Eine Projektionsaufgabe und eine Kugelaufgabe.

Von

A. KIEFER (Zürich).

(Als Manuskript eingegangen am 1. September 1921.)

I.

Gesucht im Raum der Ort eines Punktes O, von dem aus die Zentralprojektion eines Kegelschnittes $\mathcal{K}$ auf eine Ebene $\mathcal{E}$ einen gegebenen Brennpunkt U hat.

Sind i_1 und i_2 die Geraden von dem Brennpunkt U nach den unendlich fernen imaginären Kreispunkten der Ebene $\mathcal{E}$, so ist O ein gesuchter Punkt, wenn zwei Tangenten des Kegelschnittes $\mathcal{K}$ sich von O aus in die Geraden i_1, i_2 projizieren. Die Ebenen von O nach i_1, i_2 sind also Tangentialebenen des Kegelschnittes. D. h.:

Der gesuchte Ort wird von den vier Geraden gebildet, in denen die zwei Tangentialebenen durch i_1 an den Kegelschnitt von den zwei Tangentialebenen durch i_2 an den Kegelschnitt geschnitten werden.

Trotzdem die Geraden i_1, i_2 imaginär sind, brauchen von den vier Geraden des Ortes nicht alle imaginär zu sein; im Gegenteil sind im allgemeinen zwei derselben reell und es soll sich darum handeln, dieselben zu konstruieren. Die Geraden i_1, i_2 schneiden die Schnittlinie der Kegelschnittebene und der gegebenen Ebene in zwei Punkten A, B. Man stelle sich dieselben zunächst als reell vor; von A, B aus gehen an den Kegelschnitt vier Tangenten, die ein vollständiges Vierseit mit den Gegenecken C, D und E, F bilden, wobei die Geraden von U nach den Punkten C, D, E, F die gesuchten Geraden sind. Das Diagonaldreieck $P\,Q\,R$ des Vierseits ist ein Dreieck harmonischer Pole für den Kegelschnitt. P ist der Pol der Geraden $A\,B$ in bezug auf den Kegelschnitt und Q, R teilen die Punkte A, B und die Schnittpunkte des Kegelschnittes mit der Geraden $A\,B$ harmonisch. Bekanntlich liegt der Mittelpunkt M des Kegelschnittes mit den Mitten m_1, m_2 von CD und EF und mit der Mitte m von AB auf einer Geraden; das Vierseit bestimmt nämlich eine Kegelschnittschar und die Mittelpunkte ihrer Kegelschnitte liegen auf einer Geraden, aber die Punktepaare C, D und E, F und A, B sind spezielle Kegelschnitte der Schar. Da die Ecken des Diagonaldreieckes die Diagonalen des Vierseits harmonisch trennen, so ist

$$\overline{m_1 C}^2 = \overline{m_1 D}^2 = m_1 P \cdot m_1 Q \ ,$$
$$\overline{m_2 E}^2 = \overline{m_2 F}^2 = m_2 P \cdot m_2 R \ ;$$

aus diesen zwei Gleichungen sind die Punktepaare C, D und E, F zu konstruieren und die Geraden von U nach C, D, E, F sind die gesuchten. Die Konstruktion geht auch dann, wenn A, B imaginär sind und macht sich folgendermassen:

Die imaginären Geraden i_1, i_2 sind als Doppelstrahlen der Rechtwinkelinvolution mit dem Scheitelpunkt U bestimmt. Die Involution schneidet die Schnittlinie der Kegelschnittebene und der gegebenen Ebene in einer Punktinvolution, deren Mittelpunkt m der Fusspunkt des Lotes Um von U auf die Schnittlinie ist; die Potenz der Involution ist $-\overline{mU}^2$ und die imaginären Doppelpunkte sind A, B. Das gemeinsame Paar dieser Involution mit der Involution harmonischer Pole des Kegelschnittes auf der Schnittlinie ist das Punktepaar Q, R. Der Punkt P ist der Pol der Schnittlinie in bezug auf den Kegelschnitt. Die Gerade vom Mittelpunkt M des Kegelschnittes nach dem Punkte m schneidet PQ und PR in m_1, m_2 und nun sind C, D und E, F als Doppelpunkte von Involutionen bestimmt mit den Mittelpunkten m_1, m_2 und je einem Punktepaar P, Q, beziehungsweise P, R, oder mit den Potenzen $m_1 P \cdot m_1 Q$ und $m_2 P \cdot m_2 R$; die Doppelpunkte C, D und E, F werden reell oder imaginär, je nachdem die beiden Potenzen positiv oder negativ sind, oder anders gesagt, je nachdem m_1, m_2 ausserhalb oder innerhalb von P, Q beziehungsweise P, R liegen. Der Punkt m liegt, als Mittelpunkt einer elliptischen Involution, zwischen Q, R; die Gerade von m nach dem Mittelpunkt M des gegebenen Kegelschnittes schneidet daher von den zwei Linien PR, PQ die eine direkt und die andere auf der Verlängerung, d. h. von den zwei Punktepaaren C, D und E, F wird das eine reell und das andere imaginär.

