

# Elastische Oberflächenwellen mit Dispersion in einem inhomogenen Medium.<sup>1)</sup>

Von

ERNST MEISSNER.

(Als Manuskript eingegangen am 12. März 1921.)

Die seismologischen Aufzeichnungen unserer Bebenwarten stellen dem Beobachter eine Reihe von Rätselfragen, deren Lösung für die Erforschung der elastischen Natur des Erdballs von grösster Bedeutung ist. Die theoretische Elastizitätslehre kann feststellen, was für Erscheinungen unter gegebenen einfachen Verhältnissen zu erwarten sind. Sie erklärt die beiden Vorläuferwellen als die direkt durch das Erdinnere fortgepflanzten Störungen, während sie die grossen Wellen des Hauptbebens als Oberflächenwellen deutet. Indessen zeigt der verwickelte Verlauf der Nahbebenaufzeichnungen, dass die wahren Verhältnisse jedenfalls nicht einfach sind, und die neuerdings<sup>2)</sup> überraschend deutlich festgestellten identischen Aufzeichnungen verschiedener Beben vom selben Herd machen es wahrscheinlich, dass daran die komplizierte Struktur der Erdrinde einen wesentlichen Anteil hat. Wenn hier ein theoretisches Erfassen der Erscheinung noch in weiter Ferne liegt, so erscheint die Analyse von Fernbebendiagrammen etwas hoffnungsvoller. Diese zeigen in ihrer Maximalphase Wellenzüge von bemerkenswerter Regelmässigkeit.<sup>3)</sup> Deutet man sie als Rayleighsche Oberflächenwellen, so steht das beobachtete Verhältnis von Horizontal- und Vertikalbewegung damit nicht in Einklang und auch nicht die Tatsache, dass wenigstens zu Beginn der Maximalphase die Bewegung normal zur Ausbreitungsrichtung in der Oberfläche erfolgt. Der fühlbarste Mangel dieser Auffassung liegt aber darin, dass die Oszillationen der Bodenbewegung nicht erklärt werden. Deren Ursache in der Erregung oder der Reflexion zu suchen, geht für diese regelmässigen Wellenzüge

<sup>1)</sup> Vergl. Actes Soc. helv. Sc. nat. Neuchâtel 1920.

<sup>2)</sup> A. de Quervain u. A. de Weck. *ibid.* loc.

<sup>3)</sup> Vergl. die Diagramme in Galitzin: Vorl. ü. Seismometrie. Leipzig 1914 S. 110 u. 389.

kaum an. Ihre Gesetzmässigkeiten deuten vielmehr auf Dispersion. Wenn die Rayleigh'schen Wellen eine Dispersion nicht zeigen, so liegt das daran, dass ihnen die Annahme eines homogenen Erdkörpers zugrunde liegt. Schon wenn man über dem homogenen Erdkern eine homogene Rindenschicht annimmt, die andere elastische Eigenschaften hat, stellt sich in der Theorie die Dispersion ein, wie A. E. H. Love gezeigt hat.<sup>1)</sup>

Nun ist die elastische Inhomogenität eine der wenigen Tatsachen, die die Seismologie mit Sicherheit festgestellt hat. Wir wissen aus den Laufzeitkurven der beiden Vorläufer, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit sowohl für Kondensations- wie für Torsionswellen mit der Tiefe zunimmt nach einem Gesetz, das für die ersten 1200 km nahezu linear ist.<sup>2)</sup> Es stellt sich daher die Frage, wie es sich für ein derartig beschaffenes Medium mit den Oberflächenwellen verhält, die ja, weil die Energie nur nach zwei Seiten streuend, für Fernbeben die Hauptrolle spielen.

Es ist Zweck dieser Arbeit, den Nachweis zu führen, dass (unter den erwähnten, der Wirklichkeit angepassten Voraussetzungen über das Erdinnere) Oberflächenwellen von reinem Torsionscharakter existieren, Wellen, die horizontal und normal zur Fortpflanzungsrichtung schwingen, und die daher als Querwellen bezeichnet werden sollen. Es wird ausserdem gezeigt, dass diese Wellen Dispersion aufweisen, und unter bestimmten Annahmen wird geradezu das Dispersionsgesetz numerisch berechnet.

Zu bemerken bleibt, dass das Problem insofern noch nicht eindeutig ist, als neben der Änderung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit auch noch die Dichteänderung mit der Tiefe von Bedeutung ist.

### Querwellen.

Ein elastischer Halbraum sei begrenzt durch die unendliche Halbebene  $z=0$ ; die  $+z$ -Axe weise in sein Inneres. Wir untersuchen ebene Wellen in der  $x-z$ -Ebene, die sich in der  $x$ -Richtung fortpflanzen. Reine Torsionswellen erhalten wir, wenn wir die elastische Verschiebung parallel zur  $y$ -Richtung, d. h. normal zur  $xz$ -Ebene voraussetzen. Entsprechend diesen Annahmen setzen wir

$$\eta = Z(z) \cdot \cos(p \cdot t - f \cdot x) \quad (1)$$

<sup>1)</sup> A. E. H. Love, Some Problems of Geodynamics, Cambridge 1912. Art. 176.

