

Zu Chrystals Theorie der Eigenschwingungen stehender Gewässer (Seiches).

Von

ERNST MEISSNER.

(Als Manuskript eingegangen am 10. Mai 1920).

Forels Untersuchungen über die periodischen Seespiegelschwankungen des Genfersees (Seiches) sind der Ausgangspunkt einer ausgedehnten Seichesforschung geworden.¹⁾ Eine mathematische Theorie dieser Eigenschwingungen wurde durch den Schotten Chrystal aufgestellt und zu einem gewissen Abschlusse gebracht. Bei diesen für den praktischen Gebrauch entwickelten Untersuchungen handelt es sich nicht um Lösungen des Problems der Schwingungen einer Flüssigkeit in einem Gefäss im streng hydrodynamischen Sinne. Solche sind nur für ganz einfache Gefässformen bekannt.²⁾ Die Chrystalsche Theorie stellt sich die Aufgabe, bei gegebener Form des Wasserbeckens die Perioden der Fundamentalschwingungen und die Lage der zugehörigen Knotenlinien annäherungsweise zu berechnen, um den Vergleich mit der Erfahrung zu ermöglichen.

Die Abweichungen dieser Näherungstheorie von der strengen Lösung beruhen auf zwei verschiedenen Umständen:

Um partielle Differentialgleichungen zu vermeiden, muss der See länglich, im Verhältnis zur Länge wenig tief, und von nicht sehr stark veränderlicher Breite und Tiefe vorausgesetzt werden. Wenn dann noch einige Annahmen über den Bewegungszustand zugelassen werden, die auf das Ausserachtlassen von Nebenbewegungen hinauslaufen, so führen die hydrodynamischen Bewegungsgesetze auf eine totale Differentialgleichung zweiter Ordnung, die den Schwingungsvorgang beherrscht, und die Theorie wird analog zur Schwingungstheorie einer Saite mit veränderlicher Dichte. In die Gleichung selbst geht nur eine einzige, von Seebreite und Querschnitt abhängige Funk-

¹⁾ Über die Literatur vergleiche man

Chrystal: On the hydrodynamical Theory of Seiches. Trans. R. Soc. Edinburgh. Vol. XLI. 1906.

²⁾ Vergl. H. Lamb, Hydrodynamics, Cambridge 1916. Art. 258.

tion (die Normalfunktion des Sees) ein. Sie charakterisiert den See in bezug auf sein Seiches-Verhalten vollständig. Das bewirkt, dass man ohne Verlust an Allgemeinheit die Breite als konstant, und die Tiefe als nur in der Längsrichtung veränderlich ansehen kann, was in Zukunft geschehen soll.

Für einfache Tiefengesetze kann man leicht Lösungen der erwähnten Differentialgleichung angeben. Chrystal¹⁾ behandelt denn auch Seeprofile, die sich aus geraden und parabolischen Stücken zusammensetzen, sowie den Fall einer besondern Profilkurve vierten Grades (Quatric Lake). In § 2 werden diese Beispiele um ein neues vermehrt.

Um nun seine Theorie auf empirisch gegebene Profile mit ihrem naturgemäss recht unregelmässigen Verlauf anwenden zu können, geht Chrystal folgendermassen vor:

