Erweiterungen des Abelschen Satzes für Potenzreihen und ihre Umkehrungen.

Von

A. KIENAST, Küsnacht (Zürich).

(Als Manuskript eingegangen am 12. Juli 1922).

I. Es sei $f(x) = \sum_1^\infty a_k x^k$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius 1. Dann kennt man Beziehungen zwischen

1° dem Grenzwert $\lim_{x \to 1} f(x)$, falls er existiert, und

2° dem Grenzwert $\lim_{n \to \infty} \sum_1^n a_k$ oder, falls dieser nicht existiert, dem HÖLDERschen, CESAROschen oder auf ähnliche Art[1]) gebildeten Grenzwerten.

Das Beispiel von Herrn RIESZ[2])

$$\sum_1^\infty k^{-1-ai} x^k$$

zeigt, dass die Funktion $f(x)$ zwischen endlichen Grenzen oszillieren kann, wenn x sich 1 nähert, während der Mittelwert

$$\lim_{n \to \infty} \sum_1^{n-1} \frac{1}{k+1} s_k \Big/ \sum_1^n \frac{1}{k}, \quad s_k = \sum_1^k a_\nu$$

existiert und endlich ist.

Ich habe daher die Frage in Betracht gezogen: Kann man aus den Reihenkoeffizienten a_k und numerischen Grössen arithmetische Ausdrücke bilden, die in Beziehung stehen zu Eigenschaften der Oszillationen der durch die Reihe dargestellten Funktion.

---

[1]) A. KIENAST, Extensions of Abel's theorem and its converses, Proc. Cambridge Phil. Soc. vol. XIX. 1918.

[2]) Vgl. G. H. HARDY, Slowly oscillating series, Proc. London Math. Soc. ser. 2, vol. 8 (1910) p. 310.

Wie kann man aber Eigenschaften der Oszillationen zum Ausdruck bringen? Hiezu können die bei oszillierenden Wertefolgen benutzten Mittelwerte als Wegweiser dienen. Man kann den Quotienten

$$1)\qquad \int_a^x f(t) \cdot g(t)\, dt \Big/ \int_a^x g(t)\, dt$$

ansehen als Mittelwert, gebildet aus den Grössen $f(t) = \sum_1^\infty a_k t^k$, denen man die Gewichte $g(t)\, dt$ zuschreibt. Es ist selbstverständlich, dass die Definitionsgebiete der beiden Funktionen $f(t)$, $g(t)$ und das Intervall $a \leqq t \leqq x$ passenden Beschränkungen unterliegen.

Für den vorliegenden Zweck ist $f(x)$ definiert für $|x| < 1$ und oszilliert für $x \to 1$. Unter Verwendung von Funktionen der logarithmisch-exponentiellen Skala erhält man als die einfachsten 1) entsprechenden Ausdrücke die folgenden, die leicht vermehrt werden können:

$$\lim_{x \to 1} e^{-\frac{1}{1-x}} \int_0^x f(t)\, e^{(1-t)^{-1}} (1-t)^{-2}\, dt$$

$$2)\qquad \lim_{x \to 1} \left[\frac{1}{1-x}\right]^{-1} \int_0^x f(t)\,(1-t)^{-2}\, dt = \lim_{x \to 1} M_1^{(1)}(x)$$

$$3)\qquad \lim_{x \to 1} \left[\lg \frac{1}{1-x}\right]^{-1} \int_0^x f(t)\,(1-t)^{-1}\, dt = \lim_{x \to 1} M_2^{(1)}(x)$$

$$4)\qquad \lim_{x \to 1} \left[\lg \lg \frac{1}{1-x}\right]^{-1} \int_{1-e^{-1}}^x f(t) \left[(1-t) \lg \frac{1}{1-t}\right]^{-1} dt = \lim_{x \to 1} M_3^{(1)}(x)$$

II. Bei der Annäherung an 1 kann x verschiedenen Wegen folgen; in diesem Aufsatze wird gewöhnlich vorausgesetzt, dass diese innerhalb des Gebietes $D = D(\psi_o)$ liegen, das von STOLZ[1]) eingeführt wurde, und definiert ist durch

$$\varrho < 2 \cos \psi \quad , \quad (\,|\psi| \leqq \psi_o < \frac{1}{2}\pi)$$

wenn gesetzt wird: $\qquad 1 - x = \varrho\, e^{i\psi}$.

In den nachfolgenden Beweisen wird Bezug genommen auf zwei Sätze:

---

[1]) Vgl. PRINGSHEIM, Acta Mathematica, Bd. 28, S. 3.

