Über die geodätischen Linien auf einem konvexen Körper.

Von

Andreas Speiser.

(Als Manuskript eingegangen am 24. Juli 1920.)

Zwischen zwei Punkten eines konvexen Körpers lassen sich im allgemeinen unendlich viele geodätische Linien ziehen. Mindestens eine davon ist jedoch so beschaffen, dass sie die zu den Endpunkten konjugierten Punkte nicht enthält, insbesondere gehört dazu die kürzeste Verbindungslinie. Für diesen von Hilbert zuerst mit Methoden der Mengenlehre bewiesenen Satz geben wir in § 1 einen Beweis, der sich auf das Cauchysche Existenztheorem stützt, und in § 3 unter engeren Voraussetzungen einen zweiten wesentlich davon verschiedenen und ganz elementaren Beweis. Dabei untersuchen wir den Inbegriff des von den geodätischen Linien zwischen dem $(n-1)$-ten und dem n-ten Brennpunkt überstrichenen Gebietes. Unter gewissen Voraussetzungen (aber stets für $n=1$), bedeckt dieses Gebiet den ganzen Körper. Dieser Satz gilt jedoch nicht für beliebige Körper, z. B. nicht mehr stets für den Torus mit $n=2$.

In § 4 wird mit diesen Prinzipien ein einfacher Beweis eines Satzes von Poincaré über geschlossene geodätische Linien [1]) gegeben und im Schlussparagraphen wird hieraus mit Hilfe von Sätzen desselben Mathematikers die Existenz von unendlich vielen geschlossenen geodätischen Linien bewiesen auf konvexen Körpern, die sich nicht zu sehr von einer Kugel unterscheiden. Die Methoden lassen sich auf allgemeinere definite Variationsprobleme ausdehnen.

§ 1.

Es sei $\mathfrak{F}$ eine Fläche, die Grundfläche, welche in jedem Punkt eine bestimmte Tangentialebene besitzt. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem, dessen Ursprung in einem Punkt der Fläche sich befindet, während die z-Achse mit der Normalen zusammenfällt, sei

[1]) Poincaré: Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes. Amer. Transactions t. 6. pg. 237.

die Gleichung der Fläche für eine gewisse Umgebung gegeben durch $z = f(x, y)$, wobei die Ableitungen von f bis zur dritten Ordnung existieren und beschränkt sein sollen. Alsdann folgt aus dem Cauchyschen Existenztheorem, dass von jedem Punkte in jeder Richtung genau eine geodätische Linie ausgeht. Sie ist rektifizierbar und beliebig weit fortsetzbar. Ist ferner eine abzählbare Menge von Punkten mit Richtungen auf der Fläche gegeben, die gegen einen Punkt $\mathfrak{P}$ mit einer Richtung $\mathfrak{R}$ konvergieren und trägt man auf den geodätischen Linien, welche in diesen Punkten mit den gegebenen Richtungen ausgehen, dieselbe Länge l ab, so konvergieren auch die Endpunkte und die Endrichtungen gegen den Endpunkt und die Endrichtung der geodätischen Linie, welche aus $\mathfrak{P}$ mit der Richtung $\mathfrak{R}$ ausgeht.

Wir nehmen nun an, dass die Fläche unberandet ist, und betrachten von allen geodätischen Linien, welche vom Punkte $\mathfrak{P}$ ausgehen, Stücke von der Länge l, von $\mathfrak{P}$ an gerechnet. Aus den bisherigen Ausführungen folgt, dass die Punkte dieser Kurven eine Fläche erzeugen, welche auf der Grundfläche aufliegt und sie teilweise mehrfach überdecken kann. Insbesondere wird von ihr jeder Punkt überdeckt, der mit $\mathfrak{P}$ durch eine Kurve von einer Länge $\leqq l$ verbunden werden kann. Unter unsern Voraussetzungen lässt sich diese bekannte Tatsache auf folgende Weise erhärten. Wenn die Deckfläche keinen Punkt der Enveloppe der von $\mathfrak{P}$ ausgehenden geodätischen Linien enthält, so bilden diese auf ihr ein Feld; der Satz ist alsdann evident und keine in $\mathfrak{P}$ beginnende Kurve von der Länge l kann die Deckfläche verlassen, wenn sie auf ihr gezogen wird. Nun ist die Krümmung der Fläche in jedem Punkte stetig, daher lässt sich um jeden Punkt ein geodätischer Kreis $\mathfrak{K}$ ziehen, innerhalb dessen die geodätischen Linien, die von diesem Punkt ausgehen, ein Feld bilden. Die durch Kurven mit der Länge $\leqq l$ von $\mathfrak{P}$ aus erreichbaren Punkte bilden eine abgeschlossene Menge. Also lässt sich für den Radius dieser geodätischen Kreise eine feste Zahl ϱ angeben, die für jeden Punkt dieses Gebietes gilt. Wir nehmen nun den Satz für $l - \frac{\varrho}{2}$ als bewiesen an und zeigen seine Richtigkeit für l. Es sei $\mathfrak{Q}$ ein Punkt, der mit $\mathfrak{P}$ durch keine Kurve von der Länge $\leqq l - \frac{\varrho}{2}$ verbunden werden kann, dagegen durch eine solche von der Länge $\leqq l$.