Die aufgenommene Normalkurve des Sees wird, so gut es geht, durch eine Reihe gerader oder parabolischer Stücke ersetzt. Für jedes Teilstück ist die Lösung bekannt; man hat nur alle Teillösungen zu einer einheitlichen zu verschmelzen, indem man an den Intervallgrenzen gewisse Anschlussbedingungen erfüllt. Aber gerade dieses Anpassen der Teillösungen aneinander ist praktisch eine schon bei kleiner Intervallzahl recht mühsame Sache, um so mehr, als die den Parabelbögen entsprechenden Lösungen durch komplizierte hypergeometrische Reihen (Seiches-Funktionen) gegeben sind. Die Anzahl der Bogenstücke, mit der man die Normalkurve annähert und von der die erzielte Genauigkeit wesentlich abhängt, ist praktisch mit Rücksicht auf die notwendig werdende Rechnerarbeit an enge Grenzen gebunden. Damit aber entfällt die Möglichkeit, die feinem Einzelheiten der Profilkurve zu berücksichtigen. In den zwei von Chrystal²⁾ behandelten Beispielen des Loch Earn und des Loch Treig, die als Muster regelmässiger Seen gelten können, wird durch zwei Parabeln mit gemeinsamem Scheitel approximiert. Die Abweichungen dieser sog. Biparabel betragen aber stellenweise 20—50%. Bei der Anwendung des Verfahrens auf den Walensee ergibt sich ähnliches.³⁾

Unter diesen Umständen kann man die Frage aufwerfen, ob es einen Sinn hat, an den strengen Lösungen der Chrystalschen Diffe-

¹⁾ a. a. O. oder auch Rudzki, Physik der Erde. Leipzig 1911.

²⁾ Chrystal. On the Periods and Nodes of Lochs Earn and Treig. Trans. R. Soc. Edinburgh. Vol. XVI. 1906.

³⁾ Sch. weitzer. Die Seiches des Walensees. Mittlgn. d. physik. Ges. Zürich. 1908.

rentialgleichung festzuhalten. In den Voraussetzungen der Theorie und in der Verwendung einer künstlich zurechtgestutzten Normalkurve liegen wesentliche Fehlerquellen. Andererseits lassen sich praktisch die Perioden, und ganz besonders die Knotenlinien, nicht sehr genau beobachten. Endlich sind meistens nur die 2—3 ersten Normal-schwingungen von Interesse.

Es liegt daher der Gedanke nahe, die Chrystalsche Gleichung durch das zugehörige Variationsproblem zu ersetzen und dieses nach einer von Rayleigh ¹⁾ vielfach mit Erfolg verwendeten Methode zu lösen. Dem Verzicht auf eine häufig wohl illusorische Genauigkeit steht dann der Vorteil entgegen, dass jetzt nur Quadraturen ausgeführt zu werden brauchen. Man kann diese durch Instrumente an der unveränderten, wahren Normalkurve mechanisch ausführen.

Im folgenden soll untersucht werden, ob auf diese Weise eine Genauigkeit zu erwarten ist, die mit derjenigen der Chrystalschen Theorie in Konkurrenz treten kann. Es scheint mir, dass die Ergebnisse dies für viele Fälle bejahen.

Erwähnt mag noch werden, dass das Rayleigsche Verfahren auch auf Seen beliebiger Form anwendbar ist, sobald der Schwingungsmodus ungefähr bekannt ist.

§ 1.

Die Theorie von Crystal. Einfache Lösungen.

Es bedeute im folgenden:

ox die in der Längsrichtung des Sees an seiner Oberfläche gemessene Abszisse,

$x = a$, $x = c$, die Abszissen der Seeenden, $L = c - a$ seine Länge, b die (konstante) Breite des Sees,

$Q(x)$ den Flächeninhalt des Querschnittes (x),

$h(x)$ die mittlere Tiefe desselben, sodass $Q(x) = b \cdot h(x)$,

$\xi(x)$ die horizontale Verschiebung der ursprünglich im Querschnitt (x) liegenden Wasserteilchen in der Richtung ox ,

$\zeta(x)$ die Erhebung des Wasserspiegels im Querschnitt (x) über die Gleichgewichtslage,

g die Beschleunigung der Schwere.

Unter der Annahme, dass die auftretenden Grössen nur von x und der Zeit t abhängen und dass die Bewegung klein sei, lautet dann die Kontinuitätsgleichung:

$$\zeta = - \frac{\partial}{\partial x} (h \xi) \quad (1)$$

¹⁾ Rayleigh. Theorie des Schalles. Art. 89.

