Rationale Abzählung der Gitterpunkte.

Aus einem Briefwechsel zwischen

R. Fueter und G. Pólya.

(Als Manuskript eingegangen am 16. Juni 1923.)

Auf Ihren Wunsch schreibe ich gerne die Untersuchungen auf, die ich begonnen, und die Sie so schön beendet haben.

Bei der Lektüre von Caratheodory's Buch über reelle Funktionen warf ich die Frage auf, ob die auf S. 29 angegebene quadratische Funktion $f(x, y)$ die einzige sei, die folgende Eigenschaften besitze:

1) $f(0, 0) = 1$.
2) $f(x, y)$ hat für jedes ganze, rationale Wertepaar x, y, beide $\geqq 0$, einen positiven, ganzen rationalen Zahlwert.
3) Ist n eine beliebige ganze, rationale, positive Zahl, so gibt es ein und nur ein ganzes, rationales Wertepaar $x, y \geqq 0$, für das $f(x, y) = n$ ist.

Es ist sofort einzusehen, dass es keine lineare Funktion $f(x, y)$ von dieser Eigenschaft gibt.

Setzen wir:

$$f(x, y) \equiv Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + 1$$

so müssen wegen 2) und 3)

$$\begin{matrix} f(1,0)-1 = A+D, & f(2,0)-1 = 4A+2D, \\ f(0,1)-1 = C+E, & f(0,2)-1 = 4C+2E, \end{matrix} \quad f(1,1)-1 = A+B+C+D+E,$$

ganze, rationale positive Zahlen sein. Das ist nur möglich, wenn $2A$, B, $2C$, $2D$, $2E$ ganz und rational sind. Setzt man $A = \frac{1}{2} a$, $B = b$; $C = \frac{1}{2} c$, $D = \frac{1}{2} d$, $E = \frac{1}{2} e$, so sind a, b, c, d, e ganze rationale Zahlen, und ausserdem muss

$$\frac{1}{2}(a + d) \text{ und } \frac{1}{2}(c + e) \text{ ganz und rational sein.}$$

Die Funktion sieht jetzt so aus:

$$f(x, y) \equiv \frac{1}{2} a x^2 + b x y + \frac{1}{2} c y^2 + \frac{1}{2} d x + \frac{1}{2} e y + 1 .$$

a und c sind beide $\geqq 0$, da sonst $f(x, y)$ für grosse x oder y negativ würde.

1. Parabolischer Fall: $D = b^2 - a c = 0$.

Ist b kleiner als null, so ist sicherlich $a > 0$, $c > 0$, und man kann schreiben:

$$f(x, y) \equiv \frac{1}{2a} (a x + b y)^2 + \frac{1}{2} d x + \frac{1}{2} e y + 1$$

Wir greifen jetzt die unendlich vielen Wertepaare:

$$\begin{aligned} x &= -b t , \\ y &= a t \quad , \end{aligned} \qquad t = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

heraus. Alle x, y sind nach Annahme positiv, und es wird:

$$f(-b t, a t) = \frac{1}{2} (-b d + e a) t + 1$$

Der Koeffizient $m = \frac{1}{2} (-b d + e a)$ ist ganz und grösser als eins, da sonst alle Zahlen unter den $f(-bt, at)$ zu finden wären. $f(-b t, a t)$, $t = 1, 2, 3, \ldots$ stellt daher alle positiven Zahlen $\equiv 1$ (mod. m) dar. Anderseits ist aber auch $f(2m, 0)$ eine solche Zahl. Dieselbe ist auf zwei verschiedene Weisen dargestellt, was gegen Voraussetzung 3) ist.

Ist $b = 0$, so ist z. B. auch $c = 0$, also $\frac{1}{2} e$ ganz und $\neq 0$. Dann wird:

$$f(0, y) = \frac{1}{2} e y + 1$$

$$f(2e, 0) = \frac{1}{2} a 4 e^2 + \frac{1}{2} d 2 e + 1 ,$$

d. h. es kann wieder eine Zahl auf zwei verschiedene Weisen dargestellt werden, gegen 3).