Wir tragen von $\mathfrak{P}$ aus auf der geodätischen Linie, die durch den Ausgangswinkel α charakterisiert sei, die Strecke $l - \frac{\varrho}{2}$ ab. Der Endpunkt sei $\mathfrak{R}(\alpha)$. Anderseits ziehen wir um $\mathfrak{Q}$ den geodätischen Kreis

$\mathfrak{K}$ von Radius ϱ; $f(\alpha)$ bedeutet die Zahl l, wenn $\mathfrak{R}$ ausserhalb $\mathfrak{K}$ liegt, im andern Falle aber $l - \frac{\varrho}{2} + \mathfrak{Q}\,\mathfrak{R}$, wobei $\mathfrak{Q}\,\mathfrak{R}$ geodätisch in $\mathfrak{K}$ gemessen werde. Diese Funktion ist stetig und besitzt ein absolutes Minimum $< l$. Für dieses ist die Linie $\mathfrak{P}\,\mathfrak{R}\,\mathfrak{Q}$ eine ungebrochene geodätische Linie, welche eine nicht mehr verkürzbare Verbindungslinie von $\mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{Q}$ darstellt. Wäre nämlich bei $\mathfrak{R}$ ein Winkel $\neq 180^0$ vorhanden, so liesse sich der Linienzug $\mathfrak{P}\,\mathfrak{R}\,\mathfrak{Q}$ weiter verkürzen. Auf der verkürzten Linie gibt es mindestens einen Punkt $\overline{\overline{\mathfrak{R}}}$, der Endpunkt einer geodätischen Linie von der Länge $l - \frac{\varrho}{2}$ ist und es wird $\mathfrak{P}\,\overline{\overline{\mathfrak{R}}} \geqq l - \frac{\varrho}{2}$, auf der verkürzten Kurve gemessen. Daher wäre $\overline{\overline{\mathfrak{R}}}\,\mathfrak{Q}$ kleiner als das Minimum von $f(\alpha) - \left(l - \frac{\varrho}{2}\right)$, entgegen der Voraussetzung.

§ 2.

Wir betrachten nunmehr von den geodätischen Linien, die von $\mathfrak{P}$ ausgehen, bloss die Stücke bis zur Enveloppe. Diese bilden das erste Blatt der Deckfläche. Entsprechend werden die Teile zwischen dem $n-1$-ten und dem n-ten Brennpunkt das n-te Blatt bilden. Nach dem Satz von § 1 überdeckt das erste Blatt bereits die ganze Fläche, denn auf der kürzesten geodätischen Linie von $\mathfrak{P}$ nach $\mathfrak{Q}$ liegt der zu $\mathfrak{P}$ konjugierte Punkt jenseits von $\mathfrak{Q}$. Ist die Fläche mehrfach zusammenhängend, so wird man mit Vorteil an ihre Stelle die universelle Überlagerungsfläche setzen. Wenn die ursprüngliche Fläche einen endlichen Flächeninhalt hat, so ist die kürzeste geschlossene Linie von einem gegebenen Typus eine geschlossene (periodische) geodätische Linie[1]). Verbindet man nämlich auf der universellen Überlagerungsfläche einen Punkt mit dem aufliegenden Punkt eines anderen Blattes, so erhält man eine geschlossene Kurve, von einem durch die beiden Blätter vollständig bestimmten Typus. Die Verbindungskurve kann als geodätische Linie angenommen werden und zwar als die kürzeste. Nun lasse man den Ausgangspunkt und mit ihm den Endpunkt auf der Fläche variieren. Die Länge hat irgendwo ein Minimum und die Kurve wird auf der Grundfläche in $\mathfrak{P}$ keine Ecke mehr aufweisen, weil sie sonst noch verkürzt werden könnte, entgegen der Voraussetzung. Dasselbe gilt auch für Flächen,

