eines Kreisbogens durch 0 vom Halbmesser R, dessen Mittelpunkt im Abstand h über der Oberfläche liegt. Die Bebenstrahlen sind Kreise.

Wegen

$$ds = -R d\tau$$

ergibt sich ferner für die Laufzeit

$$T = -\frac{2 R \cos e}{c} \int_e^0 \frac{d\tau}{\cos \tau} = \frac{2}{\lambda} \int_0^e \frac{d\tau}{\cos \tau} = \frac{1}{\lambda} \lg \frac{1 + \sin e}{1 - \sin e} \tag{5}$$

Die Herddistanz Δ ist

$$\Delta = 2R \sin e = 2h \operatorname{tg} e \tag{6}$$

und die Scheiteltiefe Z des Strahles:

$$Z = R \cdot (1 - \cos e) \tag{7}$$

Setzt man noch

$$u = \frac{\lambda T}{2} \qquad \sigma = \frac{C}{c} = \frac{\Delta}{Tc} \tag{8}$$

so folgt aus (5)

$$\sin (e) = th\,(u) \qquad \text{also} \qquad \operatorname{tg} (e) = sh\,(u)$$

und durch Einsetzen in (6)

$$\frac{sh\,(u)}{u} = \sigma \tag{9}$$

Diese transzendente Gleichung hat für $\sigma > 1$ eine reelle Lösung u_0. Aus ihr findet man

$$\lambda = \frac{2C}{\varDelta} u_0 \tag{10}$$

Zum Vergleich mit den anfangs gegebenen Resultaten der Beobachtung hat man sich der Formeln zu bedienen:

$$\left.\begin{aligned} \varDelta &= 2h \operatorname{tg} e \\ C &= \frac{\varDelta}{T} = \frac{2c \cdot \operatorname{tg} e}{\lg \frac{1+\sin e}{1-\sin e}} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

aus denen sich in Parameterform der Zusammenhang zwischen C und $\varDelta$ ergibt.

Gang der Rechnung. Ich zog vor, den Wert der Oberflächengeschwindigkeit c aus den vorliegenden Beobachtungen zu bestimmen, und ich hielt es für vorsichtig, von den Beobachtungen No. 1 und 2 keinen Gebrauch zu machen, da sie wegen der kleinen Laufzeit naturgemäss am stärksten mit Fehlern behaftet sein können. Es erwies sich diese Vorsicht als unnötig. Wie die Figur am Schluss dieser Arbeit zeigt, weisen die an Stelle der Beobachtungen 1 und 2 tretenden errechneten Werte nur unbedeutende Abweichungen auf. Ich ging so vor, dass ich zunächst einen Wert für c wählte, nach Formeln (9) und (10) aus allen Beobachtungen 3—9 den Wert von λ berechnete und den Mittelwert λ_m sowie das mittlere Fehlerquadrat F bestimmte. Dies wurde ausgeführt für $c = 0{,}70$; $0{,}75$; $0{,}78$: $0{,}79$; $0{,}80$; $0{,}81$; $0{,}82$. Die zugehörige Rechnung war sehr einfach, nachdem ich mir mit geringer Mühe aus vorliegenden Tabellen für $sh\,(u)$ eine solche für $sh(u)/u$ hergestellt hatte, deren Argumente u um Hundertstel fortschritten. Das Fehlerquadrat F ergab sich für $\boldsymbol{c = 0{,}80}$ am kleinsten und dieser Wert wurde daher als der wahrscheinlichste ausgewählt. Für ihn ergab sich folgendes:

Beobachtung No.	3	4	5	6	7	8	9
C nach de Quervain	4,9	5,0	5,0	5,0	5,3	5,3	5,5
$\varDelta$ „ „ „	106	113	168	212	238	250	365
u	0'353	'496	'496	'496	'765	'765	'913
λ	0'033	'043	'030	'023	'034	'032	'028
e	19° 28';	20° 40';	29° 15'	35,2°	38.4°	39,8°	50,5°
C	4,89	4,91	5,03	5,16	5,23	5,27	5,69
Z	9,1	10,3	21,9	33,7	41,4	45,2	86,2

Man erhält für λ_m den erwähnten Wert 0,032, so dass für die Geschwindigkeit als Funktion der Herdtiefe zu setzen ist:

$$v = 4{,}8 + 0{,}032 \cdot z \qquad \text{in km und sec.}$$

In der obenstehenden Tabelle sind die nach (6) und (11) berechneten Werte für den Emergenzwinkel, die scheinbare Laufgeschwindigkeit unter Zugrundelegung dieses Resultates und für die Scheiteltiefe der Strahlen eingetragen. Die Figur gibt durch die Kurve die entsprechenden C-Werte. Sie enthält daneben auch die Beobachtungen zum Vergleich. Tiefgang der Strahlen und wahrer Emergenzwinkel sind beträchtlich. Wenn auch die Voraussetzung linearer und überall gleicher Geschwindigkeitszunahme den Verhältnissen nicht genau entsprechen wird, so dürfen diese Resultate doch wohl so gedeutet werden, dass die schnell leitenden kristallinischen Schichten des Untergrundes im Mittel wenigstens höher liegen als bisher angenommen wurde oder dass in dem darüber liegenden Gestein der Geschwindigkeitsgradient dermassen gross ist, dass sie sich trotz ihrer Tiefenlage an der Fortleitung der Beben schon bei den vorliegenden geringen Distanzen beteiligen.

Zollikon, den 24. November 1923.