Zum Normalenproblem bei den Flächen zweiten Grades.

Von

A. KIEFER (Zürich).

(Als Manuskript eingegangen am 9. April 1921.)

Wenn eine zentrale Fläche zweiten Grades gegeben ist, so ziehe man durch einen Punkt P, der nicht auf der Fläche liegt, eine beliebige Gerade g und lege durch den Mittelpunkt der Fläche die senkrechte Ebene zu g. Zu dieser Ebene gehört dann in bezug auf die Fläche eine konjugierte Gerade g'. Beschreibt g das Strahlenbündel um P, so beschreibt g' ein projektives Strahlenbündel um den Mittelpunkt der Fläche. Schneiden sich g und g' auf der Fläche, so ist der Schnittpunkt der Fusspunkt einer Normalen von P auf die Fläche, weil die Tangentialebene des Fusspunktes als Parallelebene zur konjugierten Ebene von g' auf g senkrecht steht. Die zwei Strahlenbündel erzeugen bekanntlich eine Raumkurve dritter Ordnung C_3; dieselbe schneidet die Fläche zweiten Grades in den Fusspunkten der sechs Normalen, die von dem Punkte P nach der Fläche gehen. Die Sätze von Steiner, zweiter Band der ges. Werke, S. 636, sind Folgerungen aus diesem Umstand. Die Kurve dritter Ordnung C_3 geht ausser durch die von Steiner angegebenen Punkte durch die vier Fusspunkte der Lote von P auf den Asymptotenkegel der Fläche zweiten Grades; denn die senkrechte Diametralebene zu einem solchen Lot ist Tangentialebene der Fläche und die konjugierte Gerade der Tangentialebene geht vom Mittelpnnkt der Fläche nach dem Fusspunkt des Lotes auf dem Asymptotenkegel zum Berührungspunkt im Unendlichen. Denkt man sich jetzt zur Raumkurve dritter Ordnung C_3 die negative Fusspunktsfläche gebildet, d. h. zieht man von P nach jedem Punkt der Kurve eine Gerade und legt durch den Kurvenpunkt die senkrechte Ebene zur Geraden, so umhüllen diese Ebenen die negative Fusspunktsfläche, eine developpable Fläche fünfter Klasse C'_5, welche die unendlich ferne Ebene zur dreifachen Tangentialebene hat; durch einen beliebigen Punkt Q gehen nämlich fünf solcher Ebenen, weil die Kugel über PQ als Durchmesser die Raumkurve C_3 ausser in P noch in fünf Punkten schneidet und die drei unendlich fernen Punkte von C_3 liefern die unendlich ferne Ebene als dreifache Tangentialebene. Diese developpable Fläche fünfter Klasse C'_5 hat mit der Fläche zweiten Grades zehn Tangentialebenen gemeinsam, nämlich die sechs Tangentialebenen in den Fusspunkten der sechs Normalen und ausserdem die vier Tangentialebenen des Asymptotenkegels durch die Fusspunkte der vier Lote von P auf den Kegel. Ersetzt man die Fläche zweiten Grades durch irgend eine andere mit demselben, reellen oder imaginären, Asymptotenkegel, so bleibt für denselben Punkt P die zur neuen Fläche gehörige Raumkurve C_3 und auch die developpable Fläche C'_5 unverändert. C_3 enthält die Fusspunkte aller Gruppen von sechs Normalen von P auf die Flächen des entstehenden Büschels und C'_5 enthält alle Gruppen der sechs Tangentialebenen in den Fusspunkten auf jeder Fläche.