---

[1]) Vgl. Hadamard: Les surfaces à courbures opposées . . . Journal de Math., 5ème sér. t. 4. pg. 27.

die sich ins Unendliche erstrecken, wenn von vorneherein die zur Konkurrenz zuzulassenden Kurven auf ein endliches Gebiet beschränkt werden können, wie z. B. beim einschaligen Hyperboloid oder bei der Schwarzschen Minimalfläche.

Während bei den Flächen negativer Krümmung die Deckfläche denkbar einfach ist — sie stimmt mit der universellen Überlagerungsfläche überein und versieht sie mit einem überall (ausser in $\mathfrak{P}$) regulären System von Polarkoordinaten, — so liegen in dem Falle, wo eine Enveloppe auftritt, die Verhältnisse wesentlich komplizierter.

Es sei eine konvexe geschlossene Fläche gegeben, deren Krümmung der Ungleichung genügt: $\frac{1}{a^2} \leqq K \leqq \frac{1}{b^2}$. Alsdann liegt der zu $\mathfrak{P}$ konjugierte Punkt in einer Entfernung, deren Grösse zwischen πb und πa liegt. Es sei $g(\alpha)$ die Entfernung des konjugierten Punktes zu $\mathfrak{P}$ auf der durch den Ausgangswinkel α festgelegten geodätischen Linie. Alsdann ist $g(\alpha)$ eine stetige periodische Funktion; sie besitzt daher mindestens ein Maximum und ein Minimum innerhalb einer Periode. Diesen entsprechen die Rückkehrpunkte der Enveloppe. Im Falle des Maximums besitzt die Deckfläche eine Spitze, im Falle des Minimums dagegen greift die Deckfläche über sich selbst hinweg. Der erstere Fall ist derjenige des foyer en talon, der andere Fall entspricht dem foyer en pointe.[1])

Ein einfaches Beispiel in der Ebene mag dieses Verhalten anschaulich machen. Die Normalen auf einer Ellipse besitzen als Enveloppe eine Asteroide. Wir nehmen bloss die äussere Normale, sowie das Stück der inneren Normalen bis zur Enveloppe und betrachten die hievon überstrichene Fläche. Sie kann folgendermassen konstruiert werden: Man schneide die grosse Achse, welche wir als die x-Achse annehmen, zwischen den beiden daraufliegenden Spitzen der Asteroide auf und hefte die obere Hälfte der Asteroide an das untere Ufer des Schnittes, die untere Hälfte an das obere Ufer an. Die Deckfläche besteht alsdann aus der ganzen Ebene, zusammen mit den beiden angehefteten Lappen, die sich längs des aufgeschnittenen Stückes der x-Achse durchdringen. An diesem Beispiel wird man die Natur der Flächen in der Nachbarschaft von Rückkehrpunkten leicht erkennen: Einem Minimum von $g(\alpha)$ entsprechen hier die Rückkehrpunkte auf der x-Achse, einem Maximum diejenigen auf der y-Achse. Auf ähnliche Weise kann man Flächen mit drei Paaren von Rückkehrpunkten

[1]) Vgl. Hadamard, Leçons sur le calcul des Variations, pg. 110, und Bolza, Vorlesungen über Variationsrechnung pg. 360, wo sich auch Figuren befinden.

bilden: Man denke sich ein Dreieck aus der Fläche ausgeschnitten, und an jeder Seite einen Lappen mit einer Spitze angeheftet. Die beiden in einer Ecke zusammenstossenden Lappen müssen sich dort berühren und alsdann übereinandergreifen.