<sup>2)</sup> Galitzin, loc. cit. S. 139.

Es ist dann

$$L = \frac{2\pi}{f} \quad V = \frac{p}{f} \quad T = \frac{2\pi}{p} \quad (2)$$

wenn  $L$  die Länge,  $V$  die Laufgeschwindigkeit,  $T$  die Schwingungsdauer der Welle bezeichnet. Es treten keine Dehnungen auf und die Schiebungen berechnen sich aus

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial \eta}{\partial z} \quad \gamma_{zx} = 0$$

Hieraus folgen die Schubspannungen in Elementen parallel den Koordinatenebenen

$$\tau_{xy} = G \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad \tau_{yz} = G \frac{\partial \eta}{\partial z} \quad \tau_{zx} = 0 \quad (3)$$

Dabei ist  $G$  der Torsionsmodul. Wir nehmen an, dass er Funktion der Tiefe  $z$  sei. Wenn nun noch  $\rho(z)$  die Dichte des Mediums bedeutet, lautet die Bewegungsgleichung für das Medium

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

oder nach Einsetzen von (1) und (2)

$$G \cdot (Z') + Z \cdot (\rho \cdot p - f \cdot G) = 0 \quad (I)$$

Es treten hiezu die Randbedingungen:

1) Die freie Oberfläche muss spannungsfrei sein.  $\tau_{yz}$  muss für  $z = 0$  verschwinden. Dies gibt

$$Z'(0) = 0 \quad (Ia)$$

2) Es darf die Welle nur oberflächlich verlaufen. Daraus folgt

$$\lim_{z \rightarrow \infty} Z(z) = 0 \quad (Ib)$$

In der Annahme der Funktionen  $G(z)$  und  $\rho(z)$  sind wir nicht ganz frei, wenn wir mit den Beobachtungen in Übereinstimmung bleiben wollen. Denn es ist

$$v(z) = \sqrt{\frac{G(z)}{\rho(z)}}$$

<sup>1)</sup> Akzente bedeuten Ableitungen nach  $z$ .

die aus der Laufzeitkurve bekannte Ausbreitungsgeschwindigkeit der Torsionsstörungen in der Tiefe  $z$ . Annähernd ist  $v(z)$  linear in  $z$ . Indessen kommt für oberflächlich verlaufene Wellen, wie die Querwellen wesentlich in Betracht nur der Verlauf von  $v(z)$  bis zu einer Tiefe, die von der Grössenordnung der Wellenlängen ist, also 200 km nicht übersteigt. Innerhalb dieses Bereiches aber darf das lineare Gesetz auch durch ein anderes ersetzt werden, das davon genügend wenig abweicht. Eine ausführlichere Untersuchung, die vorbehalten wird, kann Genaueres darüber aussagen, inwiefern die Dispersionskurve von Variationen in den Funktionen  $G(z)$  und  $q(z)$  beeinflusst wird. Es lässt sich voraussehen, dass für kurze Wellen dieser Einfluss unbedeutend ist.

Um an einem bestimmten Fall die allgemeinen Verhältnisse darzustellen, machen wir jetzt die Annahme

$$G = G_0 \cdot (1 + \delta z)^2 \quad q = q_0 (1 + \delta z), \quad (1)$$

so dass sich für die Geschwindigkeit  $v$  der Torsionswellen mit der Tiefe das Gesetz ergibt

$$v = v_0 \cdot (1 + \delta z)^{1/2} \quad v_0 = \sqrt{\frac{G_0}{q_0}} = \text{Oberflächengeschwindigkeit} \quad (2)$$

Setzt man jetzt noch

$$z = \frac{f}{\delta} \cdot (1 + \delta z)$$

und bezeichnet man Ableitungen nach dieser neuen Veränderlichen mit Punkten, so erhält man aus (I)

$$z \ddot{Z} + 2 \dot{Z} + (s - z) Z = 0 \quad (II)$$

wobei noch abkürzend gesetzt ist

$$s = \frac{f}{\delta} \cdot \frac{V^2}{v_0^2} \quad (3)$$

Die zu erfüllenden Grenzbedingungen lauten:

$$\dot{Z} \left( \frac{f}{\delta} \right) = 0 \quad (IIa)$$

$$\text{Limes } Z = 0 \quad (IIb) \\ \xi = +\infty$$

1) Vergl. Math. Enzykl. II B. 5. E. Hilb, Art. 5.

