Über Regelflächen zweiten Grades.

Von

A. KIEFER (Zürich).

(Als Manuskript eingegangen am 14. Oktober 1922.)

I.

Welches ist der Ort des Durchschnittspunktes derjenigen Erzeugenden eines Hyperboloids, welche sich rechtwinklig durchschneiden?

Diese Aufgabe findet sich in Artikel 186 der SALMON-FIEDLERschen Analytischen Geometrie des Raumes. Als Ort ist auf analytischem Wege die Raumkurve vierter Ordnung gefunden, in welcher das Hyperboloid von derjenigen Kugel geschnitten wird, von deren Punkten aus an das Hyperboloid drei paarweise zu einander rechtwinklige Tangentialebenen gehen. Eine geometrische und zum Teil analytische Lösung der Aufgabe enthält die Arbeit: Ein Beitrag zu den Regelflächen zweiten Grades. Von JULIUS POLLAK. Zeitschrift für das Realschulwesen (Wien, Alfr. Hölder), Jahrgang XXIII (1898), 142. Im folgenden soll eine andere Lösung und eine Verallgemeinerung gegeben werden.

Angenommen P sei ein gesuchter Punkt auf dem gegebenen Hyperboloid. Die parallelen Geraden durch den Mittelpunkt O der Fläche zu ihren Erzeugenden bilden den Asymptotenkegel K_a. Die Parallelebene zur Tangentialebene der Fläche in P muss aus dem Asymptotenkegel zwei Erzeugende herausschneiden, die aufeinander senkrecht stehen; die Parallelebene selber ist die Polarebene der Geraden OP in bezug auf den Asymptotenkegel. Sucht man also alle Ebenen, die aus dem Asymptotenkegel Paare rechtwinkliger Geraden herausschneiden, so schneiden die zu den Ebenen in bezug auf den Asymptotenkegel K_a zugehörigen Polargeraden das gegebene Hyperboloid in den gesuchten Punkten. Wählt man auf dem Asymptotenkegel eine beliebige Erzeugende g, so schneidet die senkrechte Ebene durch O zu g den Asymptotenkegel in zwei Geraden g', g'' und dann sind die Ebenen (g, g') und (g, g'') zwei Ebenen durch g, die aus dem Asymptotenkegel Paare rechtwinkliger Erzeugenden herausschneiden. Durch jede Erzeugende g des Kegels K_a gehen zwei solche

Ebenen und daher ist die Enveloppe aller dieser Ebenen eine Kegelfläche zweiter Klasse K; ihr Polarkegel in bezug auf den Asymptotenkegel durchdringt das gegebene Hyperboloid in einer Raumkurve vierter Ordnung, welche der gesuchte Ort ist. Die Kegelfläche K steht in einfachem Zusammenhang mit der Kegelfläche K_i durch O nach dem imaginären Kugelkreis im Unendlichen und mit dem Asymptotenkegel K_a des Hyperboloids. Die beiden letzten Kegelflächen K_i und K_a schneiden sich in vier Geraden; wählt man eine derselben als Gerade g, so geht die senkrechte Ebene durch O zu g durch g selber und berührt längs g die Kegelfläche K_i nach dem imaginären Kugelkreis. Die senkrechte Ebene schneidet daher den Asymptotenkegel K_a in g und in einer zweiten Geraden; die Verbindungsebenen jeder dieser zwei Geraden mit g sind die Tangentialebenen der beiden Kegel K_a und K_i längs g. Der Asymptotenkegel K_a und der Kegel K_i nach dem imaginären Kugelkreis schneiden sich in vier Erzeugenden; legt man längs jeder der vier Erzeugenden an die beiden Kegel K_a, K_i die zwei Tangentialebenen, so berühren die acht Tangentialebenen eine neue Kegelfläche, nämlich die Kegelfläche K. Nimmt man zu den Erzeugenden des Asymptotenkegels die senkrechten Ebenen durch O, so umhüllen sie den Normalkegel K_n des Asymptotenkegels K_a. Zu je zwei Erzeugenden des letztern, die zueinander rechtwinklig sind, gehören zwei Tangentialebenen von K_n, welche aufeinander senkrecht stehen. Die senkrechten Ebenen durch O zur jeweiligen Schnittlinie eines solchen rechtwinkligen Paares von Tangentialebenen umhüllen den Kegel K. Der Normalkegel K_n und der Kegel K_i haben vier gemeinsame Tangentialebenen und ihre acht Berührungserzeugenden müssen auf einer neuen Kegelfläche liegen, deren Normalkegelfläche die frühere Kegelfläche K ist. Nimmt man jetzt zu K den Polarkegel in bezug auf den Asymptotenkegel K_a, d. h. nimmt man zu jeder Tangentialebene von K die Polargerade in bezug auf K_a, oder zu jeder Tangente des unendlich fernen Kegelschnittes von K die konjugierte Gerade in bezug auf das Hyperboloid so entsteht ein Kegel K', der mit dem gegebenen Hyperboloid die Symmetrieebenen gemeinsam hat und dessen Durchdringung mit dem Hyperboloid den gesuchten Ort liefert. Er ist eine Raumkurve vierter Ordnung, welche zu den Symmetrieebenen des Hyperboloids symmetrisch liegt und durch die vier Schnittpunkte des unendlich fernen imaginären Kugelkreises mit dem Hyperboloid hindurchgeht; denn die Tangenten in diesen Punkten an den unendlich fernen Kegelschnitt des Hyperboloids berühren, wie schon gesehen, auch K und die Polargeraden der zugehörigen Tangentialebenen von K in bezug auf den