Ist b grösser als null, so ist:

$$f(x + 1, y) \equiv f(x, y) + a x + b y + \frac{1}{2} (a + d) ,$$

$$f(x, y + 1) \equiv f(x, y) + b x + c y + \frac{1}{2} (c + e) ,$$

und speziell:

$$f(1\,,0) = 1 + \frac{1}{2}(a + d) = n_1\,,$$

$$f(0\,,1) = 1 + \frac{1}{2}(c + e) = n_2\,,$$

also sind $\frac{1}{2}(a+d)$ und $\frac{1}{2}(c+e)$ grösser als null, und $f\,(x\,,y)$ wächst mit x und y. $\frac{1}{2}(c+e)$ oder $\frac{1}{2}(a+d)$ muss somit eins sein, etwa $\frac{1}{2}(c+e) = 1$.

Wegen:

$$f(1\,,0) = 1 + \frac{1}{2}(a + d)\,,\ f(0\,,2) = 3 + c\,,$$

ist $\frac{1}{2}(a+d) = 2$, oder $c = 0$. Im zweiten Falle ist $e = 2$, d. h. $f(0\,,y)$ würde schon alle Zahlen ergeben. Also ist $\frac{1}{2}(a+d) = 2$ und: $f(1\,,1) = 4 + b$, $f(2\,,0) = 5 + a$, $f(0\,,2) = 3 + c$; d. h. es ist $c = 1$, $b = 1$, $a = 1$, $d = 3$, $e = 1$. Die Funktion $f(x\,,y)$ ist daher:

$$f(x\,,y) = \frac{1}{2}x^2 + xy + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}3x + \frac{1}{2}y + 1\,.$$

Hätte man $\frac{1}{2}(a+d) = 1$ gesetzt, so hätte man dieselbe Funktion, nur mit Vertauschung von x und y erhalten. Es sind dies die einzigen Lösungen im parabolischen Fall.

2. Hyperbolischer Fall: $D = b^2 - ac > 0$. Wir setzen:

$$\nu = -cd + eb\,,\quad \mu = bd - ae\,,\qquad \text{oder:}\qquad a\nu + b\mu = Dd\,,\quad b\nu + c\mu = De\,,$$

und führen die neuen Koordinaten ein

$$x_1 = \nu + 2Dx\,,\quad y_1 = \mu + 2Dy\,,\qquad \text{oder:}\qquad x = \frac{x_1 - \nu}{2D}\,,\quad y = \frac{y_1 - \mu}{2D}\,.$$

Dann wird:

$$f(x,y) \equiv \frac{1}{4D^2}\left(\frac{a}{2}x_1^2 + bx_1y_1 + \frac{c}{2}y_1^2\right) + \frac{1}{4D^2}\left(4D^2 - \frac{d}{2}D\nu - \frac{e}{2}D\mu\right)\,.$$

Durchläuft hier x, y alle Zahlenpaare $\geqq 0$, so durchläuft $f(x, y) - 1 = t$ alle Zahlen $t = 0, 1, 2, 3, \ldots$, und alle nur einmal. Es ist:

$$a x_1^2 + 2 b x_1 y_1 + c y_1^2 = 8 D^2 t + D (d \nu + e \mu)$$

Ist also s eine reelle Variable > 1, so konvergiert:

$$L(s) \equiv \sum_{x,y=0}^{\infty}{}' \frac{1}{(a x_1^2 + 2 b x_1 y_1 + c y_1^2)^s} = \sum_{t=0}^{\infty}{}' \frac{1}{(8 D^2 t + D [d \nu + e \mu])^s},$$

absolut und kann in eine konvergente Reihe nach $(s-1)$ entwickelt werden:

$$L(s) \equiv \sum_{x,y=0}^{\infty}{}' \frac{1}{(a x_1^2 + 2 b x_1 y_1 + c y_1^2)^s} = \frac{1}{8 D^2 (s-1)} + f(s), \quad (s > 1)$$

wo $f(s)$ für $s = 1$ regulär ist.

Ist D nicht Quadrat einer rationalen Zahl, und $b < 0$, so kann sofort aus der Theorie der quadratischen Formen gefolgert werden, dass die Reihe $L(s)$ links nicht konvergiert, also ein Widerspruch gefunden ist.

Ist $D = n^2$ $(n > 0)$ Quadrat einer rationalen Zahl n, so wird, falls $b < 0$ ist $(a > 0)$:

$$f(x, y) = \frac{1}{2a} [(a x + b y)^2 - n^2 y^2] + \frac{d}{2} x + \frac{e}{2} y + 1,$$

$$f[(n - b) t, a t] = 1 + m t, \text{ wo } m = \frac{d(n-b) + e a}{2}, \quad t = 1, 2, 3 \ldots$$

Wegen $b < 0$ ist $n - b \neq 0$. Man zeigt, wie im parabolischen Fall, dass $m > 1$, und $f(2m, 0)$ oder $f(0, 2m)$ zweimal darstellbar ist.