Nach allgemeinen, von Poincaré u. a.<sup>1)</sup> herrührenden Sätzen hat (II) ein und nur ein Integral, das sich asymptotisch wie  $e^{-\zeta} \cdot \zeta^{\frac{s}{2}-1}$  verhält, wenn  $\zeta$  im Reellen nach  $+\infty$  läuft. Nennen wir es  $Z_1$ . Es erfüllt (IIb) und es bleibt nur noch zu zeigen, dass auch (IIa) erfüllt werden kann, was weiter unten geschehen soll.

Ist nun  $\zeta$  eine Wurzel von  $\dot{Z}(\zeta) = 0$ , so hängt  $\zeta$  parametrisch von  $s$  ab. Nach (3) wird nun

$$\frac{V^2}{v_o^2} = \frac{s}{\zeta} \qquad \delta L = \frac{2\pi}{\zeta} \qquad (4)$$

Man gewinnt mithin durch Elimination von  $s$  einen Zusammenhang zwischen  $V$  und  $L$ . Verschieden lange Wellen laufen verschieden rasch. Die untersuchten Oberflächenwellen zeigen Dispersion und die Gleichungen (4) enthalten das Dispersionsgesetz.

Alle vorkommenden Wellengeschwindigkeiten übertreffen den Oberflächenwert  $v_o$  der Torsionswellengeschwindigkeit. Dies lässt sich so zeigen: Ist  $\zeta$  irgend eine Nullstelle für  $\dot{Z}$ , für die  $Z$  und  $\dot{Z}$  verschiedene Vorzeichen haben, so ist wegen (II) sicher

$$\zeta < s \qquad (5)$$

Oberhalb  $\zeta = s$  können sich also ausschliesslich Nullstellen befinden, für die  $\dot{Z}:Z$  positiv ausfällt. Solche sind aber wegen (IIb) ausgeschlossen. Es gibt demnach eine grösste Wurzel von (Ia) und sie liegt unterhalb  $s$ . Aus (4) schliesst man dann

$$V > v_o .$$

### Die polynomischen Lösungen.

Ein Integral der Gleichung (II) ist von der Form

$$Z = e^{-\zeta} \lim_{h \rightarrow 0} F\left(\frac{1}{h}, -\frac{s}{2} + 1, 2, 2h\zeta\right)$$

wo  $F$  die hypergeometrische Reihe bedeutet. Ist  $n$  eine ganze positive Zahl und

$$s = 2(n + 1)$$

so wird

$$Z_1 = e^{-\zeta} \left( 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(-n)(-n+1)\dots(-n+k-1)}{k!(k+1)!} (2\zeta)^k \right) \qquad (6)$$

eine Lösung, die der Bedingung (IIb) genügt. Auch (IIa) kann erfüllt werden; denn nach Sätzen von Hurwitz u. a.<sup>1)</sup> sind die sämtlichen Nullstellen von  $Z$  und damit auch die von  $\dot{Z}$  positiv reell.

Es ist ein wesentlicher Unterschied festzustellen in den Wellen, die zu verschiedenen Wurzeln von  $\dot{Z} = 0$  gehören. Bezeichnen wir sie in absteigender Grössenfolge geordnet mit

$$z_0, z_1, z_2, \dots, z_k \dots$$

so wird für die  $z_k$  zugeordnete Welle  $W_k$   $Z$  und damit  $\tau_{yz}$  im Gebiet  $z > 0$   $k$  mal verschwinden, nämlich in denjenigen Ebenen  $z = z_{ik}$ , die durch

$$z_i = z_k (1 + \delta z_{ik}) \quad i < k$$

bestimmt sind. Diese Ebenen sind spannungsfrei und die Intensität der Bewegung hat dort ein Maximum. Da zwischen je zwei Werten  $z_i$  eine Nullstelle von  $Z = 0$  liegt, so treten bei der Welle  $W_k$  auch  $k$  Knotenebenen auf, wo die elastische Verschiebung dauernd verschwindet. Ein asymptotisches Ausklingen der Bewegung nach unten findet erst von der Tiefe  $z_{ok}$  aus statt. Die Welle dringt also um so tiefer ins Innere des elastischen Halbraums ein, je grösser die Zahl der Knotenebenen ist. Ausser für recht kleine Wellenlängen werden also nur die Wellen  $W_0$  ohne Knotenebenen, die gleich von der Oberfläche an abklingen, für die Seismologie in Betracht fallen; denn nur sie verlaufen genügend oberflächlich, um von dem ja nie tief liegenden Herd aus erregt werden zu können. Bei der numerischen Berechnung des Dispersionsgesetzes wird man daher sie vor allem zu berücksichtigen haben.

In der folgenden Tabelle sind die Werte der  $z_k$  zusammengestellt, die sich aus (6) für die polynomischen Lösungen niedrigsten Grades ergeben.