Asymptotenkegel K_a sind die Erzeugenden von K_a nach jenen Punkten des Kugelkreises. Auf jeder Erzeugenden des Hyperboloids liegen zwei Punkte des Ortes, nämlich die Schnittpunkte der Erzeugenden mit der Kegelfläche K'. In jedem dieser zwei Punkte wird die Erzeugende von einer andern Erzeugenden des Hyperboloids rechtwinklig geschnitten; die Verbindungslinien der unendlich fernen Punkte dieser zwei andern Erzeugenden umhüllen den Polarkegelschnitt des unendlich fernen Kegelschnittes von K_a in bezug auf den Kugelkreis. Dass eine Erzeugende des Hyperboloids von zwei andern Erzeugenden rechtwinklig geschnitten wird, folgt auch daraus, dass die Stellung der zur gewählten Erzeugenden senkrechten Ebene den unendlich fernen Kegelschnitt des Hyperboloids in zwei Punkten trifft und durch jeden dieser Punkte eine Erzeugende läuft, welche die gewählte schneidet. Liegt auf dem Hyperboloid eine Kurve n ter Ordnung, so enthält sie $2n$ Punkte des Ortes, nämlich die Schnittpunkte mit dem Kegel K'. Dieser Kegel und das Hyperboloid besitzen, wegen der schon angedeuteten Symmetrie, ein Poltetraeder, dessen Ecken O und die unendlich fernen Punkte der Axen des Hyperboloids sind; daher gehen durch die Ortskurve vierter Ordnung drei Zylinder zweiten Grades, deren Erzeugenden beziehungsweise zu den Axen des Hyperboloids parallel laufen. Legt man in einem Punkt der Ortskurve an das Hyperboloid die Tangentialebene, so ist sie, wie schon bemerkt, zu einer Tangentialebene des Kegels K parallel; daher bilden die Tangentialebenen des Hyperboloids, deren Berührungspunkte die Ortskurve erfüllen, die gemeinsam umschriebene developpable Fläche des Hyperboloids und des unendlich fernen Kegelschnittes von K. Dieser Kegelschnitt und die andern drei Doppelkegelschnitte der Developpablen stehen zum Hyperboloid in derselben Beziehung wie der imaginäre Kugelkreis und die Fokalkegelschnitte.