Satz von STOLZ[1]: Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_1^n a_k = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = l$ existiert und endlich ist und wenn b_k positive Zahlen sind, wobei

$$\lim_{n\to\infty} \sum_1^n b_k = \lim_{n\to\infty} t_n = \infty \quad , \text{ dann folgt}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{t_n} \sum_1^n b_k\, s_k = \lim_{n\to\infty} s_n = l \quad .$$

Satz von PRINGSHEIM[2]: Es werde vorausgesetzt, dass

(i) die Zahlen b_k positiv und $\sum b_k$ divergent seien;

(ii) für jedes x innerhalb D $\sum b_k |x|^k \Big/ |\sum b_k x^k| < G$, wo G eine endliche Konstante ist;

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_1^n a_k \Big/ \sum\limits_1^n b_k = l$;

dann folgt

$$\lim_{x\to 1} \sum a_k\, x^k \Big/ \sum b_k\, x^k = l \quad ,$$

wenn x sich der Stelle 1 auf einem beliebigen Wege innerhalb D nähert.

III. Der folgende Satz zeigt, dass die Integralmittelwerte für oszillierende Funktionen die natürliche Erweiterung darstellen von $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ für eine nicht oszillierende Funktion.

Satz 1. Wenn $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = l$ existiert und endlich ist, dann existieren alle Integralmittelwerte 2) 3) 4) und besitzen den Wert l.

Der Beweis wird geführt für den Mittelwert 2).

Voraussetzung ist, dass $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = l$, falls x nach der Stelle 1 wandert längs eines beliebigen Weges, der innerhalb eines Teilgebietes $\psi_1 \leqq \psi \leqq \psi_2$ des STOLZschen Gebietes D liegt. Dann kann man immer zu jedem beliebig klein gewählten ε ein r so bestimmen, dass

$$|f(x) - l| < \varepsilon \quad ,$$

5) $$\text{sobald } \varrho < r \quad \text{und} \quad \psi_1 < \psi < \psi_2 \quad .$$

[1]) Math. Ann. Bd. 14, S. 232.

[2]) Acta Mathematica, Bd. 28, S. 7.

Nun sei x_1 ein beliebiger fester und x ein veränderlicher Wert im Gebiet 5); dann ist

$$J(x) = \int_0^x f(t)\,(1-t)^{-2}\,dt = \int_0^{x_1} f(t)\,(1-t)^{-2}\,dt + \int_{x_1}^x f(t)\,(1-t)^{-2}\,dt$$

Da das erste dieser Integrale von x unabhängig ist, folgt

$$\lim_{x\to 1} M_1^{(1)}(x) = \lim_{x\to 1}\left\{(1-x)\int_{x_1}^x l(1-t)^{-2}\,dt + (1-x)\int_{x_1}^x [f(t)-l]\,(1-t)^{-2}dt\right\}$$

Für das zweite dieser Integrale ergibt sich

$$\left|(1-x)\int_{x_1}^x [f(t)-l]\,(1-t)^{-2}\,dt\right| < |1-x|\,\varepsilon\int_{x_1}^x |1-t|^{-2}\,|dt|$$

Der Wert des Integrals, der hier abzuschätzen ist, bleibt unverändert, wenn der Integrationsweg zwischen x_1 und x abgeändert wird, solange er den Einheitskreis nicht verlässt. Daher sei das Integral genommen über die gerade Strecke $x_1 \ldots x$. Es sei t ein beliebiger Punkt dieser Strecke, c der Abstand der Geraden $x_1 \ldots x$ vom Punkt 1, und $1-t = \sigma e^{i\varphi}$; ferner bezeichne α den Winkel, durch welchen man die positive Hälfte der reellen Axe drehen muss, bis sie mit der Geraden von x_1 nach x zusammenfällt; die Winkel φ und α seien positiv gezählt entgegengesetzt dem Sinne des Uhrzeigers. Dann ist:

$$|dt| = \frac{\sigma\,d\varphi}{\sin(\varphi-\alpha)}$$

$$\sigma\sin(\varphi-\alpha) = c$$

$$|1-x| = \frac{c}{\sin(\varphi_2-\alpha)}$$

wenn der Winkel φ_1 zu $t = x_1$ und φ_2 zu $t = x$ gehört. So wird

$$|1-x|\int_{x_1}^x |1-t|^{-2}\,|dt| = \frac{c}{\sin(\varphi_2-\alpha)}\int_{x_1}^x \frac{d\varphi}{\sigma\sin(\varphi-\alpha)} = \frac{\varphi_2-\varphi_1}{\sin(\varphi_2-\alpha)}$$