$n$	$s = 2 \cdot (n + 1)$	$z_0$	$z_1$	$z_2$	$z_3 \dots$
1	4	2	—	—	—
2	6	3,823	1,177	—	—
3	8	5,669	2,476	0,855	—
4	10	7,534	3,899	1,892	0,675
5	12	9,413	—	—	—
6	14	11,301	—	—	—

Für die  $W_0$ -Welle ( $z_0$ ) ergeben sich aus der ersten Kolonne die folgenden Wellenlängen und Laufgeschwindigkeiten:

<sup>1)</sup> Hurwitz, Über die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe. Math. Annalen, XXXVIII.

$n =$	1	2	3	4	5	6
$V/v_0 =$	1,414	1,253	1,188	1,152	1,129	1,113
$\delta L =$	3,142	1,644	1,108	0,832	0,667	0,556

Für den Fall der Bebenwellen ist  $\delta$  über  $700 \text{ km}^{-1}$ . Es wird daher die kürzeste der hier berechneten Wellen ca.  $400 \text{ km}$  lang. Für das Bebenproblem kommen diese Wellen, weil zu lang, alle nicht in Betracht. Indessen zeigen sie schon recht deutlich den Verlauf der Dispersionskurve (L-V) für grosse Wellenlängen. Für die praktisch auftretenden Wellen wird der Grad der zu lösenden Gleichungen so hoch, dass man numerisch auf diesem Wege nicht mehr viel weiter kommt. Wie alsdann vorzugehen ist, zeigt der nächste Abschnitt.

Asymptotische Entwicklungen der Funktion  $Z_1(\zeta)$  für grosse  $\zeta$ . Methode der Integration über Pässe.

Auf die Gleichung (II) kann mit Vorteil die Laplacesche Transformation<sup>1)</sup> angewandt werden. Man findet so als eine Lösung das Integral

$$I = \int e^{\zeta w} \frac{(w-1)^{s/2}}{(w+1)^{s/2}} dw, \tag{7}$$

das in der komplexen  $w = u + iv$ -Ebene zu erstrecken ist. Wir setzen  $\zeta$  reell und grösser als null voraus und wählen den Integrationsweg so, dass er parallel zur negativen  $u$ -Axe aus dem Unendlichen kommt, den Verzweigungspunkt  $w = -1$  umschlingt, aber  $w = +1$  ausschliesst und dann wieder parallel zur negativen  $u$ -Axe ins Unendliche zurückläuft (Fig. 1). Genauer: Es soll für die beiden ins Unendliche verlaufenden Enden gelten:

$$\lim u = -\infty \quad \lim v = \text{konstant} \tag{8}$$

Die erste dieser Forderungen sichert die Konvergenz des Integrals. Welche Form im übrigen der Integrationsweg hat, ist für den Wert von (7) bekanntlich gleichgültig.

Es wird nun zunächst der Nachweis zu führen sein, dass (7) dasjenige Integral von (II) ist, das der Bedingung (IIb) genügt. Wir haben daher zu ermitteln, wie es sich für grosse Werte von  $\zeta$  verhält.

In Übereinstimmung damit setzen wir daher zunächst voraus:

$$\zeta > s$$

<sup>1)</sup> Math. Enzykl. II. B. 5. art. 22.

Auf das Integral (7) wird nun die auf Riemann zurückgehende Methode der Integration über Pässe angewendet, was zu einer für unsere Frage brauchbaren asymptotischen Entwicklung führen wird. Es ist (7) von der Form

$$J = \int e^{f(w; \zeta)} dw = \int e^{U+iV} dw$$

mit  $f(w; \zeta) = U + iV = \zeta w + \frac{s}{2} \lg(w-1) - \frac{s}{2} \lg(w+1)$

$$U = \zeta u + \frac{s}{2} \lg \frac{r_1}{r_2} \qquad V = \zeta v + \frac{s}{2} (\varphi_1 - \varphi_2) = \zeta v + \frac{s}{2} \omega$$

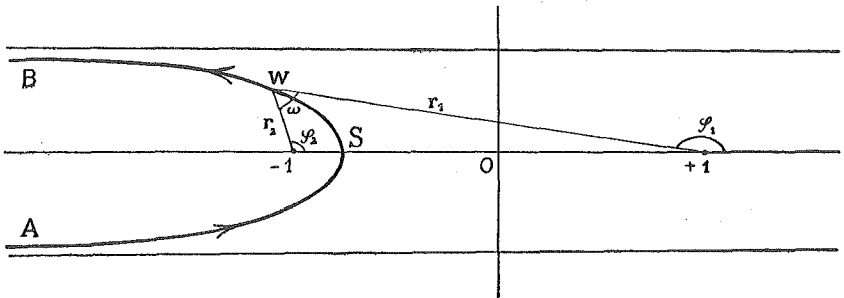


Fig. 1.