Ist P ein gesuchter Punkt auf dem Hyperboloid, so stehen seine zwei Erzeugenden l_1, l_2 durch P aufeinander senkrecht. Legt man durch jede von ihnen eine senkrechte Ebene zur Tangentialebene von P, so sind diese Ebenen aufeinander senkrecht und selber Tangentialebenen des Hyperboloids; die Berührungspunkte sind die Schnittpunkte von l_1, l_2 mit der konjugierten Geraden zur Hyperboloidnormalen in P. Man findet die konjugierte Gerade, indem man die Normale mit dem Hyperboloid zum zweitenmal schneidet, im Schnittpunkt die Tangentialebene legt und mit der Tangentialebene von P schneidet. In P schneiden sich also drei paarweise aufeinander senkrechtstehende Tangentialebenen des Hyperboloids. Bekanntlich ist der geometrische Ort aller Punkte, von denen an das Hyperboloid Tripel dreirechtwinkliger Tangentialebenen gehen, eine mit dem Hyperboloid konzentrische Kugel. Die Durchdringungskurve dieser Kugel mit dem Hyperboloid ist daher die gesuchte Ortskurve vierter Ordnung. Die Normalen des Hyperboloids längs den Punkten der Ortskurve schneiden die unendlich ferne Ebene in den Punkten eines Kegelschnittes, welcher der Polarkegelschnitt des unendlich fernen Kegelschnittes von K in bezug auf den Kugelkreis ist. Dass der Ort der Punkte im Raum, von denen aus an das Hyperboloid Tripel dreirechtwinkliger Tangentialebenen gehen, eine Kugel ist, kann folgendermassen gezeigt werden. Man nehme irgend eine Tangentialebene des Hyperboloids und alle darauf senkrechten Tangentialebenen; ihre Spuren mit der ersten Ebene umhüllen eine Hyperbel. Bekanntlich ist der Ort des Schnittpunktes rechtwinkliger Tangentenpaare einer Hyperbel ein mit ihr konzentrischer Kreis. Also schneidet jede Tangentialebene des Hyperboloids den Ort des Punktes, von dem dreirechtwinklige Tangentialebenen an dasselbe gehen, in einem Kreis; der Ort ist daher eine Kugel.

Setzt man an Stelle des Hyperboloids ein hyperbolisches Paraboloid, so tritt folgende Modifikation ein. Die Kugel, der Ort des Punktes, von dem Tripel dreirechtwinkliger Tangentialebenen an das Paraboloid gehen, wird bekanntlich zu einer Ebene. Wählt man nämlich eine Tangentialebene des Paraboloids und legt seine zu ihr senkrechten Tangentialebenen, so umhüllen ihre Spuren eine Parabel; von den Punkten ihrer Leitlinie gehen an die Parabel rechtwinklige Tangentenpaare. Das heisst, jede Tangentialebene des Paraboloids schneidet den Ort des Punktes mit dreirechtwinkligen Tangentialebenen an das Paraboloid in einer Geraden und daher ist der Ort eine Ebene. Diese Ebene schneidet das Paraboloid in einem Kegelschnitt; er ist der Ort des Punktes, in dem sich die durch ihn gehenden Erzeugenden des Paraboloids rechtwinklig schneiden. Auf jeder Erzeugenden liegt ein einziger derartiger Punkt, nämlich ihr Schnittpunkt mit dem Kegelschnitt, oder mit seiner Ebene. Das folgt auch daraus, dass die Stellung der zur Erzeugenden senkrechten Ebene die unendlich ferne Erzeugende, welche die gewählte nicht schneidet, in einem Punkte trifft, durch den eine Erzeugende geht, welche die gewählte schneidet. Liegt auf dem Paraboloid eine Kurve $n$ter Ordnung, so enthält sie n Punkte mit sich rechtwinklig schneidenden Erzeugenden, nämlich die Schnittpunkte der Kurve mit dem Ortskegelschnitt, beziehungsweise mit seiner Ebene. Man kann die Ergebnisse für das Paraboloid noch auf andere Weise finden. Der unendlich ferne Kegelschnitt des für das Hyperboloid gefundenen Kegels K, dessen Tangentialebenen aus dem Asymptotenkegel Paare rechtwinkliger Erzeugenden herausschneiden, existiert auch für das Paraboloid. Verschiebt man die Erzeugenden des Paraboloids parallel nach einem beliebigen Punkte im Endlichen, so entsteht ein Ebenenpaar durch den Punkt und man hat durch den Punkt Ebenen zu legen, die aus dem Ebenenpaar rechtwinklige Schnittlinien herausschneiden. Die Enveloppe dieser Ebenen ist eine Kegelfläche, deren unendlich ferner Kegelschnitt die unendlich fernen Erzeugenden des Paraboloids und die Tangenten des Kugelkreises in seinen Schnittpunkten mit jenen Erzeugenden zu Tangenten hat. Man kann den Kegelschnitt auch so finden, dass man auf den unendlich fernen Erzeugenden des Paraboloids einen Punkt laufen lässt, seine Polare in bezug auf den Kugelkreis mit den Erzeugenden schneidet und die Schnittpunkte mit dem gewählten Punkt verbindet; der Kegelschnitt berührt die zwei Erzeugenden in ihren Treffpunkten mit der Polaren ihres Schnittpunktes in bezug auf den Kugelkreis. Die konjugierten Geraden zu den Tangenten dieses Kegelschnittes in bezug auf das Paraboloid bilden einen zu seiner Axe parallelen Zylinder und schneiden das Paraboloid in den gesuchten Punkten mit sich rechtwinklig treffenden Erzeugenden. Der Zylinder entsteht folgendermassen. Bewegt man längs des Kegelschnittes eine Tangente, so schneidet sie die unendlich fernen Erzeugenden des Paraboloids in zwei projektivischen Punktreihen. Die Tangentialebenen des Paraboloids, die in entsprechenden Punkten der Reihen berühren, gehen durch die Erzeugenden und bilden zwei projektivische Ebenenbüschel, deren Erzeugnis der Zylinder ist. Da der Zylinder die beiden Erzeugenden enthält, so schneidet er das Paraboloid noch in einer Hyperbel, welche durch die Berührungspunkte des Kegelschnittes mit den unendlich fernen Erzeugenden hindurchgeht. Die Schnittpunkte der Zylindererzeugenden mit dem Paraboloid sind die Berührungspunkte der durch die Tangenten des Kegelschnittes gehenden Tangentialebenen an das Paraboloid. Diese Tangentialebenen bilden eine developpable Fläche vierter Klasse, von der sich die zwei Ebenenbüschel durch die unendlich fernen Erzeugenden des Paraboloids absondern; der Rest ist eine Kegelfläche zweiter Klasse, deren Berührungshyperbel der gesuchte Ort ist.