Als Bewegungsgleichung erhält man andererseits

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -g \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (2)$$

Setzt man noch $u = h \cdot \xi$ (3)

so ergibt die Elimination von ξ hieraus die Chrystalsche Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = g \cdot h(x) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4)$$

Entweder sind nun die Seeufer an den Enden vertikal; dann ist dort $\xi = 0$. Oder der See verläuft an den Enden flach; dann ist dort $h = 0$. Somit lauten die Randbedingungen

$$\text{für } u = 0, \text{ für } x = a \text{ und } x = c \quad (5)$$

Um die n -te Fundamentalschwingung zu finden, setzt man

$$u = \cos(m_n \cdot t) \cdot U_n \quad (6)$$

und bekommt für U_n

$$\frac{\partial^2 U_n}{\partial x^2} + \frac{m_n^2}{g h} U_n = 0 \quad (7)$$

mit den Randbedingungen

$$U = 0, \text{ für } x = a \text{ und } x = c \quad (7)$$

Die Perioden der verschiedenen Normalschwingungen, $T_n = \frac{2\pi}{m_n}$ bestimmen sich aus den Eigenwerten von (7). Wegen

$$\xi = \cos(m_n \cdot t) \frac{\partial U_n}{\partial x} \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = \cos(m_n t) \cdot \frac{m_n^2}{g h} \cdot U_n \quad (8)$$

bestimmt man die Lage der Schwingungsbäuche und Knoten resp.

aus $U_n = 0$ und $\frac{\partial U_n}{\partial x} = 0$ (9)

Die Abszissen der Knoten seien mit x_{n1}, x_{n2} u. s. f. bezeichnet.

Beispiel I. Konstante Tiefe h ,

$$a = 0, c = L$$

$$U_n = \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \quad T_n = \frac{2L}{\sqrt{gh}} \cdot \frac{1}{n} \quad x_{ni} = \frac{L}{2n} (2i + 1)$$

Beispiel II. Parabolischer See. Tiefengesetz

$h = h_1 \left(1 - \frac{4x^2}{L^2}\right); a = -\frac{L}{2} \quad c = +\frac{L}{2}$ P_n sei das n -te Legendresche Polynom. Dann ist

$$U_n = \int_{-\frac{2x}{L}}^{\frac{2x}{L}} P_n(z) dz \quad T_n = \frac{2\pi}{\sqrt{g h_1}} \cdot \frac{L}{2\sqrt{n(n+1)}} \quad x_{ni} = \frac{L}{2} \cdot y_{ni}$$

Mit y_{ni} sind die Nullstellen von P_n bezeichnet.

Die Knotenlinien verschieben sich gegen die seichten Seeenden.

Die Schwingungsperioden sind bei diesem See vom Pegelstand unabhängig. ¹⁾

Beispiel III. Halbparabolischer See.

Das Profil ist die Hälfte des vorigen. Im Scheitel der Parabel wird der See durch eine vertikale Wand begrenzt.

Die Eigenschwingungen sind identisch mit den geradzahigen

¹⁾ Es gibt keinen andern symmetrischen See mit analytischem Profil von dieser Eigenschaft, wie sich folgenderweise zeigen lässt:

Sei $y(x)$ die von der Scheiteltangente aus gemessene Ordinate des Profils, die Seeenden seien in $x = \pm a$. Man setze

$$\xi = \frac{x}{a} \quad s(x) = \frac{y(x)}{x^2} \quad s(a) - \xi^2 s(\xi a) = A(\xi; a)$$

Für U_1 gilt jetzt

$$\frac{d^2 U_1}{d\xi^2} + \frac{m_1^2 U_1}{A(\xi; a)} = 0 \quad U_1(-1) = 0 \quad U_1(+1) = 0$$