Wegen (8) ist  $U$  im Unendlichen am Anfang und am Ende des Weges negativ unendlich. Nach Riemann wird nun der Integrationsweg so gewählt, dass der Realteil  $U$  von  $f(w)$  möglichst schnell ansteigt resp. abfällt. Das ist der Fall, wenn längs  $C$  der Imaginärteil  $V$  konstant ist. Dieser Weg läuft durch die aus

$$\frac{df}{dw} = 0 = \zeta + \frac{s}{w^2 - 1}$$

ermittelten Sattelpunkte

$$w = \pm \sqrt{1 - \frac{s}{\zeta}} \tag{9}$$

die in unserm Fall ( $\zeta > s$ ) auf der reellen Axe symmetrisch zu 0 zwischen  $-1$  und  $+1$  liegen. Die Form und Konstruktion des Weges (Fig. 1) folgt aus der Gleichung

$$\zeta v + \frac{s}{2} \omega = \frac{s}{2} \pi \tag{10}$$



Er besteht aus zwei zur  $v$ -Axe symmetrischen Schlaufen, die die Asymptoten  $v = \pm \frac{s\pi}{2\zeta}$  besitzen. Als Integrationsweg kommt nur die links gelegene in Betracht, die den Sattelpunkt  $S$

$$w_0 = -\sqrt{1 - \frac{s}{\zeta}} = -\xi$$

enthält.

Auf dem Integrationswege  $A S B$  ist jetzt

$$t = f(w_0) - f(w)$$

eine reelle Veränderliche, die von  $+\infty$  nach 0 und nach  $+\infty$  zurückgeht, wenn der Weg von  $A$  nach  $S$  und  $B$  durchlaufen wird.  $t$  wird als Integrationsvariable gewählt. Jetzt ist in

$$J = e^{f(w_0)} \int e^{-t} dw \tag{11}$$

$dw$  als Funktion von  $t$  auszudrücken. Man erkennt, dass nur der Teil des Integrationsweges in der Nähe des Sattelpunktes  $t = 0$  einen wesentlichen Beitrag an das Integral gibt und man gründet hierauf eine asymptotische Entwicklung, indem man Reihenentwicklungen in der Umgebung von  $t = 0$  benützt. Nach Taylor ist

$$t = -f''(w_0) \frac{(w-w_0)^2}{2} [1 + \dots] \tag{12}$$

wo Punkte (wie im folgenden) weitere Glieder der Reihenentwicklung andeuten. Daraus folgt

$$w - w_0 = \pm \sqrt{t} \sqrt{\frac{2}{f''(w_0)}} e^{\frac{i\pi}{2}} [1 + \dots] = \pm \sqrt{t} \sqrt{\frac{s}{2\zeta^2\xi}} i [1 + \dots]$$

$$dw = \pm \frac{i}{\sqrt{t}} \sqrt{\frac{s}{2\zeta^2\xi}} dt [1 + \dots]$$

Legt man den Wurzeln rechter Hand ihren Absolutwert bei, so entspricht dem positiven Vorzeichen ein Fortschreiten von  $S$  aus gegen  $B$  hin, dem negativen ein Fortschreiten in der Richtung  $S A$ . Es ist

$$J = f_A^S + f_S^B = f_S^B - f_S^A \tag{13}$$

Beachtet man, dass

$$f(w_0) = -\zeta \xi + \frac{s}{2} \lg \frac{1+\xi}{1-\xi} + \frac{is\pi}{2} \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\pi} \tag{14}$$

so ergibt sich

$$J = 2 e^{-\zeta \xi + \frac{s}{2} \operatorname{tg} \frac{1+\xi}{1-\xi} + \frac{i\pi}{2}(s+1)} \frac{1}{\zeta} \sqrt{\frac{s\pi}{2}} [1 + \dots]$$

und da  $\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \xi = 1$   $\lim_{\zeta \rightarrow \infty} 1 - \xi = \frac{s}{2\zeta}$

so wird für sehr grosses  $\zeta$

$$J \propto \text{konst. } e^{-\zeta} \zeta^{\frac{s}{2}-1}$$

was beweist, dass (7) die Bedingung (IIb) erfüllt.

### Asymptotische Entwicklung der Funktion $Z(\zeta)$ für den Fall $\zeta < s$ .

Kurze Wellen von der Länge der Bebenwellen und darunter gehören zu sehr grossen Werten von  $s$ . Es ist praktisch unmöglich, für dieses Gebiet etwa aus den polynomischen Lösungen numerisch die Dispersionskurve zu berechnen. Um die Nullstellen von (IIa) zu finden, werden wir vielmehr eine asymptotische, für sehr grosses  $s$  geltende, Entwicklung von  $Z(\zeta)$  gebrauchen, die unter der Annahme

$$\zeta < s \tag{5}$$

Gültigkeit hat.

Alsdann modifizieren sich die Entwicklungen des vorigen Abschnittes in wesentlichen Punkten.