Aus dem Dreieck gebildet durch die Punkte 1, x, x_1 ergibt sich

$$|1-x_1|\sin(\varphi_2-\varphi_1) = |x-x_1|\sin(\varphi_2-\alpha)$$

sodass endlich

$$\frac{\varphi_2-\varphi_1}{\sin(\varphi_2-\alpha)} = \frac{|x-x_1|}{|1-x_1|}\cdot\frac{\varphi_2-\varphi_1}{\sin(\varphi_2-\varphi_1)}$$

und, da $\varphi_2-\varphi_1 < 2\psi_0 < \pi$, ist ersichtlich, dass dieser Quotient kleiner bleibt als eine endliche Konstante K, wenn sich x der Stelle 1 nähert. Also kann der Wert des Integrals

$$\left| (1-x) \int_{x_1}^{x} [f(t)-l]\,(1-t)^{-2}\,dt \right| < K \cdot \varepsilon$$

so klein gemacht werden, als man will. Dadurch folgt

$$\lim_{x\to 1} M_1^{(1)}(x) = \lim_{x\to 1} (1-x) \int_{x_1}^{x} l\,(1-t)^{-2}\,dt = \lim_{x\to 1} (1-x)\, l \left[\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x_1}\right] = l$$

Auf ähnliche Weise lässt sich der Beweis für 3) und 4) durchführen.

IV.

Satz 2. Wenn $\lim\limits_{x\to 1} e^{-\frac{1}{1-x}} \int_0^x f(t)\, e^{(1-t)^{-1}}\,(1-t)^{-2}\,dt = l$ existiert und endlich ist, dann existiert auch $\lim\limits_{x\to 1} (1-x) \int_0^x f(t)\,(1-t)^{-2}\,dt$ und besitzt den Wert l.

Satz 3. Wenn $\lim\limits_{x\to 1} (1-x) \int_0^x f(t)\,(1-t)^{-2}\,dt = l$ existiert und endlich ist, dann existiert auch

$\lim\limits_{x\to 1} \left[\lg \frac{1}{1-x}\right]^{-1} \int_0^x f(t)\,(1-t)^{-1}\,dt$ und besitzt den Wert l.

Satz 4. Wenn $\lim\limits_{x\to 1} \left[\lg \frac{1}{1-x}\right]^{-1} \int_0^x f(t)\,(1-t)^{-1}\,dt = l$ existiert und endlich ist, dann existiert auch

$\lim\limits_{x\to 1} \left[\lg\lg \frac{1}{1-x}\right]^{-1} \int_{1-e^{-1}}^{x} f(t) \left[(1-t)\lg\frac{1}{1-t}\right]^{-1} dt$ und besitzt den Wert l.

Die Umkehrungen dieser Sätze sind nicht richtig.

Die Beweise sind auf gleiche Art zu führen. Hier folgt derjenige für Satz 3. Partielle Integration ergibt:

$$\int_0^x f(t)\,(1-t)^{-1}\,dt = \left|(1-\zeta)\int_0^\zeta f(t)\,(1-t)^{-2}\,dt\right|_0^x + \int_0^x d\zeta \int_0^\zeta f(t)\,(1-t)^{-2}\,dt$$

Nun bezeichne man

$$(1-x)\int_0^x f(t)\,(1-t)^{-2}\,dt = K(x)$$

dann ist die Voraussetzung ausgedrückt durch $\lim_{x \to 1} K(x) = l$; somit ist

$$\lim_{x \to 1}\left[\lg\frac{1}{1-x}\right]^{-1}\int_0^x f(t)\,(1-t)^{-1}\,dt = \lim_{x \to 1}\left[\lg\frac{1}{1-x}\right]^{-1}\int_0^x K(\zeta)\,(1-\zeta)^{-1}\,d\zeta$$

Hier kann auf der rechten Seite Satz 1 angewendet werden und es ergibt sich die Behauptung von Satz 3.

V. Man kann die Integralmittelwerte 2) 3) 4) in Verbindung setzen mit folgenden Mittelwerten:

Aus den Koeffizienten der Potenzreihe $f(x) = \sum_1^\infty a_k x^k$, mit Konvergenzradius 1, bilde man $\sum_1^n a_k = s_n$.