Sinkt der Seespiegel soweit, dass die Seeenden in $x = \pm b$ zu liegen kommen, und bedeutet V_1 die zu U_1 analoge Lösung von

$$\frac{d^2 V_1}{d\xi^2} + \frac{m_1^2 V_1}{A(\xi; b)} = 0 \quad V_1(-1) = 0 \quad V_1(+1) = 0$$

wobei m_1 denselben Wert beibehalten soll, so folgt die Greensche Relation

$$\left[U \frac{dV}{d\xi} - V \frac{dU}{d\xi} \right]_{-1}^{+1} = m_1^2 \int_{-1}^{+1} U \cdot V \cdot \left\{ \frac{1}{A(\xi; a)} - \frac{1}{A(\xi; b)} \right\} d\xi = 0$$

in Rücksicht auf die Randbedingungen. Da U_1 und V_1 im Innern des Integrationsintervalls nicht verschwinden, gibt es einen Wert ξ' so, dass

$$|\xi'| < 1 \quad \text{und} \quad A(\xi'; a) = A(\xi'; b)$$

d. h.
$$s(a) - s(b) = \xi'^2 \cdot \{ s(\xi' a) - s(\xi' b) \}.$$

Vertauscht man hierin a und b mit $\xi' \cdot a$ und $\xi' \cdot b$, so erhält man

$$s(\xi' a) - s(\xi' b) = \xi''^2 \{ s(\xi' \xi'' a) - s(\xi' \xi'' b) \} \quad |\xi''| < 1$$

und indem man so fortfährt und die erhaltenen Gleichungen kombiniert:

$$s(a) - s(b) = z_n^2 \{ s(z_n a) - s(z_n b) \} \quad z_n = \xi' \cdot \xi'' \dots \xi^{(n)}$$

Die $|z_n|$ werden mit wachsendem Index immer kleiner. Ist $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = 0$,

so folgt
$$s(a) = s(b) \quad (\alpha)$$

Ist der Grenzwert von $|z_n|$ endlich, so kommt man ohne Schwierigkeit zum selben Resultat. Die Beziehung (α) entspricht aber dem parabolischen Profil *Q. e. d.*

des Beispiels II, die im Scheitel der Bedingung $U = V$ genügen. Dementsprechend ist

$$T_n = \frac{2\pi}{\sqrt{g h_1}} \cdot \frac{L}{\sqrt{2n(2n+1)}} \quad x_{ni} = \frac{L}{2} \cdot y_{2n,i}$$

Beispiel IV. Tiefengesetz linear. $h = \frac{h_1}{L} \cdot x \quad a=0 \quad c=L$

Ist $J_k(x)$ die k -te Besselsche Funktion 1. Art, und sind j_{k1}, j_{k2}, \dots etc. ihre Nullstellen, so wird

$$U_n = x^{1/2} \cdot J_1(\tau x^{1/2}) \quad \text{wo } \tau = \frac{j_{1n}}{L^{1/2}}; \quad \frac{dU_n}{dx} = \frac{\tau}{2} J_0(\tau x^{1/2})$$

Ferner

$$T_n = \frac{2\pi}{\sqrt{g h_1}} \cdot \frac{2L}{j_{1n}} \quad x_{ni} = \frac{j_{0i}}{j_{1n}^2} \cdot L$$

Beispiel V. Symmetrischer See mit linearem Tiefengesetz.¹⁾

Er entsteht aus dem vorigen, indem man sein Spiegelbild bezüglich der Vertikalebene durch $x = L$ hinzufügt.

Die Normalschwingungen des Beispiels IV sind auch hier solche. Ausser diesen existiert noch eine 2. Reihe, die aus den zu $x = L$ symmetrischen, also durch

$$\left[\frac{dU}{d\xi} \right]_{x=L} = 0$$

charakterisierten Lösungen durch Spiegelung entstehen. Für sie wird

$$T_m = \frac{2\pi}{\sqrt{g h_1}} \cdot \frac{2L}{j_{0m}}$$

und der Abstand der Knoten von den Enden ist

$$x_{mi} = \left(\frac{j_{0i}}{j_{0n}} \right)^2 \cdot \frac{L}{2}$$

§ 2.