Die auseinandergesetzte Konstruktion ist auch anwendbar, wenn der gegebene Kegelschnitt imaginär ist. Ein imaginärer Kegelschnitt kann durch ein Polarsystem oder als imaginärer Schnitt einer Ebene mit einer Fläche zweiten Grades gegeben werden. Die Punkte Q, R auf der Schnittlinie von $\mathcal{E}$ mit der Kegelschnittebene sind das gemeinsame Paar der durch die Rechtwinkelinvolution mit dem Scheitel U auf der Schnittlinie herausgeschnittenen Punktinvolution mit der Involution harmonischer Pole, die durch die Fläche zweiten Grades auf der Schnittlinie bestimmt ist. Der Punkt P ist der Schnittpunkt der Kegelschnittebene mit der konjugierten Geraden zur Schnittlinie in bezug auf die Fläche zweiten Grades und der Punkt M ist der Schnittpunkt der gleichen Ebene mit der konjugierten Geraden zu ihrer unendlich fernen Geraden in bezug auf die Fläche. Alles übrige wie vorhin.

Wenn man die Ebene $\mathcal{E}$ mit dem Punkte U um die Schnittlinie mit der Ebene des gegebenen Kegelschnittes dreht, so bleiben die Punkte C, D, E, F unverändert.

Bemerkung. Soll die Zentralprojektion eines gegebenen reellen Kegelschnittes von einem Punkte O aus auf eine gegebene Ebene $\mathcal{E}$ ein Kreis werden, so ist der Ort von O der reelle Kegelschnitt, in welchem sich die zwei imaginären Zylinder durchdringen, welche durch den gegebenen Kegelschnitt nach je einem der unendlich fernen imaginären Kreispunkte der Ebene $\mathcal{E}$ gehen. Irgend eine Parallelebene zur Ebene $\mathcal{E}$ möge den gegebenen Kegelschnitt in zwei imaginären Punkten schneiden, welche die Doppelpunkte einer Involution mit der negativen Potenz $-c^2$ sind. Betrachtet man diese Punkte als imaginäre Brennpunkte eines Kegelschnittes in jener Parallelebene, so liegen seine reellen Brennpunkte auf der Mittelsenkrechten und sind bekanntlich bestimmt als Doppelpunkte einer Involution mit derselben Mitte und der Potenz $+c^2$. Diese Brennpunkte sind zwei reelle Punkte des gesuchten Kegelschnittes, von dem in dieser Weise beliebig viele Punkte gefunden werden können. (Vierteljahrsschrift der Naturf. Ges. in Zürich. LXV, S. 466.)

II.

Gesucht im Raum die Gesamtheit aller Ebenen, die aus zwei, oder drei, oder vier gegebenen Kugeln gleich grosse Kreise herausschneiden.

Zwei Kugeln mit den Mittelpunkten M_1, M_2 und den Radien r_1, r_2 mögen von einer Ebene in gleich grossen Kreisen geschnitten werden; bezeichnet man die Lote von M_1, M_2 auf die Ebene mit d_1, d_2, so muss sein

$$r_1^2 - d_1^2 = r_2^2 - d_2^2 \ ; \text{ also}$$
$$d_1^2 - d_2^2 = r_1^2 - r_2^2 \ .$$

Beschreibt man um M_1, M_2 als Mittelpunkte Kugeln mit den bezüglichen Radien d_1, d_2, so müssen sich die zwei Kugeln auf der Potenzebene der ursprünglichen Kugeln schneiden. Die beiden Kugelpaare haben die gleiche Potenzebene und der Fusspunkt des Lotes von der Mitte von M_1 M_2 auf die Schnittebene muss ebenfalls auf der Potenzebene liegen; denn er halbiert die gemeinsame Kugeltangente, deren Berührungspunkte die Fusspunkte der Lote von M_1, M_2 auf die Ebene sind. Nimmt man umgekehrt den Fusspunkt beliebig in der Potenzebene an, verbindet ihn mit der Mitte von $M_1 M_2$ und errichtet im Fusspunkt auf diese Linie die senkrechte Ebene, so muss sie eine gesuchte Ebene sein. D. h.:

Die Gesamtheit aller Ebenen, die aus zwei Kugeln gleich grosse Kreise herausschneiden, umhüllt ein Rotationsparaboloid, das die Potenzebene der zwei Kugeln zur Scheiteltangentialebene hat und dessen Brennpunkt die Mitte der beiden Kugelmittelpunkte ist.