Ist $b > 0$, so ergeben sich, genau wie im Falle 1 nur die Funktionen jenes Falles.

Es gibt somit keine hyperbolischen quadratischen Funktionen mit den verlangten Eigenschaften.

3. Elliptischer Fall: $D = b^2 - ac < 0$.

Der Fall $b > 0$ erledigt sich genau wie unter 1).

Ist dagegen $b \leqq 0$, so führe man die obigen neuen Koordinaten ein:

$$L(s) \equiv \sum_{x,y=0}^{\infty}{}' \frac{1}{(a x_1^2 + 2 b x_1 y_1 + c y_1^2)^s} = \frac{1}{8 D^2 (s-1)} + f(s), \quad s > 1, \ f(1) \text{ regulär.}$$

Die Reihe $L(s)$ links konvergiert aber jetzt, und es kommt darauf an, dieselbe ebenfalls nach Potenzen von $(s-1)$ zu entwickeln. Das

Residuum wird jedenfalls die Zahl π oder e enthalten, was den Widerspruch ergibt, da das Residuum rechts eine rationale Zahl ist. Bei der grossen Erfahrung, die Sie in Auswertung solcher Grenzwerte haben, wird es Ihnen gewiss gelingen, den Beweis zu Ende zu führen.

Rud. Fueter.

* * *

Das Residuum der von Ihnen herangezogenen Reihen $L(s)$ hängt mit der Auswertung gewisser Flächeninhalte zusammen. Ihre Bemerkungen haben mich dazu angeregt, direkt die Flächeninhalte zu betrachten und auf diese Art konnte ich die Lösung Ihrer originellen und anregenden Fragestellung etwas fördern.

Eine Funktion $f(x,y)$, die den von Ihnen formulierten Bedingungen 2) und 3) genügt [die Bedingung 1) sei jetzt ausgeschaltet], bezeichne ich als eine abzählende Funktion. Es sei $f(x, y)$ eine abzählende rationale ganze Funktion vom Grade m; dann kann

$$(1) \qquad f(x,y) = \varphi_m(x,y) + \varphi_{m-1}(x,y) + \ldots + \varphi_0(x,y)$$

gesetzt werden, wobei $\varphi_\mu(x, y)$ eine rationale ganze homogene Funktion vom Grade μ bedeutet, $\mu = 0, 1, 2, \ldots m$. Da für grosse Werte von x, y $\varphi_m(x,y)$ das Vorzeichen von $f(x,y)$ bestimmt, erfordert die Bedingung 2), dass

$$(2) \qquad \varphi_m(x,y) \geqq 0 \qquad \text{für} \qquad x \geqq 0\,, \; y \geqq 0\,.$$

a) Definiter Fall; so nenne ich den Fall, in dem

$$(3) \qquad \varphi_m(x,y) > 0 \qquad \text{für} \qquad x \geqq 0\,, \; y \geqq 0\,, \; x+y > 0\,.$$

Es sei N eine ganze Zahl, $N > 1$. In demjenigen Teil der Ebene, wo die drei Ungleichungen

$$(4) \qquad f(x,y) \leqq N \quad , \quad x \geqq 0 \quad , \quad y \geqq 0$$

simultan stattfinden, liegen, nach Bedingungen 2) 3), genau N Gitterpunkte, d. h. Punkte, für welche x, y ganze Zahlen sind. Die erste der Ungleichungen (4) kann, wegen (1), so geschrieben werden:

$$(5) \; \varphi_m(xN^{-\frac{1}{m}}, yN^{-\frac{1}{m}}) + N^{-\frac{1}{m}}\varphi_{m-1}(xN^{-\frac{1}{m}}, yN^{-\frac{1}{m}}) + N^{-\frac{2}{m}}\varphi_{m-2}(xN^{-\frac{1}{m}}, yN^{-\frac{1}{m}}) + \ldots \leqq 1$$

