Über Kegelflächen.

Von

A. KIEFER (Zürich).

(Als Manuskript eingegangen am 13. November 1923.)

Die Durchdringungskurve vierten Grades von zwei Kegelflächen zweiten Grades bekommt bekanntlich einen Doppelpunkt, wenn die Spitze der einen Fläche auf der andern Fläche liegt, und ferner auch dann, wenn die zwei Flächen eine gemeinsame Tangentialebene haben. Im ersten Fall erhält man die Doppelpunktstangenten der Durchdringung, indem man längs derjenigen Erzeugenden der einen Fläche, welche die Spitze der andern enthält, die Tangentialebene legt und mit der andern Fläche schneidet; die beiden herausgeschnittenen Erzeugenden sind die Doppelpunktstangenten. In einem beliebigen Punkte der Durchdringungskurve von zwei Kegelflächen wird die Tangente gefunden, indem man in dem Punkt an jede der zwei Flächen die Tangentialebene legt und die zwei Ebenen miteinander schneidet. Diese Konstruktion versagt für die Doppelpunktstangenten in dem erwähnten zweiten Falle, wo die zwei Kegelflächen eine gemeinsame Tangentialebene haben, und es ist die Frage, wie in diesem Falle die fraglichen Tangenten gefunden werden. Denkt man sich den Doppelpunkt, das ist der gemeinsame Berührungspunkt der zwei Flächen mit sämtlichen Punkten der Durchdringung verbunden, so entsteht eine Kegelfläche zweiten Grades, welche die gesuchten Doppelpunktstangenten als Erzeugende enthält; diese Kegelfläche gibt mit einer der beiden ersten Flächen dieselbe Durchdringungskurve und die Doppelpunktstangenten müssen die Schnittlinien dieser Kegelfläche mit der gemeinsamen Tangentialebene der ersten zwei Kegelflächen sein. Um die Sache besser zu übersehen, nehme man an, die zwei Kegelflächen hätten als Leitfiguren zwei Kreise, die in der gleichen Ebene liegen und eine gemeinsame Tangente haben, welche von der Verbindungsgeraden der zwei Spitzen geschnitten wird. Die Berührungspunkte der gemeinsamen Tangente mit den zwei Grundkreisen seien Q_1, Q_2; der Schnittpunkt der zwei Erzeugenden nach diesen Punkten sei O, das ist der Doppelpunkt der Durchdringung. Der Schnitt des neuen Kegels mit der gemeinsamen Leitebene der ersten zwei Kegel geht durch die Schnittpunkte der zwei Grundkreise hindurch; da zwei von diesen Punkten die imaginären Kreispunkte der Leitebene im Unendlichen sind, so ist der Schnitt des neuen Kegels mit der Leitebene wieder ein Kreis, der dem Büschel angehört, das die zwei Grundkreise bestimmen. Ist ein einziger Punkt P der Durchdringung konstruiert, so schneidet OP die Leitebene in einem Punkte P_1. Derselbe bestimmt mit den Schnittpunkten der zwei Grundkreise einen Kreis; er schneidet die gemeinsame Tangente in zwei Punkten, deren Verbindungslinien mit O die gesuchten Doppelpunktstangenten sind. Anstatt einen beliebigen Punkt P der Durchdringung mit O zu verbinden, kann man die unendlich fernen Punkte benützen. Verschiebt man beide gegebene Kegel parallel mit den Spitzen nach O, so schneiden die verschobenen Kegel die Leitebene in zwei Kreisen, die leicht zu zeichnen sind nnd deren Schnittpunkte X, Y zwei Punkte von dem gesuchten Kreis des Büschels sind. Anstatt den Kreis als Kreis des Büschels zu suchen, kann man durch X, Y den Kreis legen, der Q_1, Q_2 harmonisch trennt. Die Trennungspunkte bestimmen mit O die gesuchten Doppelpunktstangenten in O. Die Übertragung auf zwei beliebige Kegelflächen zweiten Grades, deren Leitfiguren nicht mehr Kreise sind, aber doch in der gleichen Ebene gewählt werden dürfen, geschieht folgendermassen. Man verbindet irgend einen Punkt der Durchdringung mit O, schneidet diese Gerade mit der Leitebene und legt durch den Schnittpunkt den Kegelschnitt, der dem Büschel der zwei Leitfiguren angehört und schneidet ihn mit der gemeinsamen Tangente. Die Verbindungslinien der Schnittpunkte mit O sind die gesuchten Doppelpunktstangenten. Oder man verschiebt die zwei Kegelflächen parallel mit den Spitzen nach O und legt durch die Schnittpunkte der neuen Leitfiguren den Kegelschnitt, der die Berührungspunkte Q_1, Q_2 harmonisch trennt und verbindet die Trennungspunkte mit O.