Die sechs Normalen von einem Punkte P nach einer Fläche zweiten Grades können noch auf eine andere Weise gefunden werden. Eine beliebige Gerade g durch P bestimmt die normale Stellung g^* in der unendlich fernen Ebene und die konjugierte Gerade g' in der Polarebene von P in bezug auf die Fläche. Liegen g^* und g' in einer Ebene, d. h. sind g und g' windschief normal, und ist die Ebene (g^*, g') Tangentialebene der Fläche, so ist der Berührungspunkt der Fusspunkt einer Normalen g von P nach der Fläche. Die beiden Geraden g^*, g', von denen g^* die unendlich ferne Ebene und g' die Polarebene von P beschreibt, sind projektivisch auf einander bezogen; die beiden projektivischen Strahlenebenen erzeugen daher eine developpable Fläche dritter Klasse K_3. Die sechs gemeinsamen Tangentialebenen dieser Fläche K_3 mit der Fläche zweiten Grades sind die Tangentialebenen in den Fusspunkten der sechs Normalen. Die Fläche K_3 berührt ausser diesen sechs Tangentialebenen die Symmetrieebenen der Fläche zweiten Grades, ferner die unendlich ferne Ebene und die Polarebene von P; die developpable Fläche K_3 ist die Polarfläche der früher betrachteten Raumkurve C_3, die durch P und die Fusspunkte der Normalen auf der Fläche zweiten Grades geht. Die Fläche K_3 berührt auch folgende vier Ebenen. Man fälle von P auf den Kegelschnitt der Fläche zweiten Grades, der in der Polarebene von P liegt, die vier Lote; dann gibt es durch jeden Fusspunkt eine Ebene, die auf der Geraden von P nach dem Fusspunkt senkrecht steht und das sind die vier Ebenen. Jedes der vier Lote ist nämlich konjugiert zu der auf ihm in seinem Fusspunkt senkrechten Tangente des Kegelschnittes. Schneidet man irgend eine Tangentialebene der developpablen Fläche dritter Klasse K_3 mit den andern Tangentialebenen, so umhüllen die Schnittlinien bekanntlich einen Kegelschnitt. Schneidet man also beispielsweise die Polarebene des Punktes P in bezug auf die Fläche zweiten Grades mit ihren sechs Tangentialebenen in den Fusspunkten der sechs Normalen, ferner mit den drei Symmetrieebenen der Fläche, ferner mit der unendlich fernen Ebene und mit den vier oben angegebenen besonderen Ebenen, so erhält man vierzehn Tangenten einer Parabel. Analog für die Symmetrieebenen und die unendlich ferne Ebene. Man bilde jetzt die Fusspunktskurve von P in bezug auf die developpable Fläche K_3. Diese Fusspunktskurve ist eine Raumkurve fünfter Ordnung K'_5; denn das Rotationsparaboloid mit P als Brennpunkt und einer beliebigen Ebene als Scheiteltangentialebene hat mit K_3 ausser der unendlich fernen Ebene fünf Tangentialebenen gemeinsam, d. h. K'_5 schneidet eine beliebige Ebene in fünf Punkten. Die Raumkurve fünfter Ordnung K'_5 schneidet die Fläche zweiten Grades in zehn Punkten, nämlich in den sechs Fusspunkten der Normalen von P nach der Fläche und in den vier Fusspunkten der Lote von P auf den Kegelschnitt der Fläche in der Polarebene von P.

Hält man den Punkt P und den Kegelschnitt fest, ändert die Fläche zweiten Grades, aber so, dass der Kegelschnitt Polarkegelschnitt von P bleibt, so ändert sich die developpable Fläche K_3 nicht und damit auch die Raumkurve K'_5 nicht; denn K_3 ist durch die Ebene des Kegelschnittes, die unendlich ferne Ebene und die vier erwähnten besonderen Ebenen, als durch sechs Ebenen bestimmt. Die Flächen zweiten Grades selbst bilden ein Büschel von Flächen, die sich längs des Kegelschnittes berühren. Zieht man von P aus nach jeder Fläche des Büschels die Normalen, so liegen die sechs Fusspunkte stets auf der Raumkurve fünfter Ordnung K'_5 und die sechs Tangentialebenen in den Fusspunkten gehören stets der developpablen Fläche dritter Klasse K_3 an. Dieser Fläche K_3 gehören auch alle Gruppen der drei Symmetrieebenen der Flächen des Büschels an. Die Mittelpunkte der Flächen liegen auf der Geraden durch P und den Mittelpunkt des Kegelschnittes. Zu den Flächen des Büschels gehört auch die Kegelfläche von P nach dem Kegelschnitt, längs dessen sich die Flächen des Büschels berühren. Die Symmetrieebenen dieser Kegelfläche sind ebenfalls Ebenen der Fläche K_3; die Kurve K'_5 hat in P einen dreifachen Punkt. Ersetzt man die ursprüngliche Fläche zweiten Grades durch eine konfokale Fläche und legt von P den Tangentialkegel an die konfokale Fläche, so hat er bekanntlich dieselben Symmetrieebenen wie der vorige Tangentenkegel; die konfokale Fläche hat dieselben Symmetrieebenen wie die ursprüngliche Fläche zweiten Grades. Durch die sechs Symmetrieebenen von Kegel und Fläche zweiten Grades ist aber die developpable Fläche K_3 bestimmt, d. h. zu jeder der zwei konfokalen Flächen und P gehört dieselbe Fläche K_3 und also auch dieselbe Kurve K'_5. Hat man ein System konfokaler Flächen zweiten Grades und zieht von einem Punkte P die Normalen nach jeder der Flächen, so liegen die Fusspunkte auf einer Raumkurve fünfter Ordnung K'_5; auf dieser Kurve liegen auch die Fusspunkte der Lote von P auf die Fokalkegelschnitte der Schar, weil diese Kegelschnitte spezielle Flächen der Schar repräsentieren, ferner die Fusspunkte der Lote von P auf die Polarkegelschnitte von P in bezug auf die Flächen der Schar und ebenso die Fusspunkte der Lote von P auf die Polarebenen von P. Die Gesamtheit dieser Polarebenen bildet die developpable Fläche K_3, der auch alle Gruppen von sechs Tangentialebenen angehören, die in den sechs Fusspunkten der Normalen auf jede einzelne Fläche an die Fläche gelegt werden können. Durch jede Gruppe von sechs Fusspunkten ist eine Raumkurve dritter Ordnung bestimmt; alle diese Raumkurven haben fünf Punkte gemeinsam, nämlich P, den Mittelpunkt der konfokalen Fächen und die unendlich fernen Punkte ihrer Achsen. Denkt man sich den Polarkegelschnitt von P nach irgend einer der konfokalen Flächen genommen, so gibt es ein Büschel von Flächen zweiten Grades, welche die unter den konfokalen Flächen gewählte Fläche längs des Kegelschnittes berühren. Für alle Flächen dieses Büschels bleibt die Fläche K_3 dieselbe und ebenso die Kurve K'_5; denn die Symmetrieebenen des Tangentenkegels und die früher erwähnten besondern Ebenen des Polarkegelschnittes bestimmen K_3. Wird endlich irgend eine Fläche des Büschels durch irgend eine konfokale Fläche ersetzt, so ändern sich K_3 und K'_5 wieder nicht; denn die zwei konfokalen Flächen haben dieselben Symmetrieebenen, ebenso die zwei zugehörigen Tangentenkegel und die sechs Ebenen bestimmen K_3.