Ein neues Beispiel.

Tiefengesetz:

$$h(x) = Q \cdot x \cdot (q - x)^3 \quad \text{Fig. 1.}$$

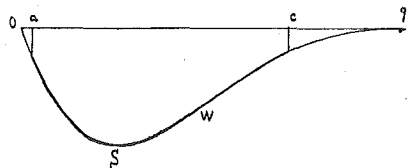


Fig. 1.

¹⁾ Lamb, a. a. O. Art. 185.

Die zugehörige Lösung von (7) lautet

$$U_n = \sqrt{x \cdot (q - x)} \cdot I_1 \left(\sigma \sqrt{\frac{x}{q - x}} \right) \quad \sigma = \frac{2 m_n}{q \sqrt{Q \cdot g}}$$

wo $I(y)$ die allgemeine Lösung von

$$\frac{d^2 I}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{dI}{dy} + \left(1 - \frac{1}{y^2} \right) I = 0$$

bedeutet. Ist sonach J_1 die erste Besselsche Funktion 1. Art, Y_2 diejenige 2. Art, so ist

$$I = A J_1 + B Y_1$$

und die Randbedingungen ergeben die Frequenzgleichung:

$$J_1 \left(\sigma \sqrt{\frac{a}{q - a}} \right) Y_1 \left(\sigma \sqrt{\frac{c}{q - c}} \right) - J_1 \left(\sigma \sqrt{\frac{c}{q - c}} \right) \cdot Y_1 \left(\sigma \sqrt{\frac{a}{q - a}} \right) = 0$$

Das Tiefenprofil hat die in Fig. 1 gegebene Form. Natürlich ist stets $a > 0$, $c < q$ zu nehmen. Der Scheitel S liegt bei $x = q/4$, die Wendestelle W bei $x = q/2$. Die Scheiteltiefe ist $H = \frac{27}{256} Q q^4$.

Beispiel VI. Liegt das linke Seeende in 0, wo die Tiefe null wird, so vereinfacht sich die Frequenzgleichung zu

$$J_1 \left(\sigma \sqrt{\frac{L}{q - L}} \right) = 0$$

Dem entsprechend ergibt sich die Schwingungsdauer aus

$$T_n = \frac{2 \pi}{\sqrt{g H}} \cdot \frac{3 \sqrt{3}}{8} q \cdot \sqrt{\frac{L}{q - L}} \cdot \frac{1}{j_{1n}} \quad (10)$$

Beispiel VI'. Der See reicht bis zum Scheitel S .

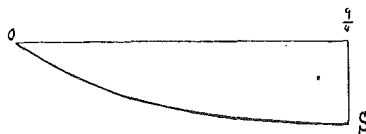


Fig. 2.

Er wird

$$T_n = \frac{2 \pi}{\sqrt{g H}} \cdot \frac{3 L}{2} \cdot \frac{1}{j_{1n}} \quad (11)$$

Beispiel VI". Der See reicht bis zur Wendestelle.

Hier ist

$$T_n = \frac{2\pi}{\sqrt{gH}} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4} L \cdot \frac{1}{J_{1n}} \quad (12)$$

Für $L = q$ erhält man aus (10) unendlich grosse Werte von T_n . Das rührt davon her, dass für einen solchen, am einen Ende von höherer Ordnung seichten See die Voraussetzungen der Theorie nicht mehr zutreffen.

Beispiel VII. Assymmetrischer See.

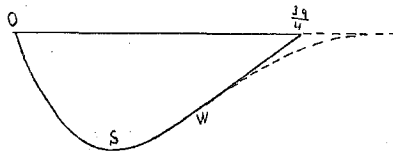


Fig. 3.