In bezug auf die Enveloppe gilt im übrigen noch folgende Regel, die man leicht an den Zeichnungen beweist:

Regel: Wird die Enveloppe in der Richtung wachsender α umlaufen, und gelangt man in die Nähe eines Rückkehrpunktes, so liegt der von ihm ausgehende nächste Zweig stets zur Rechten desjenigen Zweiges, auf dem man sich dem Rückkehrpunkt nähert.

Wir bezeichnen einen Rückkehrpunkt, in dem $g(\alpha)$ ein Minimum hat, als Minimalspitze, einen solchen, wo $g(\alpha)$ ein Maximum hat, als Maximalspitze, dann gilt die Tatsache, dass in der Nachbarschaft einer Minimalspitze der eine Zweig der Enveloppe stets auf der Deckfläche aufliegt, die von dem andern Zweig begrenzt ist. Dieses gegenseitige Überschneiden der beiden Lappen folgt ohne weiteres aus der Jacobischen Gleichung, nach welcher der Berührungspunkt mit der Enveloppe Schnittpunkt zweier benachbarter Extremalen ist.

Betrachten wir das zweite Blatt der Deckfläche. Es ist berandet durch die erste und die zweite Enveloppe. Für die letztere ist das Verhalten in den Minimal- und Maximalecken gleich wie beim ersten Blatt. Dagegen ist am inneren Rand der Fläche, d. h. an der 1. Enveloppe, das Verhalten entgegengesetzt, wie bei dem ersten Blatt: Bei einer Maximalspitze findet die Überschneidung statt, die Minimalspitze bildet eine eigentliche Spitze des Blattes. Genau dasselbe gilt von den übrigen Blättern.

Mit Hilfe dieser Blätter setzt sich die ganze Deckfläche zusammen. Sie besitzt sämtliche Enveloppen als Rückkehrkanten, und diese wenden ihre konvexe Seite gegen das Innere der Fläche. Es gilt nun der

Satz 1: Für jeden Punkt der Deckfläche ist die geodätische Linie, welche durch ihn geht, kürzeste Verbindung mit $\mathfrak{P}$.

Beweis: die geodätischen Linien, welche von $\mathfrak{P}$ ausgehen, bilden auf der ganzen Deckfläche ein Feld, durch jeden Punkt geht nur eine einzige. Man kann die geodätischen Polarkoordinaten einführen und das Linienelement erhält die Gestalt: $ds^2 = du^2 + C^2 dv^2$. C ist in $\mathfrak{P}$, sowie in der Enveloppe $= o$, sonst aber von o verschieden. Ist irgend eine Kurve auf der Deckfläche gegeben, so ändern sich bei ihrer Durchlaufung u und v stetig. Geht sie von $\mathfrak{P}$ aus und endet in $\mathfrak{Q}\ (u, v)$, so ist ihre Länge $\int ds \geqq u$. Das Gleichheitszeichen findet nur statt, wenn überall $C\,dv = o$ ist, also 1. auf der geodätischen Linie ($dv = o$), 2. auf Linien, die teilweise Randlinien ($C = o$), teilweise geodätische Linien sind. Die letzteren können so beschrieben werden: Man gehe von $\mathfrak{Q}$ aus auf der geodätischen Linie in der Richtung nach $\mathfrak{P}$ bis zur nächsten Enveloppe. Hier kann man in der Richtung nach der nächsten Minimalecke auf der Kante weitergehen und sie auf einem beliebigen Punkt verlassen, um auf der dort berührenden geodätischen Linie in der Richtung nach $\mathfrak{P}$ weiterzugehen usf. Alle diese Wege haben dieselbe kürzeste Länge u. Als Ganzes genommen ist das Linienelement $du^2 + C^2\,dv^2$ dasjenige der Deckfläche und nicht der Grundfläche.

Über die Enveloppe gelten noch folgende Sätze:

Satz 2: Wenn sich die p-te und die q-te Enveloppe gleichsinnig berühren, so gilt dasselbe von der $(p+r)$-ten und der $(q+r)$-ten. Insbesondere geht die $(q-p)$-te Enveloppe durch den Punkt $\mathfrak{P}$.

Hierbei vorkommende Deckflächen und Enveloppen mit negativer Ordnungszahl sind gleichbedeutend mit den entsprechenden positiven, bloss ist der Richtungssinn der geodätischen Linien umzukehren.