II.

Die im vorigen behandelte Aufgabe über Regelflächen zweiten Grades kann in folgender Weise erweitert werden. Gesucht auf einem Hyperboloid der Ort des Punktes, in welchem die durch ihn gehenden Erzeugenden einen Winkel von gegebener Grösse φ einschliessen.

Angenommen P sei ein gesuchter Punkt, so verschiebe man wieder seine Tangentialebene parallel nach dem Mittelpunkt O des Hyperboloids; diese Parallelebene ist die Polarebene von OP in bezug auf den Asymptotenkegel K_a, und schneidet aus dem letztern zwei Erzeugende heraus, die zu den Hyperboloiderzeugenden des Punktes P parallel sind und also den Winkel φ einschliessen. Sucht man alle möglichen Ebenen durch O, die aus dem Asymptotenkegel Winkel von der Grösse φ herausschneiden, so schneiden die Polargeraden dieser Ebenen das Hyperboloid in dem gesuchten Ort von Punkten. Ist g eine Erzeugende des Asymptotenkegels, so kann man mit ihr als Axe und O als Spitze einen geraden Kreiskegel mit dem Öffnungswinkel 2 φ legen; der Kegel schneidet den Asymptotenkegel in vier Erzeugenden. Die vier Ebenen durch g nach diesen Erzeugenden sind gesuchte Ebenen. Durch jede Erzeugende des Asymptotenkegels gehen nur vier solcher Ebenen; also ist ihre Enveloppe eine Kegelfläche vierter Klasse K_4. Ihre Polarkegelfläche K_4' in bezug auf den Asymptotenkegel ist von der vierten Ordnung und schneidet das Hyperboloid in dem gesuchten Ort, der also eine Raumkurve achter Ordnung ist. Der Kegel K_4 schneidet die unendlich ferne Ebene in einer Kurve vierter Klasse; die konjugierten Geraden zu ihren Tangenten bilden den Kegel K_4'. Die Kurve vierter Klasse und das Hyperboloid bestimmen eine gemeinsam umschriebene developpable Fläche achter Klasse, welche das Hyperboloid längs der gesuchten Kurve achter Ordnung berührt. Auf jeder Erzeugenden des Hyperboloids liegen vier gesuchte Punkte und eine Kurve $n$ter Ordnung des Hyperboloids enthält $4n$ Punkte, nämlich beziehungsweise die Schnittpunkte mit dem Kegel vierter Ordnung K_4'. Die Ortskurve achter Ordnung ist symmetrisch zu den Symmetrieebenen des Hyperboloids und besitzt daher drei doppelt projizierende Zylinder vierter Ordnung, deren Erzeugenden zu den Axen des Hyperboloids parallel laufen.