Man erhält ein brauchbares, assymmetrisches Profil dadurch, dass man von der Wendestelle W an die Kurve durch ihre Wendetangente ersetzt (Fig. 3). Für $x < q/2$ gilt dann die Lösung

$$U_n^* = A \sqrt{x(q-x)} J_1 \left(\sigma \sqrt{\frac{x}{q-x}} \right) \quad (13)$$

Die Wendetangente schneidet den Seespiegel in $x = \frac{3q}{4}$. Zwischen $x = q/2$ und dieser Stelle gilt die dem geradlinigen Profil entsprechende Lösung (Beispiel IV)

$$U_n^{**} = B \cdot \sqrt{\frac{3q}{4} - x} \cdot J_1 \left(\tau \sqrt{\frac{3q}{4} - x} \right)$$

Für $x = q/2$ müssen nach (3), (6) und (8) die Bedingungen erfüllt werden:

$$U_n^* = U_n^{**} \quad \frac{d U_n^*}{d x} = \frac{d U_n^{**}}{d x}$$

Das gibt für die Perioden $T = \frac{2\pi}{m_n}$ die Frequenzgleichung

$$[J_1(\sigma) + 2\sigma J_1'(\sigma)] J_1(\sigma) = 0 \quad \left(\sigma = \frac{2m_n}{q\sqrt{Qg}} \right)$$

Den Wurzeln $J_1 = 0$ entsprechen Schwingungsvorgänge, bei denen die beiden Teile des Beckens links und rechts von W gerade so schwingen, wie wenn sie in W durch eine vertikale Wand geschieden wären. Diese

Wurzeln werden separiert von den Werten, die den Klammerausdruck zu null machen. Der kleinste derselben ist

$$\sigma = 2,165$$

und liefert die Periode der Grundschiwingung zu

$$T_1 = \frac{2\pi L}{\sqrt{gH}} \cdot 0,40 \quad \left(L = \frac{3q}{4} \right)$$

§ 3.

Die Genauigkeit des Chrystalschen Verfahrens.

Es soll nun die Grössenordnung des Fehlers bestimmt werden, den man begeht, wenn man nach Chrystal eine gegebene Profilkurve durch einen Parabelbogen ersetzt.

Wir behandeln das Beispiel VI', § 2, indem wir $q = 4$ nehmen, und den Bogen OS 4. Grades durch die Parabel

$$h^*(x) = h_o \cdot (2x - x^2)$$

ersetzen.

Man kann dies nach verschiedenen Grundsätzen machen:

a) Man macht das Quadrat des mittleren Ordinatenfehlers minimal. Dies erfordert

$$h_o = 1,03421 \cdot H$$

Die Ordinate h^* weicht nirgends mehr als 7,6 % von $h(x)$ ab und die Abweichung erfolgt nach beiden Seiten, sodass ein Teil des Einflusses sich aufheben kann.

b) Die Profillflächen werden gleich gross gemacht. Die Seen haben dann gleichen Voluminhalt. Dies gibt

$$h_o = 1,0445 \cdot H \quad \text{Maximale Abweichung } 6,7 \%$$

c) Die Scheiteltiefe der Seen ist dieselbe.

$$h_o = H \quad \text{Maximalabweichung } 9 \%$$

In diesem Beispiel liegen also die Verhältnisse viel günstiger für das Chrystalsche Verfahren, als man es nach frühern Bemerkungen je für reelle Seen erwarten darf.

In der folgenden Tabelle sind die Resultate der Rechnung zusammengestellt. Die erste Zeile enthält die Angaben für die Perioden der ersten drei Normalschwingungen, berechnet nach der Formel (11), die andern Zeilen enthalten die analogen Angaben, die bei Ersatz des Profils durch eine Parabel nach a), b) resp. c) sich ergeben.