Es seien b_k $(k = 1, 2, \ldots)$ die Glieder einer unendlichen Folge von positiven reellen Zahlen und

$$\sum_1^n b_k = t_n \quad ; \quad \lim_{n \to \infty} t_n = \infty$$

Dann werden die Mittelwerte [1]) definiert:

$$6) \quad \left\{\begin{array}{ll} s_n^{(1)} = \dfrac{1}{t_n}\sum_1^{n-1} b_{\lambda+1}\, s_\lambda & n = 2, 3, \ldots \\ s_n^{(2)} = \dfrac{1}{t_n}\sum_2^{n-1} b_{\lambda+1}\, s_\lambda^{(1)} & n = 3, 4, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \end{array}\right.$$

Zu jeder Folge b_k gehört eine Reihe von Mittelwerten $s_n^{(\lambda)}$. Im folgenden kommen zur Verwendung $b_k \equiv 1$; dann nennt man die Mittel arithmetische ; $b_k = \dfrac{1}{k}$; diese Mittel werden logarithmische genannt. Ferner werden noch die Ausdrücke gebraucht:

[1]) A. Kienast, Proc. Cambridge Phil. Soc. vol. XIX (1918); vol. XX (1920).

$$
7)\quad \begin{cases}
r_n^{(1)} = \sum_1^n t_k\, a_k & n = 1, 2, 3, \ldots \\
r_n^{(2)} = \sum_1^{n-1} \frac{b_{k+1}}{t_k}\, r_k^{(1)} & n = 2, 3, \ldots \\
r_n^{(3)} = \sum_2^{n-1} \frac{b_{k+1}}{t_k}\, r_k^{(2)} & n = 3, 4, \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots &
\end{cases}
$$

Die Beweisführungen stützen sich auf einige Identitäten, die leicht zu verifizieren sind.

$$
8)\quad \begin{cases}
s_n^{(1)} = s_n - \frac{r_n^{(1)}}{t_n} \\
s_n^{(2)} = s_n^{(1)} - \frac{r_n^{(2)}}{t_n} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{cases}
$$

woraus

$$
9)\quad \begin{cases}
\sum_1^\infty s_{n+1}^{(1)}\, x^{n+1} = \sum_1^\infty s_n\, x^n - \sum_1^\infty \frac{r_n^{(1)}}{t_n}\, x^n \\
\sum_1^\infty s_{n+2}^{(2)}\, x^{n+1} = \sum_1^\infty s_{n+1}^{(1)}\, x^{n+1} - \sum_1^\infty \frac{r_{n+1}^{(2)}}{t_{n+1}}\, x^{n+1} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{cases}
$$

Ferner

$$
10)\quad s_n^{(k)} - s_{n-1}^{(k)} = \frac{b_n}{t_n}\, \frac{r_{n-1}^{(k)}}{t_{n-1}}
$$

$$
11)\quad \sum_{\lambda=k}^{n-1} \left[s_{\lambda+1}^{(k)} - s_\lambda^{(k)} \right] = s_n^{(k)} = \sum_k^{n-1} \frac{b_{\lambda+1}}{t_{\lambda+1}}\, \frac{r_\lambda^{(k)}}{t_\lambda}
$$

Endlich lassen sich aus dem Integralmittelwert 2) durch Iteration folgende Mittelwerte bilden:

$$
M_1^{(2)}(x) = \left[\frac{1}{1-x}\right]^{-1} \int_0^x M_1^{(1)}(t)\,(1-t)^{-2}\,dt
$$

$$
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
$$

$$
M_1^{(k)}(x) = \left[\frac{1}{1-x}\right]^{-1} \int_0^x M_1^{(k-1)}(t)\,(1-t)^{-2}\,dt
$$

VI. Jetzt sei speziell $b_k \equiv 1$. Dann besteht

Satz 5. Von den beiden Bedingungen

$$\lim_{x \to 1} M_1^{(\lambda)}(x) = l \text{ (endlich)}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} r_n^{(\lambda+1)} = 0$$

ist jede notwendig für die Existenz von

$$\lim_{n \to \infty} s_n^{(\lambda)} = l$$

und zusammengenommen sind sie auch hinreichend.

Beweis: Wenn $\lim\limits_{n \to \infty} s_n^{(\lambda)} = l$ existiert und endlich ist, dann folgt mittelst des Satzes von Stolz $\lim\limits_{n \to \infty} s_n^{(\lambda+1)} = l$ und eine der Gleichungen 8) ergibt $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} r_n^{(\lambda+1)} = 0$.

Somit ist die zweite Bedingung notwendig.

Aus $$f(x) = \sum_1^{\infty} a_k x^k$$ folgt

$$(1-x)^{-1} f(x) = \sum_1^{\infty} s_k x^k$$

$$(1-x)^{-2} f(x) = \sum_1^{\infty} (k+1) s_{k+1}^{(1)} x^k$$

$$M_1^{(1)}(x) = (1-x) \int_0^x (1-t)^{-2} f(t)\, dt = \sum_2^{\infty} \left[s_k^{(1)} - s_{k-1}^{(1)} \right] x^k$$

$$M_1^{(2)}(x) = (1-x) \int_0^x (1-t)^{-2} M_1^{(1)}(t)\, dt = (1-x) \sum_3^{\infty} s_k^{(2} x^k$$

. . . .