Ich bezeichne mit F den Flächeninhalt des durch die Ungleichungen

$$(6) \qquad \varphi_m(x,y) \leqq 1 \quad , \quad x \geqq 0 \quad , \quad y \geqq 0$$

begrenzten Gebietes, und betrachte die Punkte $x N^{-\frac{1}{m}}$, $y N^{-\frac{1}{m}}$, wo x, y ganze Zahlen sind (sie bilden ein engmaschiges Gitter). Von den Punkten dieses engmaschigen Gitters liegen im Gebiet (6) angenähert $F N^{\frac{2}{m}}$ Punkte; man schliesst aus (3) und (5), dass die Anzahl der Punkte des Gitters von Maschenbreite 1 in dem Gebiet (4) asymptotisch $= F N^{\frac{2}{m}}$ für unendlich wachsendes N ist. Nun ist aber die genaue Anzahl, wie gesagt, $= N$. Aus

$$F N^{\frac{2}{m}} \sim N$$

folgt

$$m = 2 \,, \qquad F = 1 \,. \tag{7}$$

Man hat also nur die von Ihnen unterschiedenen drei Fälle, den elliptischen, den hyperbolischen und den parabolischen Fall zu diskutieren, in denen, wie Sie gezeigt haben,

$$\varphi_2(x, y) = \frac{1}{2}(a x^2 + 2 b x y + c y^2)$$

mit rationalen ganzen Koeffizienten a, b, c ist. Ich bezeichne mit t_1, t_2 die beiden Wurzeln der Gleichung

$$a + 2 b t + c t^2 = 0$$

($c > 0$). Im elliptischen Fall sind t_1, t_2 imaginär, im hyperbolischen beide < 0. Es ist

$$F = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\, d\varphi}{a \cos^2\varphi + 2 b \cos\varphi \sin\varphi + c \sin^2\varphi} = \frac{1}{c}\,\frac{1}{t_1 - t_2}\,\lg\frac{t_2}{t_1}$$

also

$$\frac{t_2}{t_1} = e^{c(t_1 - t_2) F} \,. \tag{8}$$

t_1 und t_2 sind algebraische Zahlen: wäre $F = 1$, so wäre nach (8) der Logarithmus einer algebraischen Zahl wieder algebraisch; dies widerspricht dem Satz von LINDEMANN und so muss $F \neq 1$ und kann $f(x, y)$ im elliptischen oder im definiten hyperbolischen Fall keine abzählende Funktion sein. Die Lösung liegt also tatsächlich in der Richtung, die Sie mit der Erwähnung von π und e andeuteten.

Im parabolischen Fall ist $2\varphi_2(x, y) = (\sqrt{a}\, x + \sqrt{c}\, y)^2$ und das Gebiet (6) ein rechtwinkliges Dreieck mit dem Flächeninhalt

$$F = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{a}}\sqrt{\frac{2}{b}} = \frac{1}{\sqrt{ac}}\,.$$

$F = 1$ ergibt wegen der Ganzzahligkeit $a = c = 1$; daher ist $b = \pm 1$ und, weil doch $\varphi_2(1, 1) \neq 0$ sein soll, $b = 1$. Eine abzählende Funktion hat also im parabolischen Fall jedenfalls die Gestalt

$$f(x, y) = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + hx + ky + l\,,$$

h, k, l Konstanten. Beachtet man die Formeln

$$f(x+1, y) - f(x,y) = x+y+1+h,\ f(x, y+1) - f(x,y) = x+y+1+k,$$

$$f(x+1, y-1) - f(x,y) = h-k,\ f(0, s+1) - f(x, s-x) = s+1+k-(h-k)x,$$

so gelangt man nach einer ähnlichen Diskussion, wie Sie sie durchgeführt haben, zu der Einsicht, dass die einzigen beiden abzählenden Funktionen vom parabolischen Typus die von Ihnen hervorgehobenen sind. Hierbei wurde allerdings die Einschränkung gemacht, dass für $x \geqq 0, y \geqq 0, x + y > 0$ der homogene Bestandteil höchsten Grades > 0 ist, nicht aber Ihre Einschränkung 1).

b) Der indefinite Fall, d. h. der Fall, in dem nicht (3), nur (2) vorausgesetzt wird, scheint für Funktionen vom Grade $\geqq 3$ nicht leicht zugänglich zu sein. Für Funktionen vom Grade 1 und 2 lässt sich die eben angewandte Methode (Abzählung der Gitterpunkte) leicht ergänzen, man braucht nur eine grobe Abschätzung von Summen, die mit ganzen Teilen gebildet sind. So gelangt man zu dem Resultat, dass ausser den beiden von Ihnen hervorgehobenen Funktionen keine andere rationale ganze abzählende Funktion unterhalb dem Grad 3 existiert.

G. Pólya.