Dieses Paraboloid berührt auch die zwei gemeinsamen Tangentialkegel der zwei Kugeln; die Potenzebene liegt in der Mitte zwischen Spitze und zugehörigem Berührungskreis. Das Paraboloid schneidet irgend eine durch die zwei Kugelmittelpunkte gelegte Ebene in einer Parabel, deren Tangenten gleich lange Sehnen der aus den Kugeln herausgeschnittenen Grosskreise enthalten. Sind die zwei Kugeln gleich gross, so reduziert sich das Paraboloid auf ein Punktepaar, von dem der eine Punkt die Mitte der Zentralen und der andere Punkt ihr unendlich ferner Punkt ist. Wird die eine Kugel zu einem Punkt, so berührt das Paraboloid die andere Kugel längs des Kreises, der in der Polarebene des Punktes in bezug auf die Kugel liegt.

Umgekehrt: Nimmt man bei einem Rotationsparaboloid auf der Achse irgend zwei zum Brennpunkt symmetrisch gelegene Punkte und legt um sie als Mittelpunkte irgend zwei Kugeln, deren Potenzebene die Scheiteltangentialebene des Paraboloids ist, so schneidet jede Tangentialebene des Paraboloids die zwei Kugeln in gleich grossen Kreisen.

Eine Tangentialebene des Paraboloids, welche die eine Kugel berührt, muss auch die andere berühren. Von den zwei Kugelradien ist der eine beliebig wählbar; er kann also auch null sein.

Hat man drei Kugeln, so umhüllen die Ebenen, welche die erste und zweite Kugel in gleich grossen Kreisen schneiden, ein Paraboloid; ebenso umhüllen die Ebenen, welche die zweite und dritte Kugel in gleich grossen Kreisen schneiden, ein Paraboloid. Die gemeinsamen Tangentialebenen beider Paraboloide schneiden alle drei Kugeln in gleich grossen Kreisen und berühren auch das Paraboloid, das die erste und dritte Kugel bestimmen. D. h.:

Die Gesamtheit der Ebenen, welche aus drei Kugeln gleich grosse Kreise herausschneiden, bildet eine developpable Fläche vierter Klasse, welche den drei Paraboloiden gemeinsam umschrieben ist, die zu je zwei von den drei Kugeln gehören; die developpable Fläche hat auch die unendlich ferne Ebene zur Tangentialebene und ebenso jede der acht gemeinsamen Berührungsebenen der drei Kugeln.

Die drei Tangentialebenen, die auf der Mittelpunktsebene der drei Kugeln senkrecht stehen, schneiden die drei Grosskreise der Mittelpunktsebene in gleich langen Sehnen. Wenn von den drei Kugeln zwei einander gleich werden, so besteht die developpable Fläche vierter Klasse aus einer Kegelfläche zweiter Klasse und einer parabolischen Zylinderfläche; die Spitze der Kegelfläche halbiert die Zentrale der zwei gleich grossen Kugeln und die Tangentialebenen der Zylinderfläche laufen zu jener Zentralen parallel. Kegel und Zylinderfläche berühren jedes der zwei Paraboloide, die zur dritten Kugel und je einer der zwei gleich grossen Kugeln gehören. Sind alle drei Kugeln gleich gross, so zerfällt die developpable Fläche vierter Klasse in vier Ebenenbüschel; die Scheitelkanten von dreien sind die drei Geraden, welche die Mitten von je zwei der drei Kugelmittelpunkte verbinden und die vierte Scheitelkante ist die unendlich ferne Gerade der Mittelpunktsebene.

Hat man vier Kugeln im Raum, so gibt es sechs Paraboloide, die zu je zweien von den Kugeln gehören. Die drei Paraboloide, die zur ersten und zweiten, zur ersten und dritten und zur ersten und vierten Kugel gehören, haben ausser der unendlich fernen Ebene sieben Tangentialebenen gemeinsam, die alle sechs Paraboloide berühren. D. h.:

Zu vier Kugeln im Raum gibt es sieben Ebenen, von denen jede alle vier Kugeln in gleich grossen Kreisen schneidet.

Sind zwei von den vier Kugeln gleich gross, so gehen vier von den sieben Ebenen durch die Mitte der Zentralen der zwei Kugeln; die drei andern Ebenen sind zur Zentralen parallel. Die Ebenen selber sind durch die angegebenen besondern Punkte und je zwei von den fünf nicht zerfallenden Paraboloiden bestimmt. Werden drei von den vier Kugeln gleich gross, so gehen sechs von den sieben Ebenen zu zweien durch die drei Geraden, welche je zwei der Zentralen der drei gleichen Kugeln halbieren und die siebente Ebene ist zur Zentralebene der drei Kugeln parallel; die Ebenen selber sind durch die angegebenen besondern Geraden und je eines der drei nicht zerfallenden Paraboloide bestimmt. Sind alle vier Kugeln einander gleich, so sind vier der sieben Ebenen die Ebenen, welche je drei von den Zentralen halbieren, die vom gleichen Mittelpunkt ausgehen und die drei andern Ebenen halbieren je vier von den Zentralen, welche von je zweien der Mittelpunkte nach den zwei andern laufen. Dabei können die Radien der gleichen Kugeln auch null sein.