12) $$M_1^{(\lambda)}(x) = (1-x) \int_0^x (1-t)^{-2} M_1^{(\lambda-1)}(t)\, dt = \sum_{\lambda+1}^{\infty} \left[s_k^{(\lambda)} - s_{k-1}^{(\lambda)} \right] x^k$$

somit wegen 10)

13) $$M_1^{(\lambda)}(x) = \sum_{\lambda+1}^{\infty} \frac{1}{k\,(k-1)} r_{k-1}^{(\lambda)} x^k .$$

Wenn nun $\lim\limits_{n \to \infty} s_n^{(\lambda)} = l$ existiert und endlich ist, dann ergibt der Abelsche Satz für Potenzreihen, angewendet auf 12)

$$\lim_{x \to 1} M_1^{(\lambda)}(x) = l \; ;$$

somit ist die erste Bedingung ebenfalls notwendig.

Zum Beweise der letzten Behauptung des Satzes bemerke man, dass die beiden Voraussetzungen

$$14) \qquad \lim_{x \to 1} M_1^{(\lambda)}(x) = l$$

$$15) \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} r_n^{(\lambda+1)} = 0$$

diejenigen sind des Satzes von TAUBER [1]) mit Bezug auf die Reihe 13).

Deshalb folgt aus 14) und 15)

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{\lambda+1}^{n} \frac{1}{k(k-1)} r_{k-1}^{(\lambda)} = l \; ;$$

11) ergibt schliesslich

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{\lambda+1}^{n} \frac{1}{k(k-1)} r_{k-1}^{(\lambda)} = \lim_{n \to \infty} s_n^{(\lambda)} = l \; ,$$

womit Satz 5 vollständig bewiesen ist.

Satz 6. Von den beiden Bedingungen

$$\lim_{x \to 1} M_1^{(1)}(x) = l \qquad \text{(endlich)}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} r_n^{(1)} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} k\, a_k = 0$$

ist jede notwendig für die Existenz von

$$\lim_{n \to \infty} s_n = l$$

und zusammengenommen sind sie hinreichend.

Beweis: Wenn $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = l$ existiert und endlich ist, so folgt daraus $\lim\limits_{n \to \infty} s_n^{(1)} = l$ und somit aus der ersten der Formeln 8) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} r_n^{(1)} = 0$ und aus 12), für $\lambda = 1$, $\lim\limits_{x \to 1} M_1^{(1)}(x) = l$. Die Bedingungen sind daher notwendig.

Wenn $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} r_n^{(1)} = 0$ existiert, so ergibt die zweite der Formeln 7) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} r_n^{(2)} = 0$. Letzterer Grenzwert zusammen mit $\lim\limits_{x \to 1} M_1^{(1)}(x) = l$ zieht nun, wegen Satz 5, $\lim\limits_{n \to \infty} s_n^{(1)} = l$ nach sich und endlich ergibt die erste der Formeln 8)

$$\lim_{n \to \infty} s_n = l \; .$$

w. z. b. w.

[1]) Vgl. E. LANDAU, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, S. 52. Der Satz gilt nicht nur bei radialer Annäherung an 1, sondern im ganzen Gebiet D von STOLZ.

Die Integralmittelwerte $M_1^{(\lambda)}(x)$ $(\lambda = 1, 2, \ldots)$ sind durch die Sätze 5 und 6 in Verbindung gebracht mit dem arithmetischen Mittel $\lim\limits_{n \to \infty} s_n^{(\lambda)} = l$. Wenn aber dieses existiert und endlich ist, dann ist $\lim\limits_{x \to 1} \sum\limits_1^\infty a_k x^k = l$ [1]) und $f(x)$ oszilliert somit nicht. Es scheint aber nicht ohne Interesse, zu bemerken, dass es Funktionen $f(x)$ gibt, für die $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ nicht vorhanden ist, während $\lim\limits_{x \to 1} M_1^{(1)}(x)$ existiert und endlich ist. Ein derartiges Beispiel ist

$$f(x) = e^{\frac{\alpha i}{1-x}} \qquad (\alpha \text{ reell}) .$$

Es ist $\lim\limits_{x \to 1} M_1^{(1)}(x) = \lim\limits_{x \to 1} (1-x) \int\limits_0^x e^{\frac{\alpha i}{1-x}} (1-x)^{-2}\, dx = 0$, wenn $\arg(1-x) \geqq 0$. Daraus ist zu schliessen, dass für diese Funktion keines der arithmetischen Mittel $\lim\limits_{n \to \infty} s_n^{(\lambda)}$, $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} r_n^{(\lambda)}$ existiert.