Wenn bei zwei Kegelflächen zweiten Grades die Spitze einer jeden auf der andern Fläche liegt, so bekommt die Durchdringungskurve der Flächen in jeder der zwei Spitzen einen Doppelpunkt. Die gemeinsame Erzeugende der zwei Flächen ist ein Teil der Durchdringung; der andere Teil ist eine Raumkurve dritten Grades, die durch beide Kegelspitzen hindurch geht. Um die Kurventangenten in den Kegelspitzen zu erhalten, legt man an jede der beiden Flächen längs der gemeinsamen Erzeugenden die Tangentialebene und schneidet jede mit der andern Fläche. Die beiden Schnittlinien sind die Tangenten. Legt man längs einer Kurventangente an die Kegelfläche, auf welcher die Tangente liegt, die Tangentialebene, so enthält sie auch die unendlich benachbarte Tangente der Kurve und folglich ist die Ebene die Schmiegungsebene der Raumkurve dritten Grades in dem betreffenden Punkt. Bekanntlich verhält sich die Raumkurve dritten Grades bezüglich ihrer Punkte und ihrer Schmiegungsebenen dual. Jede Ebene schneidet die Kurve in drei Punkten und die Schmiegungsebenen in den drei Punkten schneiden sich in einem Punkt ihrer Ebene; durch jeden Punkt gehen nach der Kurve drei Schmiegungsebenen und ihre drei Berührungspunkte liegen in einer Ebene durch den Punkt. Wie die Strahlen von einem Punkt der Kurve nach ihren Punkten eine Kegelfläche zweiten Grades erfüllen, so umhüllen die Schnittlinien einer Schmiegungsebene mit den übrigen Schmiegungsebenen einen Kegelschnitt. Wie die Kurve als Folge von Punkten bei der Durchdringung von zwei Kegelflächen mit gemeinsamer Erzeugenden sich ergibt, so entsteht sie auch als Folge von Schmiegungsebenen bei der gemeinsamen umschriebenen Developpablen von zwei Kegelschnitten, deren Ebenen sich in einer gemeinsamen Tangente beider Kegelschnitte schneiden. Es liegt nahe, zur Bestimmung einer Raumkurve dritten Grades ausser Punkten auch Schmiegungsebenen zu geben.

Ist eine Raumkurve dritten Grades aus fünf Punkten und der Schmiegungsebene in einem derselben gesucht, so wähle man diesen Punkt als Spitze einer Kegelfläche nach der Kurve; die Kegelfläche muss die vier Geraden von dem Punkt nach den vier andern Punkten als Erzeugende enthalten und die gegebene Schmiegungsebene längs der Kurventangente im fünften Punkte berühren. Durch die vier Erzeugenden geht ein Büschel von Kegelflächen zweiten Grades, das die Schmiegungsebene in einer Strahleninvolution schneidet. Jeder der beiden Doppelstrahlen dieser Involution kann als Tangente einer Raumkurve im fünften Punkt gewählt werden. Es sind also zwei solcher Kurven möglich; jede derselben kann ohne weiteres mit zwei Kegelflächen zweiten Grades gefunden werden, die zwei von den Punkten zu Spitzen haben.

Sind von einer Raumkurve dritten Grades vier Punkte A, B, C, D und die Schmiegungsebenen in zwei von den vier Punkten, z. B. A, B, gegeben, so lege man durch C, D irgend eine Ebene und schneide sie mit der Geraden AB in dem Punkte E und mit den zwei Schmiegungsebenen der Punkte A, B in den Geraden t_1, t_2. Nun hat man durch E, C, D zwei Kegelschnitte K_1, K_2 zu finden, von denen K_1 die Gerade t_1 in einem Punkte U berührt und K_2 die Gerade t_2 in einem Punkte V berührt, so dass EV Tangente von K_1 und EU Tangente von K_2 ist. Es ist die Frage, wieviele solcher Paare von