Bemerkung. Bekanntlich gehen in einer Ebene von einem Punkt P nach einem Kegelschnitt vier Normalen; die vier Fusspunkte liegen auf einer gleichseitigen Hyperbel, die auch die Fusspunkte der Lote von P auf die Asymptoten des gegebenen Kegelschnittes enthält. Die vier Tangenten in den Fusspunkten der Normalen berühren eine Parabel, welche auch diejenigen zwei Normalen des Kegelschnittes berührt, die zu den Berührungspunkten der Tangenten von P aus gehören. Gleichseitige Hyperbel und Parabel sind Polarkegelschnitte in bezug auf den gegebenen Kegelschnitt. Die Fusspunktskurve von P für die Parabel ist eine Kurve dritter Ordnung mit Doppelpunkt in P, die durch die vier Fusspunkte der Normalen und die Berührungspunkte der Tangenten von P an den gegebenen Kegelschnitt und seine Brennpunkte geht. Die negative Fusspunktskurve der gleichseitigen Hyperbel ist eine Kurve dritter Klasse, welche die unendlich ferne Gerade zur Doppeltangente hat, die vier Tangenten in den Fusspunkten der Normalen und auch die Asymptoten des gegebenen Kegelschnittes zu Tangenten hat. Ersetzt man den Kegelschnitt durch irgend einen andern mit denselben Asymptoten, so bleibt die gleichseitige Hyperbel dieselbe, auf welcher die Fusspunkte der Normalen liegen und ebenso bleibt die Kurve dritter Klasse dieselbe, so dass sie also die Enveloppe aller Gruppen von vier Tangenten in den jeweiligen Fusspunkten der Normalen ist; die zu den Tangentengruppen gehörigen Parabeln haben die Gerade durch P und den Mittelpunkt des gegebenen Kegelschnittes zur Leitlinie und die gemeinsamen Symmetrielinien der Kegelschnitte zu Tangenten. Legt man von dem Punkt P an den gegebenen Kegelschnitt Tangenten und hält sie mit den Berührungspunkten fest, während der Kegelschnitt sich ändert, so entsteht ein Büschel von sich doppelt berührenden Kegelschnitten. Zu jedem Kegelschnitt gehört dieselbe Parabel und dieselbe Kurve dritter Ordnung. Die Gruppen der vier Tangenten in den Fusspunkten der Normalen nach den Kegelschnitten des Büschels berühren alle dieselbe Parabel, die auch die Achsen aller Kegelschnitte berührt, und die Gruppen der vier Fusspunkte liegen auf der Kurve dritter Ordnung, die auch die Brennpunkte aller Kegelschnitte des Büschels enthält. Die Parabel und die Kurve dritter Ordnung bleiben auch dieselben, wenn irgend ein Kegelschnitt des Büschels durch einen konfokalen ersetzt wird, ferner wenn an einen der letztern wiederum von P aus Tangenten gezogen werden und ein Kegelschnitt genommen wird, der die Tangenten in den Berührungspunkten berührt, oder wenn zu einem dieser Kegelschnitte wieder ein konfokaler genommen wird. Die Kurve dritter Ordnung kann auch auf andere Art erzeugt werden, z. B. durch zwei projektivische Strahleninvolutionen, die entstehen, wenn man von den zwei Brennpunkten irgend eines der aufgetretenen Kegelschnitte an die konzentrischen Kreise um P Tangentenpaare legt, oder indem man die Brennpunkte von zwei der Kegelschnitte kreuzweise verbindet und den Ort eines Punktes sucht, von dem aus die Verbindungslinien unter gleichen Winkeln erscheinen. Die Kurve hat auch mancherlei Eigenschaften. Legt man z. B. durch P den zum gegebenen Kegelschnitt konzentrischen, ähnlichen und ähnlich gelegenen Kegelschnitt, so schneidet er die Kurve ausser in P in vier Punkten, deren Verbindungslinien mit P Sehnen extremer Länge des gegebenen Kegelschnittes enthalten.