Zunächst fallen die Sattelpunkte  $S_1, S_2$  wegen (9) jetzt auf die imaginäre Axe  $v$  und zwar in die Abstände

$$\eta = \sqrt{\frac{s}{\zeta} - 1}$$

von 0. Wir setzen in Übereinstimmung mit (4) und (5)

$$\frac{v_0^2}{V^2} = \frac{\zeta}{s} = \cos^2 \alpha \tag{15}$$

demnach

$$\eta = \operatorname{tg} \alpha$$

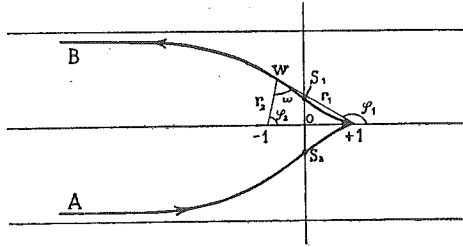


Fig. 2.

Auf dem Integrationsweg, der durch  $S_1$  und  $S_2$  geht, soll wieder der Imaginärteil von  $f(z)$  konstant sein. Dies führt jetzt zur Gleichung

$$z v + \frac{s}{2} \omega = z \eta + \frac{s}{2} \omega_0 \text{ resp. } z v + \frac{s}{2} \omega_0 = -z \eta + \frac{s}{2} (2\pi - \omega_0)$$

Die hiedurch definierte Kurve liegt zu den Koordinatenachsen  $u, v$  symmetrisch und hat die Asymptoten

$$v = \pm \left( \eta + \frac{s \omega_0}{2 z} \right)$$

Wir benützen von ihr als Integrationsweg nur die in Fig. 2 angegebenen Bogen  $A S_2 + 1$  und  $+ 1 S_1 B$ , die wir in der unmittelbaren Nähe von  $+ 1$  so mit einander verbinden, dass sie eine  $+ 1$  ausschliessende Schleife bilden, die an die Stelle der früher verwendeten treten kann. Auf dem oberen Bogen wird als Integrationsvariable gewählt

$$t = + f(i \eta) - f(w)$$

$t$  geht von  $+\infty$  nach null und  $+\infty$ , wenn er von  $+ 1$  nach  $S_1$  und  $B$  durchlaufen wird. Wieder liefert die Umgebung von  $S_1$  den Hauptbeitrag an das Integral

$$J_1 = e^{f(i\eta)} \cdot f e^{-t} dw$$

Die Abrundung des Integrationsweges in  $+ 1$  ist daher ohne Belang. Man hat analog zu früherem

$$dw = \frac{dt}{\sqrt{t}} e^{\frac{3i\pi}{4}} \cdot \frac{1}{2 \cos^2 \alpha \sqrt{s \eta}} \left( \pm 1 + a_1 t^{1/2} \pm b_1 t + \dots \right)$$

wobei  $a_1 \cdot b_1$  eindeutige Koeffizienten bedeuten.

Nimmt man die Wurzeln absolut, so entspricht dem  $+$  Zeichen ein Fortschreiten von  $S_1$  aus nach  $B$ , dem  $-$  Zeichen nach  $+ 1$  hin.

Dementsprechend erhält man für das Integral  $J_1$  längs  $+1 S_1 B$

$$J_1 = e^{f(i\eta) + \frac{3i\pi}{4}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha \cdot \sqrt{s\eta}} \cdot \int_0^\infty \frac{e^{-t} dt}{\sqrt{t}} (1 + b_1 \cdot t + \dots)$$

wo sich für  $b_1$  errechnet:

$$b_1 = \frac{1}{12s} \frac{(3 - 2 \cos^2 \alpha)^2 + 4 \cos^4 \alpha}{\sin^3 \alpha \cdot \cos \alpha} \cdot e^{\frac{i\pi}{4}} = +i \frac{2\beta}{s} \tag{16}$$

und nötigenfalls weitere Glieder bestimmt werden können.

Das Integral  $J_2$  längs  $A S_2 + 1$  wird nach den Variablen

$$t = f(-i\eta) - f(w)$$

entwickelt. Es wird

$$J_2 = e^{f(-i\eta)} \cdot \int e^{-t} dw$$

$$dw = \frac{dt}{\sqrt{t}} e^{\frac{\pi i}{4}} \cdot \frac{1}{2 \cos^2 \alpha \cdot \sqrt{s\eta}} (\pm 1 + a_2 t^{1/2} \pm b_2 t + \dots)$$

wobei das  $+$  oder das  $-$  Zeichen gilt, je nachdem von  $S_2$  aus gegen  $+1$  oder gegen  $A$  zu integriert wird. So kommt für  $J_2$

$$J_2 = e^{f(-i\eta) + \frac{\pi i}{4}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha \cdot \sqrt{s\eta}} \int_0^\infty \frac{e^{-t} dt}{\sqrt{t}} (1 + b_2 t + \dots)$$

mit  $b_2 = -b_1$ .