VII. Ich betrachte jetzt den Integralmittelwert 3) und setze ihn in Verbindung mit dem logarithmischen Mittel $s_n^{(1)}$. Infolgedessen ist in diesem Abschnitt $b_k = \frac{1}{k}$, $t_n = \lg n + \alpha_n$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n =$ EULERsche Konstante. Man kann diesen Mittelwert $M_2^{(1)}(x)$ ebenso iterieren, wie das mit $M_1^{(1)}(x)$ geschehen ist, allein der Faktor $\left[\lg \frac{1}{1-x}\right]^{-1}$ scheint die Entwicklung von Formeln analog zu 12) und 13) zu verhindern.

Satz 7. Von den beiden Bedingungen

$$\lim_{x \to 1} M_2^{(1)}(x) = l \qquad (\text{endlich})$$

16) $$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{t_n} r_n^{(2)} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\lg n} \sum_1^{n-1} \frac{1}{k+1} \frac{r_k^{(1)}}{\lg k + \alpha_k} = 0$$

ist jede notwendig für die Existenz von

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\lg n} \sum_1^{n-1} \frac{s_\lambda}{\lambda+1} = \lim_{n \to \infty} s_n^{(1)} = l$$

und zusammengenommen sind sie hinreichend.

[1]) Siehe A. KIENAST, Proc. Cambridge Phil. Soc. vol. XIX (1918), Theorem 3, p. 130.

Beweis: Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} s_n^{(1)} = l$ existiert und endlich ist, dann folgt aus dem Satz von Stolz $\lim\limits_{n\to\infty} s_n^{(2)} = l$ und somit aus 8) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{r_n^{(2)}}{t_n} = 0$.

Durch Entwicklung von 3) ergibt sich

$$M_2^{(1)}(x) = \sum_2^\infty \frac{1}{k} s_{k-1} x^k \Big/ \sum_1^\infty \frac{1}{k} x^k$$

woraus durch die Sätze von Pringsheim und Stolz folgt

$$\lim_{x\to 1} M_2^{(1)}(x) = \lim_{n\to\infty} s_n^{(1)} = l \,,$$

falls x auf irgend einem Wege innerhalb D sich 1 nähert.

Somit sind die beiden Bedingungen notwendig.

Um zur Umkehrung zu gelangen, folgert man aus 9)

$$\sum_1^\infty s_n x^n = \sum_1^\infty \frac{r_n^{(1)}}{t_n} x^n + \sum_2^\infty \frac{r_n^{(2)}}{t_n} x^n + \sum_3^\infty s_n^{(2)} x^n$$

womit

$$M_2^{(1)}(x) = \left[\lg \frac{1}{1-x}\right]^{-1} \left\{ \sum_1^\infty \frac{1}{n+1} \frac{r_n^{(1)}}{t_n} x^{n+1} + \sum_2^\infty \frac{1}{n+1} \frac{r_n^{(2)}}{t_n} x^{n+1} + \int_0^x \left[\sum_3^\infty s_n^{(2)} t^n \right] dt \right\}$$

Wegen 16) ergibt der Satz von Pringsheim

$$\lim_{x\to 1} M_2^{(1)}(x) = \lim_{x\to 1} \left[\lg \frac{1}{1-x}\right]^{-1} \int_0^x \left[\sum_3^\infty s_n^{(2)} t^n \right] dt = l \,.$$

Indem man für $\lg \frac{1}{1-x} = N$ die Reihe setzt, erhält man hieraus

$$\frac{Z}{N} = \sum_0^\infty \frac{1}{k+1} \left[s_k^{(2)} - l\right] x^{k+1} \Big/ \sum_0^\infty \frac{1}{k+1} x^{k+1} = g(x), \quad \lim_{x\to 1} g(x) = 0 \,.$$

Bezeichnet man

$$\sum_0^m \frac{1}{k+1} \left[s_k^{(2)} - l\right] - \sum_0^\infty \frac{1}{k+1} \left[s_k^{(2)} - l\right] x^{k+1} = K_m(x)$$

so ist

$$Z + K_m(x) = \sum_0^m \frac{1}{k+1} \left[s_k^{(2)} - l\right] = K_m(x) + g(x) \cdot \lg \frac{1}{1-x}$$

also
$$s_{m+1}^{(3)} - l = \frac{K_m(x)}{\sum\limits_0^m \frac{1}{k+1}} + g(x) \frac{\lg \frac{1}{1-x}}{\sum\limits_0^m \frac{1}{k+1}} = L_m(x)$$

Dies ist eine Identität für jede ganze positive Zahl m und für jedes x, dessen $|x| < 1$. Man lasse x sich 1 nähern innerhalb D und betrachte x in denjenigen Punkten x_m seines Weges, für die $|x_m| = 1 - \frac{1}{m+1}$. Dann kann man zeigen

17) $$\lim_{m \to \infty} L_m(x_m) = 0 \; .$$

Das Verhalten von $L_m(x)$ bei Annäherung von x an 1 ist abhängig von demjenigen von $g(x)$ und $K_m(x)$; letztere sind unabhängig von dem Wege, den x innerhalb D befolgt; daher ist auch 17) unabhängig von diesem Wege.