Ersetzt man das Hyperboloid durch ein Paraboloid, so kann man durch einen Punkt im Endlichen zu seinen Erzeugenden die Parallelen legen, wodurch ein Ebenenpaar ensteht. In jeder der zwei Ebenen kann man um den Punkt eine Gerade drehen und um sie als Axe und mit dem Punkt als Spite einen geraden Kreiskegel mit dem Öffnungswinkel 2 φ legen. Seine Schnittlinien mit der andern Ebene bestimmen mit der gewählten Geraden zwei Ebenen und diese Ebenen umhüllen eine Kegelfläche vierter Klasse mit den zwei Ebenen als Doppeltangentialebenen; denn jeder Geraden, der einen Ebene entsprechen zwei Geraden der andern Ebene und umgekehrt. Jede Tangentialebene der Kegelfläche vierter Klasse schneidet aus dem Ebenenpaar den Winkel φ heraus. Der Schnitt der Kegelfläche mit der unendlich fernen Ebene ist eine Kurve vierter Klasse, welche die unendlich fernen Erzeugenden des Paraboloids zu Doppeltangenten hat. Die konjugierten Geraden zu den Tangenten dieser Kurve in bezug auf das Paraboloid bilden einen zu seiner Axe parallelen Zylinder, dessen Schnitt mit dem Paraboloid der gesuchte Ort ist. Der Zylinder entsteht folgendermassen. Bewegt man längs der Kurve vierter Klasse eine Tangente, so erzeugt sie auf den zwei unendlich fernen Erzeugenden Punktreihen, die sich zwei-zwei deutig entsprechen. Die Tangentialebenen in entsprechenden Punkten an das Paraboloid bilden zwei Ebenenbüschel, deren Ebenen sich ebenfalls zwei-zwei deutig entsprechen. Ihr Erzeugnis ist der Zylinder, der also vierter Ordnung ist. Da er die unendlich fernen Erzeugenden des Paraboloids als Doppelgeraden enthält, so durchdringt er das Paraboloid noch in einer Raumkurve vierter Ordnung, welche der Ort des gesuchten Punktes ist, dessen Paraboloiderzeugenden sich unter dem Winkel φ schneiden. Die Schnittpunkte der Erzeugenden des Zylinders mit dem Paraboloid sind die Berührungspunkte des Paraboloids mit seinen durch die Tangenten der im Unendlichen gelegenen Kurve vierter Klasse hindurchgehenden Tangentialebenen. Die letztern bilden eine developpable Fläche achter Klasse. Da sich die Ebenenbüschel durch die unendlich fernen Erzeugenden des Paraboloids doppelt absondern, so bleibt eine developpable Fläche vierter Klasse, welche das Paraboloid längs der Ortskurve vierter Ordnung berührt. Auf jeder Erzeugenden des Paraboloids liegen vier und auf einer Kurve $n$ter Ordnung desselben $4\,n$ Punkte des Ortes, nämlich die bezüglichen Schnittpunkte mit dem Zylinder vierter Ordnung.

Bemerkung. Die Ausführungen des Abschnittes II lassen eine erweiterte Auffassung zu, indem man die Regelfläche zweiten Grades durch eine elliptische Fläche zweiten Grades ersetzen und auf der Fläche den Ort des Punktes suchen kann, für den die Indikatrix der Fläche einer gegebenen Ellipse ähnlich ist. Der Asymptotenkegel des Ellipsoids und der verwendete gerade Kreiskegel sind dann imaginär.