Beachtet man nun, dass

$$f(i\eta) = i(2\eta + \frac{s}{2}\omega_0)$$

$$f(-i\eta) = -f(i\eta) + is\pi,$$

so erhält man als Lösung von (II) schliesslich

$$Z(z) = J_1 + J_2 = \frac{2 e^{i\pi \frac{s-1}{2}}}{\cos^2 \alpha \sqrt{s\eta}} \cdot$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t} dt}{\sqrt{t}} \left\{ \cos\left(2\eta + s\omega_0 - \frac{\pi}{4}(2s+1)\right) + t \cdot \beta \sin\left(2\eta + s\omega_0 - \frac{\pi}{4}(2s+1)\right) \right\} + \dots$$

Ausser (15) gilt hier

$$\int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{1/2} \cdot dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad \omega_0 = \pi - 2\alpha$$

Die Ausführung der Integration liefert nun die asymptotische Entwicklung:

$$Z(\xi) = 2 \sqrt{\pi} \cdot \frac{e^{i\pi \cdot \frac{s+1}{2}}}{\sqrt{s}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha \sqrt{\operatorname{tg} \alpha}} \left\{ \cos \left[ \frac{s}{2} (2\alpha - \sin 2\alpha) - \frac{\pi}{4} \right] + \frac{\beta}{s} \sin \left[ \frac{s}{2} (2\alpha - \sin 2\alpha) - \frac{\pi}{4} \right] + \dots \right\} \quad (17)$$

Für das folgende kann man sich mit genügender Genauigkeit auf die zwei angeschriebenen Glieder beschränken. Setzt man  $\gamma = 2\alpha$ , so wird die Gleichung  $\dot{Z} = 0$  zu

$$\operatorname{tg} \left[ \frac{s}{2} (\gamma - \sin \gamma) - \frac{\pi}{4} \right] = \frac{11 - 10 \cos \gamma + \cos^2 \gamma}{9 + 40 \cos \gamma + 10 \cos^2 \gamma + 4 \cos^3 \gamma + 6s \sin \gamma (1 - \cos \gamma)} \quad (18)$$

Schreibt man die Wellengeschwindigkeit  $V$  vor, so ist nach (15)  $\alpha$  resp.  $\gamma$  gegeben und (18) wird eine transzendente Gleichung zur Ermittlung von  $s$ . Zur Auflösung führt man

$$h = \frac{2s}{\pi} (\gamma - \sin \gamma) \quad (19)$$

ein. Es geht (18) über in

$$\operatorname{tg} \left[ \frac{\pi}{4} (1 - h) \right] = \frac{(11 - 10 \cos \gamma + \cos^2 \gamma) \cdot h}{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin \gamma (1 - \cos \gamma)}{\gamma - \sin \gamma} + 3\pi \cdot \frac{\sin \gamma (1 - \cos \gamma)}{\gamma - \sin \gamma} \cdot h^2} = \frac{h}{A + Bh^2}$$

Die kleinste positive Wurzel  $h_0$  entspricht der Welle ohne Knoten ( $W_0$ ) die nächst grössere  $h_1$  derjenigen mit einer Knotenebene ( $W_1$ ) etc. In roher Annäherung ist

$$h_n = 4n + 1 \quad (20)$$

Es ist leicht, die genauen Werte durch Annäherung zu finden. Sie hängen nicht stark von  $\gamma$  ab. In Figur 3 ist die so gefundene Dispersionskurve dargestellt. Als Abszisse ist  $\delta \cdot L$ , als Ordinate  $V/v_0$  aufgetragen. Nimmt man für die Bebenwellen  $\delta$  zu  $710 \text{ km}^{-1}$  an, so gilt in der Figur der in die Abszissenaxe eingetragene km-Massstab für  $L$ .

Die Rechnung lehrt, dass mit einer Annäherung, die für die hier vorliegende Frage hinreicht, die Näherungswerte (20) benützt werden können, wenn die Wellenlängen 400 km nicht übersteigen. Man erhält dann aus (15), (19) und (20) das angenäherte Dispersionsgesetz

$$\left. \begin{aligned} \frac{V}{v_0} &= \frac{1}{\cos(\alpha)} \\ \delta \cdot L &= \frac{4}{4n+1} \frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{\cos^2 \alpha} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

für die Welle  $W_n$  mit  $n$  Knotenebenen.