Kegelschnitten existieren; jedes Paar bestimmt nämlich mit den Punkten A, B als Spitzen zwei Kegelflächen, die sich in einer gesuchten Kurve dritten Grades durchdringen. Ist V ein Punkt auf t_2, so gibt es einen Kegelschnitt, der t_2 in V berührt und durch E, C, D geht; die Tangente dieses Kegelschnittes in E gibt mit t_1 den Schnittpunkt U. Verbindet man V mit E, so gibt es zwei Kegelschnitte, die EV in E berühren, ferner durch C, D gehen und t_1 berühren. Bezeichnet man einen Berührungspunkt mit U', so bildet der zugehörige Kegelschnitt mit dem erstgewählten ein gesuchtes Paar, wenn U' und U zusammenfallen. Es ist also zu entscheiden, wie manchmal zwei entsprechende Punkte U und U' zusammenfallen. Wählt man U' auf t_1, so gibt es einen Kegelschnitt, der t_1 in U' berührt und durch E, C, D geht. An diesen Kegelschnitt gibt es in E eine einzige Tangente EV und dann einen einzigen Kegelschnitt, der t_2 in V berührt und durch E, C, D geht; die Tangente an denselben in E gibt den Schnittpunkt U mit t_1. Zu dem Punkte U' gehört also ein einziger Punkt U. Ein beliebig gewählter Punkt U auf t_1 bestimmt die Gerade UE und durch E gibt es zwei Kegelschnitte, die UE in E berühren, durch C, D gehen und t_2 berühren; demnach entstehen auf t_2 zwei Punkte V. Zu jedem Pnnkt V gehört eine Gerade VE und zur Geraden VE gibt es zwei Kegelschnitte, die VE in E berühren, durch C, D gehen und t_1 berühren. Also gehören zu jedem Punkte U zwei Punkte V und zu jedem V gehören zwei Punkte U', d. h. zu einem Punkte U gehören vier Punkte U'. Daher kommt es fünfmal vor, dass zwei zusammengehörige Punkte U, U' zusammenfallen. Aber wenn U' nach dem Schnittpunkt von EC oder von ED mit t_1 fällt, so kommt U nach dem gleichen Punkt; diese zwei Punkte treten als uneigentliche Lösungen auf. Daraus ist zu schliessen, dass es drei Raumkurven dritten Grades durch vier Punkte gibt, wenn in zwei von den vier Punkten je noch die zugehörige Schmiegungsebene gegeben ist.

Sind von einer Raumkurve dritten Grades drei Punkte A, B, C mit ihren Schmiegungsebenen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ gegeben, so muss der Schnittpunkt der drei Schmiegungsebenen in der Ebene der drei Punkte A, B, C liegen; die drei Schmiegungsebenen sind also nicht von einander unabhängig und daher wird es zu $A, B, C, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ unendlich viele Raumkurven dritten Grades geben. Bezeichnet man den Schnittpunkt der drei Schmiegungsebenen mit S und denkt sich von ihm aus eine gefundene Raumkurve auf eine beliebige Ebene des Raumes projiziert, so fallen die Projektionen A', B', C' von A, B, C in eine Gerade. Die Spuren der Schmiegungsebenen mit der Bildebene sind drei Geraden a', b', c' durch A', B', C'. Die Projektion der Raumkurve ist eine ebene Kurve dritten Grades durch die Punkte A', B', C', die auf einer Geraden liegen und Inflexionspunkte sind mit den bezüglichen Inflexionstangenten a', b', c'. Die Projektion der Raumkurve dritten Grades muss bekanntlich einen Doppelpunkt haben. Dadurch ist aber die Projektion der Kurve vollständig bestimmt; die Polargerade eines jeden der drei Inflexionspunkte A', B', C' in bezug auf die Kurve geht durch den Doppelpunkt und ist zugleich die Polargerade in bezug auf das nicht zum Punkt gehörige Paar der Inflexionstangenten. Der Doppelpunkt ist also der harmonische Pol der Geraden $A'\,B'\,C'$ in bezug auf das von den Inflexionstangenten a', b', c' gebildete Dreieck. Alle gesuchten Raumkurven dritten Grades projizieren sich also von S aus in die gleiche ebene Kurve dritten Grades, d. h. alle Raumkurven dritten Grades, bestimmt durch drei Punkte A, B, C mit den zugehörigen Schmiegungsebenen, deren Schnittpunkt in der Ebene $A\,B\,C$ liegt, befinden sich auf einer Kegelfläche dritten Grades, welche den Schnittpunkt S der drei Schmiegungsebenen als Spitze, die drei Schmiegungsebenen als Inflexionsebenen und die harmonische Polargerade der Ebene $A\,B\,C$ in bezug auf das Dreikant der Schmiegungsebenen als Doppelkante hat.