Beweis: Es sei der Punkt $\mathfrak{Q}$ mit der Richtung $\mathfrak{R}$ gemeinsam den beiden Enveloppen $\mathfrak{E}_p$ und $\mathfrak{E}_q$. Durch $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$ ist der konjugierte Punkt und die dazu gehörige Richtung eindeutig bestimmt, er liegt also sowohl auf $\mathfrak{E}_{p+1}$ wie auf $\mathfrak{E}_{q+1}$. Dasselbe gilt auch von dem rückwärtigen konjugierten Punkt, der alsdann $\mathfrak{E}_{p-1}$ und $\mathfrak{E}_{q-1}$ gemeinsam ist.

Satz 3: Wenn sich die p-te und die q-te Enveloppe gegensinnig berühren, so geht die $(p+q)$-te Enveloppe durch $\mathfrak{P}$. Denn alsdann berühren sich $\mathfrak{E}_{-p}$ und $\mathfrak{E}_q$ gleichsinnig.

Satz 4: Die Anzahl der gleichsinnigen, sowie diejenige der ungleichsinnigen Berührungen zweier Enveloppen ist jeweils eine gerade Zahl.

Beweis: Der Satz folgt aus der Tatsache, dass, wenn $\mathfrak{Q}$ der zu $\mathfrak{P}$ konjugierte Punkt auf einer geodätischen Linie ist, auch umgekehrt $\mathfrak{P}$ den zu $\mathfrak{Q}$ konjugierten Punkt auf derselben Linie mit umgekehrtem Richtungssinn darstellt. Wenn $\mathfrak{Q}$ mit $\mathfrak{P}$ zusammenfällt und n-ter konjugierte Punkt zu $\mathfrak{P}$ ist, wenn ferner α_1 und α_2 die Richtungen der geodätischen Linien in $\mathfrak{P}$ beim Ausgang und bei der Rückkehr bedeuten, so stimmt die geodätische Linie, welche unter dem Winkel $\alpha_2 + 180^0$ von $\mathfrak{P}$ ausgeht, mit der vorigen überein, nur ist der Richtungssinn umgekehrt. Daher geht die n-te Enveloppe unter den Winkeln α_2 und $\alpha_1 + 180^0$ durch den Anfangspunkt, wobei $\alpha_2 \neq \alpha_1 + 180^0$ ist.

§ 3.

Bekanntlich ist eine geodätische Linie auf einer Fläche höchstens solange kürzeste Verbindung zweier Punkte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$, als der zu $\mathfrak{P}$ konjugierte Punkt nicht zwischen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ liegt. Hieraus und aus dem in § 1 besprochenen Satze folgt, dass das 1. Blatt der Deckfläche die Grundfläche in jedem Punkt mindestens einmal überdeckt. Dies ist keineswegs eine Eigenschaft eines beliebigen Systems von Kurven mit Enveloppe, wie man sich sofort durch Beispiele überzeugen kann, sondern die Tatsache, dass die Kurven durch ein definites Variationsproblem geliefert sind, kommt hier wesentlich zur Geltung.

Wir setzen voraus, dass die Enveloppe nur eine endliche Anzahl von Minimal- und Maximalspitzen sowie von Doppelpunkten besitzt. Alsdann gilt der

Satz 5: Jeder Punkt $\mathfrak{Q}$ der Enveloppe ausser Minimalspitzen *liegt auf einem Punkt der Deckfläche auf.*

Beweis: Wir gehen von $\mathfrak{Q}$ aus in Richtung abnehmender u auf der Enveloppe weiter bis zum nächsten Doppelpunkt $\mathfrak{Q}_1$: Hier wählen wir denjenigen Zweig, der in $\mathfrak{Q}_1$ die niedrigste Koordinate u aufweist, gehen auf ihr weiter in Richtung abnehmender u und fahren in gleicher Weise fort, bis wir in eine Minimalspitze $\mathfrak{M}$ gelangen. Nun betrachten wir die Deckfläche und beschreiben auf ihr denselben Weg, aber im umgekehrten Sinn durchlaufen, von $\mathfrak{M}$ beginnend und in $\mathfrak{Q}$ endend. Er beginnt in $\mathfrak{M}$ auf einem der beiden in $\mathfrak{M}$ auslaufenden Zweige; dieser liegt auf dem Inneren desjenigen Teils der Deckfläche, der durch den anderen Zweig begrenzt ist (§ 2), und auf diesem Teil zeichnen wir den Weg auf. Ich behaupte, dass wir *niemals an den Rand der Fläche anstossen.* Denn die Werte der Koordinate u, die auf dem Randweg aufgezeichnet sind, nehmen genau mit der Länge des Weges zu, nur in den Eckpunkten können sie Sprünge nach oben aufweisen. Da aber der Weg keine geodätische Linie ist (die Enveloppe besitzt eine von o verschiedene geodätische Krümmung), so nehmen die Werte von u, welche die auf der Deckfläche aufgezeichnete Spur dieses Weges durchläuft, um weniger zu. Wenn wir also an den Rand stossen, so ist der dortige Wert von u kleiner als der auf dem Randweg aufgezeichnete, und wir hätten in diesem Doppelpunkt den falschen Zweig genommen.