Zum Beweise von 17) sind einige Ungleichungen nötig. Setzt man

$$1-x = |1-x| \, e^{i\psi}$$

so folgt

$$\left|\lg\frac{1}{1-x}\right| = \lg\frac{1}{|1-x|}\left\{1+\psi^2 \Big/ \left(\lg\frac{1}{|1-x|}\right)^2\right\}^{1/2} = \delta \lg\frac{1}{|1-x|}, \quad \lim_{x \to 1} \delta = 1 \, .$$

Die Punkte x und $|x|$ liegen auf einem zum Konvergenzkreis konzentrischen Kreise. $|x|$ hat unter allen Punkten dieses Kreises den kleinsten Abstand von 1. Daher

$$|1-x| > 1 - |x|$$

also
$$\lg\frac{1}{|1-x|} < \lg\frac{1}{1-|x|}$$

$$\left|\lg\frac{1}{1-x}\right| < \delta \lg\frac{1}{1-|x|}$$

und somit

18) $$\left|\lg\frac{1}{1-x_m} \Big/ \sum_{o}^{m} \frac{1}{k+1}\right| < \delta \lg m \Big/ \sum_{o}^{m} \frac{1}{k+1} < K_1 \; ,$$

wo K_1 eine endliche von m unabhängige Konstante ist.

Zweitens liefert die Identität 11)

$$d_k = \frac{1}{k+1}\left[s_k^{(2)} - l\right] = \frac{1}{k+1}\left\{\sum_{2}^{k-1} \frac{b_{\lambda+1}}{t_{\lambda+1}} \frac{r_\lambda^{(2)}}{t_\lambda} - l\right\}$$

also

$$(k+1)\,|d_k| \leqq \sum_{o}^{k-1} \frac{b_{\lambda+1}}{t_{\lambda+1}} \left| \sum_{2}^{k-1} \frac{b_{\lambda+1}}{t_{\lambda+1}} \frac{r_\lambda^{(2)}}{t_\lambda} \Big/ \sum_{o}^{k-1} \frac{b_{\lambda+1}}{t_{\lambda+1}} \right| + l$$

Aus der Voraussetzung 16) und dem Satz von STOLZ folgt nun, dass die Grössen $\left| \sum_{2}^{k-1} \frac{b_{\lambda+1}}{t_{\lambda+1}} \frac{r_{\lambda}^{(2)}}{t_{\lambda}} \Big/ \sum_{o}^{k-1} \frac{b_{\lambda+1}}{t_{\lambda+1}} \right|$ eine endliche von k unabhängige obere Schranke besitzen; man kann daher eine endliche von k unabhängige Grösse K_2 angeben, sodass

$$(k+1)\,|\,d_k\,| < K_2 \sum_{o}^{k-1} \frac{b_{\lambda+1}}{t_{\lambda+1}} = K_2 \left[\lg\lg k + \mathfrak{C} + \vartheta_k\right] \quad \text{für } k \geqq 3$$

$$(k+1)\,|\,d_k\,| < K_2 \qquad \text{für } k \leqq 2\ ,$$

worin $\mathfrak{C}$ eine endliche von k unabhängige Konstante, und $\lim\limits_{k\to\infty} \vartheta_k = 0$ ist. Ist k genügend gross, so kann man setzen

$$|\,d_k\,| < K_3\,(k+1)^{-1} \lg\lg k$$

Mit Hilfe dieser Abschätzung bekommt man

$$|\,K_m\,(x_m)\,| < \left| \sum_{o}^{m} d_k\,(1-x_m^{k+1}) - \sum_{m+1}^{\infty} d_k\,x_m^{k+1} \right|$$

$$< |\,1-x_m\,| \sum_{o}^{m} |\,d_k\,| \frac{|\,1-x_m^{k+1}\,|}{|\,1-x_m\,|} + K_3 \sum_{m+1}^{\infty} \frac{\lg\lg k}{k+1}\,|\,x_m\,|^{k+1}$$