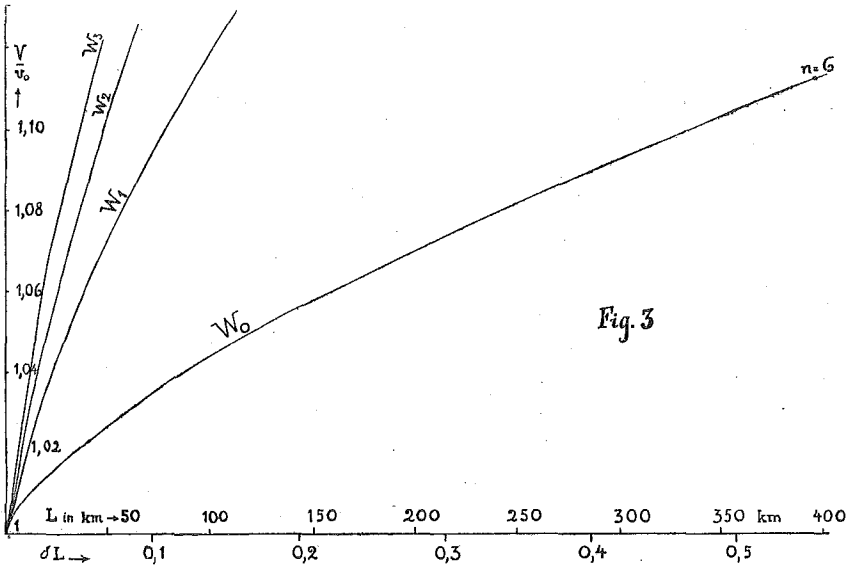


Fig. 3 zeigt, dass die Dispersion normal ist, lange Wellen laufen rascher als kurze. Die Laufgeschwindigkeit variiert für die Wellen, wie sie bei Beben auftreten, nicht stark. Daher zeigt sich die Dispersionserscheinung deutlich nur bei recht grossen Herdentfernungen. Eine Welle von 60 km Länge mit einer Schwingungsdauer von ca. 14,5 sec. wird aus 12000 km Herddistanz ca. 43 sec. früher eintreffen, als eine 20 km lange mit einer Schwingungszeit von ca. 5 sec. Jede Störung am Herd wird in eine Reihe sich überholender Wellenzüge aufgelöst, pflanzt sich also nicht mit unveränderter Form fort. Für die Ausbreitung der Energie ist letzten Endes die Gruppengeschwindigkeit massgebend, ebenso für die Form der an einer Sta-

tion registrierten Bewegung. Wir verweisen diesbezüglich auf die Darstellung bei Lamb<sup>1)</sup>. Zu bemerken bleibt noch, dass in den Beben-  
diagrammen die Querwellen sich bald mit den Rayleigh-Wellen mischen, die ihnen unmittelbar nachfolgen, und für die nach den Untersuchungen von Love<sup>2)</sup> im hier behandelten Falle ebenfalls Dispersion zu erwarten ist.

### Nachtrag.

Wenn man anstatt den im Text gemachten Annahmen für den Schubmodul  $G$  und die Dichte  $\rho$  lineare Funktionen der Tiefe ansetzt:

$$G = G_0(1 + \varepsilon z) \quad \rho = \rho_0(1 + \delta z)$$

so kommt man nach einigen Transformationen wiederum auf die Differentialgleichung (II) und damit auf das im Text behandelte mathematische Problem. Der Ansatz entspricht insofern besser den wahren Verhältnissen, als jetzt die Torsionswellengeschwindigkeit

$$v(z) = v_0 \cdot \sqrt{\frac{1 + \varepsilon z}{1 + \delta z}}$$

von der Oberfläche aus asymptotisch nach dem endlichen Wert  $v_1 = v_0 \cdot \frac{\varepsilon}{\delta}$  ansteigt. Wird im übrigen die Bezeichnung des Textes beibehalten, so ist jetzt

$$s = \frac{V^2}{v_0^2} \cdot \left(1 - \frac{V^2}{v_1^2}\right)^{-1/2} \cdot \left(1 - \frac{\delta}{\varepsilon}\right) \frac{f}{\varepsilon}$$

und man erhält in erster Annäherung das Dispersionsgesetz

$$V^2 = \frac{v_0^2 v_1^2}{v_0^2 \sin^2 \alpha + v_1^2 \cos^2 \alpha} ; \quad \varepsilon L_n = \frac{8}{4n + 1} \cdot \frac{\gamma - \sin \gamma}{1 + \cos \gamma} \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{v_1^2}}$$

Die Laufgeschwindigkeit  $V$  der Wellen geht jetzt auch nicht mehr ins Unendliche. Vielmehr ist jetzt stets  $v_0 < V < v_1$ .

Demensprechend hat die Dispersionskurve die Asymptote  $V = v_1$ . Indessen ändert sich für das Bebenproblem nichts wesentliches. Denn die Bebenwellen sind verhältnismässig so kurz, dass sie ganz in den Anfang der Dispersionskurve hineinfallen. Sie verlaufen eben so oberflächlich, dass das elastische Verhalten der Erde in ganz grosser Tiefe keine grosse Rolle mehr spielt.

Zollikon, März 1921.

<sup>1)</sup> H. Lamb, Hydrodynamics, Cambridge, 1916. Art. 241.

<sup>2)</sup> Love, loc. cit. Art. 183.