Hieraus folgt der

Satz 6: Das erste Blatt der Deckfläche bedeckt die Grundfläche in jedem Punkt mindestens einfach.

Denn ein unüberdecktes Gebiet müsste von Enveloppestücken begrenzt sein. Diese liegen aber auf überdecktem Gebiet.

Damit ist zugleich der Satz bewiesen, dass jeder Punkt mit $\mathfrak{P}$ durch eine geodätische Linie verbunden werden kann, welche kürzeste Verbindungslinie ist.

Satz 6a: Wenn die $(n-1)$-te und die n-te Enveloppe sich nirgends schneiden, so bedeckt das n-te Blatt der Deckfläche die Grundfläche überall mindestens einfach.

Beweis: Die Grenzen der unbedeckten Gebiete müssten wiederum durch Stücke der Enveloppen gebildet werden. Für die n-te beweist man aber genau wie vorher, dass sie ganz im überdeckten Gebiete liegt. Dasselbe zeigt man für die $(n-1)$-te, nur muss für die Konstruktion des Weges überall der Richtungssinn umgekehrt genommen werden, sodass die Maximalspitze an die Stelle der Minimalspitze tritt. Aber wir wissen, dass das Verhalten bei den Maximalspitzen des innern Randes gleich ist wie dasjenige der Minimalspitzen des äussern Randes, nämlich dass ein Übereinandergreifen der Ränder stattfindet.

§ 4.

Wir wollen nun annehmen, dass sich für alle Punkte der Grundfläche die erste und zweite Enveloppe weder schneiden noch berühren. Dann geht die erste Enveloppe auch niemals durch $\mathfrak{P}$. Offenbar ist dies erfüllt für Körper, die sich nicht sehr von der Kugel unterscheiden. Alsdann überdeckt die zweite Deckfläche die Grundfläche überall mindestens einfach. Insbesondere wird $\mathfrak{P}$ von ihr überdeckt und daraus schliessen wir den

Satz 7: Durch jeden Punkt $\mathfrak{P}$ der Fläche geht mindestens eine geodätische Linie, welche nach einmaliger Berührung der Enveloppe nach $\mathfrak{P}$ zurückkommt.

Wir suchen nun die kürzeste derartige Linie. Für diese ist gewiss $\mathfrak{P}$ nicht der zweite konjugierte Punkt, ausser wenn dieser eine Minimalspitze wäre, denn ein Punkt der zweiten Enveloppe liegt stets auf einem inneren Punkt des zweiten Blattes mit niedrigerer Koordinate u auf. Variieren wir nun den Ausgangspunkt $\mathfrak{P}$, so variiert auch nach dem Existenztheorem von Cauchy das 2. Blatt stetig und, da $\mathfrak{P}$ durch das Innere überdeckt ist, so bleibt dies bestehen für eine gewisse Umgebung von $\mathfrak{P}$. Dasselbe gilt auch im Fall der Minimalspitze. Hieraus folgt der

Satz 8: Betrachten wir die kürzeste geodätische Linie, welche von $\mathfrak{P}$ aus nach Berührung von $\mathfrak{E}_1$ in den Ausgangspunkt zurückgeht, so gibt es durch jeden Nachbarpunkt $\mathfrak{P}'$ benachbarte geodätische Linien, welche in diesen zurückkehren. Diese bilden also jeweils eine schwache Variation der Linie durch $\mathfrak{P}$. Sind δx, δy die Koordinaten von $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$, so gilt für die Variation der Länge die Gleichung:

$$\delta J = (F_{x'}\, \delta x + F_{y'}\, \delta y)_A^E$$

wobei E die Endrichtung, A die Anfangsrichtung in $\mathfrak{P}$ bedeutet und

$$F^2 = e\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + 2f\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds} + g\left(\frac{dy}{ds}\right)^2$$