Für $k > 0$ ist im Einheitskreis $|\,1-x^{k+1}\,| \leq (k+1)\,|\,1-x\,|$; ferner ist für jedes x_m innerhalb D $\dfrac{|\,1-x_m\,|}{1-|\,x_m\,|} < \gamma$ [1]), somit

$$< \frac{\gamma}{m+1} \sum_{o}^{m} (k+1)\,|\,d_k\,| + K_3 \frac{\lg\lg\,(m+1)}{m+2} \frac{|\,x_m\,|^{m+2}}{1-|\,x_m\,|}$$

$$< \frac{\gamma K_2}{m+1} \left\{ 3 + \sum_{3}^{m} \left[\lg\lg k + \mathfrak{C} + \vartheta_k\right] \right\} + K_3 \lg\lg\,(m+1)$$

19) $$|\,K_m\,(x_m)\,| < K_4 \lg\lg\,(m+1)$$

wo K_4 eine endliche von m unabhängige Konstante ist.

Aus 18, $\lim\limits_{x\to 1} g\,(x) = 0$ und 19) ergibt sich die Behauptung 17).

Damit ist gezeigt: zu jedem beliebig klein gegebenen $\varepsilon > 0$ lässt sich die ganze positive Zahl N finden, sodass $|\,L_m\,(x_m)\,| < \varepsilon$, oder was dasselbe,

$$|\,s_{m+1}^{(3)} - l\,| < \varepsilon\ ,\ \text{wenn } m > N\ .$$

Folglich gilt

20) $$\lim_{m\to\infty} s_m^{(3)} = l\ .$$

[1]) PRINGSHEIM, Acta Mathematica Bd. 28, S. 4.

Die Voraussetzung 16) hat zur Folge $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{r_n^{(3)}}{t_n} = 0$; dieses und 20) ergeben, wegen 8), $\lim\limits_{n\to\infty} s_n^{(2)} = l$ und schliesslich folgt hieraus und aus 16)

$$\lim_{n\to\infty} s_n^{(1)} = l ,$$

womit Satz 7 bewiesen ist.

VIII. Setzt man

$$b_k = \int_{1-e^{-1}}^{1} t^{k-1} \left[\lg \frac{1}{1-t}\right]^{-1} dt \tag{21}$$

$$v_k(x) = b_k^{-1} \int_{1-e^{-1}}^{x} t^{k-1} \left[\lg \frac{1}{1-t}\right]^{-1} dt$$

so lässt sich zeigen

$$\lim_{n\to\infty} n \lg n \, b_n = 1$$

$$\sum_1^n b_k = t_n = \lg \lg n + \varepsilon_n , \quad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0 . \tag{22}$$

Die Definition 4) liefert

$$M_3^{(1)}(x) = \sum_1^\infty b_{k+1} \, s_k \, v_{k+1}(x) \Big/ \sum_0^\infty b_{k+1} \, v_{k+1}(x)$$

und es besteht der

Satz 8. Von den beiden Bedingungen

$$\lim_{x\to 1} M_3^{(1)}(x) = l \quad \text{(endlich)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r_n^{(2)}}{t_n} = 0$$

ist jede notwendig für die Existenz von

$$\lim_{n\to\infty} s_n^{(1)} = l$$

und zusammengenommen sind sie auch hinreichend. Dabei sind die Mittel $\frac{r_n^{(2)}}{t_n}$ und $s_n^{(1)}$ auf Grund der Formeln 6) und 7) zu bilden unter Benutzung der durch 21) und 22) definierten b_k und t_n.

Der Beweis verläuft völlig analog demjenigen in VII; die notwendigen Abschätzungen sind jedoch erheblich umfangreicher, infolge der hier verwendeten viel komplizierteren b_k.

Endlich gestattet eine von mir anderswo[1]) durchgeführte Überlegung den Satz zu beweisen:

$$\text{Es seien } b_k = \int_{1-e^{-1}}^{1} t^{k-1} \left[\lg \frac{1}{1-t}\right]^{-1} dt \ ; \quad \sum_1^n b_k = B_n$$

$$c_k = \frac{1}{(k+1) \lg (k+1)} \ ; \quad \sum_1^n c_k = C_n$$

$$s_n^{(1)} = B_n^{-1} \sum_1^{n-1} b_{\lambda+1}\, s_\lambda \ ; \quad t_n^{(1)} = C_n^{-1} \sum_1^{n-1} c_{\lambda+1}\, s_\lambda \ .$$

Wenn einer der beiden Grenzwerte $\lim s_n^{(1)}$, $\lim t_n^{(1)}$ existiert und endlich ist (oder zwischen endlichen Schranken oszilliert), dann nähert sich der andere derselben Grenze (oder oszilliert zwischen denselben Schranken)

[1]) «Proof of the equivalence of different mean values» Proc. Cambridge Phil. Soc. vol. XX (1920) p. 82.