Soll nun die Länge ein Minimum sein, so muss δJ verschwinden für jedes δx und δy, d. h. es muss sein $F_{x'}^E = F_{x'}^A$, und $F_{y'}^E = F_{y'}^A$. Daraus folgt: $x'^E = x'^A$ und $y'^E = y'^A$, d. h. die Ausgangsrichtung stimmt mit der Endrichtung überein, und die Kurve ist eine geschlossene geodätische Linie.

Satz 9: Auf der Fläche gibt es mindestens eine geschlossene geodätische Linie. Sie ist auch die kürzeste aller geodätischen Linien, welche in den Ausgangspunkt zurückgehen.

§ 5.

In diesem Paragraphen soll die Anwendung des letzten Theorems von Poincaré[1]) ausgeführt werden. Ist das Variationsproblem in Parameterform gegeben:

$$\int F(x, y, x', y')\, dt = \text{Extr.},$$

so lautet die Eulersche Gleichung:

$$F_1\,(x'y'' - x''y') + F_{xy'} - F_{yx'} = 0, \quad \text{wobei } F_1 = \frac{F_{x'x'}}{y'^2}$$

Führt man den Winkel φ ein, den die Tangente mit der x-Achse bildet, so kommt man zu folgenden Gleichungen:

$$\frac{dx}{dt} = \cos\varphi \qquad \frac{dy}{dt} = \sin\varphi \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{F_1}\,(F_{yx'} - F_{xy'}).$$

Der Parameter t stellt alsdann die Bogenlänge dar. Dieses System besitzt die Integral-Invariante

$$\iiint F_1\, dx\, dy\, d\varphi,$$

denn es gilt:

$$\frac{\partial\, F_1 \cos\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\, F_1 \sin\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\,(F_{yx'} - F_{xy'})}{\partial\varphi} = 0.$$

---

[1]) Vgl. Poincaré: Sur un théorème de Géometrie, rendic. del circ. mat. di Palermo, t. 33, pg. 375.

G. D. Birkhoff: Démonstration du dernier théorème de Géometrie de Poincaré. Bull. de la soc. math. de France. A. 42, pg. 1; sowie The restricted problem of three bodies, rendic. del circ. mat. di Palermo, t. 39, pg. 265.

Im Falle der geodätischen Linien wird $F_1 = eg - f^2$. Nun ist $\sqrt{eg-f^2}\, dx\, dy$ das Flächenelement $d\omega$ auf der Fläche und $\sqrt{eg-f^2}\, d\varphi$ ist der infinitesimale Winkel $d\delta$ auf der Fläche, dessen Projektion $d\varphi$ ist. Daher lässt sich die Invariante auch so schreiben: $\int\int\int d\omega\, d\,\delta$. Nun betrachten wir die geschlossene geodätische Linie $\mathfrak{L}$. Sie zerlegt die Fläche $\mathfrak{F}$ in zwei Hälften, von denen wir die eine, $\mathfrak{H}$, betrachten. Von jedem Punkt von $\mathfrak{H}$ ziehen wir die kürzeste Linie nach $\mathfrak{L}$. Eine solche existiert nach § 1 und sie schneidet $\mathfrak{L}$ unter 90^0. Das System dieser Kurven bedeckt $\mathfrak{H}$ überall einfach, aber es weist Unstetigkeitsstellen auf in denjenigen Punkten, von denen zwei verschiedene kürzeste Linien ausgehen. Es bildet einen Teil des ersten Blattes der Deckfläche, erzeugt durch die zu $\mathfrak{L}$ normalen geodätischen Linien. Die orthogonalen Trajektorien des Systems sind die Parallelkurven zu $\mathfrak{L}$. Sie sind konvex gegen $\mathfrak{L}$ und ihre Ecken, welche in den Unstetigkeitspunkten auftreten, weisen ebenfalls gegen $\mathfrak{L}$ hin. Ferner sind sie geschlossene Kurven, welche sich gegen einen Punkt zusammenziehen, den von $\mathfrak{L}$ entferntesten Punkt in $\mathfrak{H}$. Durch eine kleine Deformation des Systems können die Ecken weggeschafft werden, und wir erhalten ein System $\mathfrak{S}$ geschlossener, gegen $\mathfrak{L}$ konvexer Kurven, das mit $\mathfrak{L}$ beginnend zunächst aus Parallelkurven besteht und sich schliesslich in einen Punkt $\mathfrak{Q}$ reduziert. $\mathfrak{Q}$ denken wir uns als Inbegriff aller Flächenrichtungen durch den Punkt $\mathfrak{Q}$. Nun versehen wir die Kurven von $\mathfrak{S}$ mit einem bestimmten Richtungssinn und betrachten die Gesamtheit der so gerichteten Linienelemente von $\mathfrak{S}$. Sie bilden eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit vom Typus des Ringes, begrenzt von $\mathfrak{L}$ und von den Richtungen in $\mathfrak{Q}$. Hierauf ändern wir den Richtungssinn und gehen von $\mathfrak{Q}$ wiederum nach $\mathfrak{L}$ zurück. Jede Kurve ist nun mit doppeltem Richtungssinn versehen und die Linienelemente bilden wiederum eine Ringfläche, begrenzt von den Linienelementen von $\mathfrak{L}$, in den beiden Richtungen genommen. Bei $\mathfrak{Q}$ findet keine Unstetigkeit statt. Wir nehmen die geodätische Linie, welche von dem Linienelement $\mathfrak{l}$ in $\mathfrak{S}$ ausgeht, und verfolgen sie, bis sie $\mathfrak{S}$ zum ersten Mal berührt in $\mathfrak{l}'$. $\mathfrak{l} \rightarrow \mathfrak{l}'$ ist eine Transformation T des Ringes in sich. Wenn $\mathfrak{l}$ nahe bei $\mathfrak{L}$ sich befindet, so folgt aus der Theorie der Jakobischen Gleichung, dass ein $\mathfrak{l}'$ existiert, und hieraus durch Stetigkeit, weil die geodätische Krümmung der Kurven von $\mathfrak{S}$ überall von 0 verschieden ist, dass dies für jedes Linienelement gilt. Für diesen Schluss vgl. Poincaré. Die Länge des Stückes der geodätischen Linie zwischen $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}'$ sei L ($\mathfrak{l}$). Tragen wir auf ihr von $\mathfrak{l}$ aus die Strecke $t\,L$ ab, und ordnen wir $\mathfrak{l}$ das Linienelement dem Ende dieser Strecke zu, so erhalten wir eine Transformation der Linienelemente von $\mathfrak{S}$, die stetig ist. Lassen wir t von 0 bis 1 variieren, so variiert auch die Transformation stetig und für $t=1$ erhalten wir die Transformation T von $\mathfrak{S}$ in sich selbst. Hieraus wird klar, dass die Linienelemente von $\mathfrak{L}$ durch die Transformation im entgegengesetzten Sinne versetzt werden.

Das invariante Flächenintegral lässt sich hier explizit angeben. Es gilt der

Satz 10: Die Transformation T lässt das Integral $\int\int \gamma d\omega$ invariant, wobei γ die geodätische Krümmung der Kurve $\mathfrak{S}$ in jedem Punkte bedeutet.

Beweis: Man erstreckt das invariante Raumintegral über die Gesamtheit der Linienelemente der geodätischen Linien von den I nach den I'. Verschiebt man jeden Punkt auf der geodätischen Linie um die Strecke ds, so muss das Integral unverändert bleiben. Hierbei fällt am Anfang bei I ein Raumstück weg, am Ende wird ein anderes zugesetzt, und die Grösse ist offenbar: $\int\int d\tau\, d\omega$, wobei $d\tau$ den Kontigenzwinkel der Kurven $\mathfrak{S}$ bedeutet. Nun ist $d\tau = \gamma\, ds$; daher bleibt das Integral $ds \int\int \gamma\, d\omega$ invariant, und da ds konstant ist, ist der Satz bewiesen. Hieraus folgt die Existenz von unendlich vielen geschlossenen geodätischen Linien.

Zürich, den 23. Juli 1920.