Daneben ist jeweilen der prozentuale Fehler hingesezt. Abkürzend wurde geschrieben

$$F = \frac{2\pi \cdot L}{\sqrt{gH}}$$

| | T_1/F | % | T_2/F | % | T_3/F | % |
|--------------|---------|-----|---------|-----|---------|-----|
| Beispiel VI' | 0,39146 | | 0,21382 | | 0,14744 | |
| Fall a) | 0,4014 | 2,5 | 0,2199 | 3,3 | 0,1517 | 2,9 |
| Fall b) | 0,3995 | 2 | 0,2188 | 2,2 | 0,1510 | 2,4 |
| Fall c) | 0,4082 | 4 | 0,2236 | 5 | 0,1543 | 4,7 |

Selbst in diesem ausserordentlich günstigen Falle¹⁾ betragen also die Fehler, die durch Zurechtstutzen der Profilkurve entstehen, einige Prozente.

Auch wenn man eine grössere Anzahl von Ersatzbogen benutzt, wird es in der Anwendung auf reelle Seen kaum je gelingen, das Profil so genau anzunähern, wie das hier der Fall ist. Man darf daher wohl behaupten, dass die Christalsche Methode höchstens auf einige Prozent genaue Resultate gibt, und dass genauere Übereinstimmung mit der Wirklichkeit auf Zufall beruht.

§ 4.

Das direkte Näherungsverfahren.

Unter diesen Umständen scheint es angemessen, auf die strenge Lösung von Gleichung (7) zu verzichten, wenn eine direkte Näherungsmethode zur Berechnung den T_n Resultate von ähnlicher Genauigkeit liefert. Wenn dabei auch noch die mathematischen Schwierigkeiten bei der Integration von (7) umgangen und direkt die empirisch gegebenen Seeprofile verwendet werden können, so wird man das als weitere Vorteile zu betrachten haben.

Wird die Dichte der Flüssigkeit gleich 1 gesetzt, so ist für die n -te Normalschwingung (6) der Ausdruck für die Bewegungsenergie

$$\frac{1}{2} \int \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 b h dx = \frac{m_n^2}{2} \sin^2(m_n t) \cdot \int \frac{U^2 b}{h} dx$$

der Ausdruck der potentiellen Energie

$$\frac{g}{2} \int \xi^2 b dx = \frac{g}{2} \cos^2(m_n t) \cdot \int U'^2 dx$$

¹⁾ Bemerkenswerterweise liefert der Fall gleichen Volumens die genaueren Resultate als der minimalen Fehlerquadrats.

und der Energiesatz gibt

$$T_n = \frac{2\pi}{m_n} = 2\pi \sqrt{\frac{K_1}{g K_2}} \quad \text{mit} \quad K_1 = \int_a^c \frac{U^2}{h(x)} dx \quad K_2 = \int_a^c \left(\frac{dU}{dx}\right)^2 dx \quad (13)^1$$

Die Lösung U_n macht den Wert von T_n zu einem Maximum, wobei noch die Orthogonalitätsbedingungen

$$\int_a^c \frac{U_n \cdot U_x}{h(x)} dx = 0 \quad x = 1, 2 \dots (n - 1) \quad (14)$$

zu erfüllen sind. T_n ist gleich diesem Extremum.

Nach einer auf Lord Rayleigh²⁾ zurückgehenden Methode kann man an Stelle des wahren Schwingungstypus $U_n(x)$ in die Formel (13) einen angenäherten einführen; man erhält aus ihr dann einen Näherungswert von T_n , der um so besser ausfällt, je grösser er wird und je näher der angenommene dem wahren Typus kommt.

Handelt es sich um die langsamste Schwingung T_1 , so fallen die Nebenbedingungen (14) weg. Um für U_1 einen guten Näherungsausdruck zu erlangen, kann man den See ganz roh etwa mit einem der Beispiele in § 1 vergleichen und den zugehörigen Typus benutzen. Oder man macht über die Funktion $\xi(x)$, die die Form des schwingenden Seespiegels bestimmt, eine passende Annahme. Diese ist nicht ganz willkürlich: der einzigen Knotenlinie entsprechend muss $\xi(x)$ zwischen den Seeenden nur einmal verschwinden, und wegen (1), (3) und (5) muss

$$\int_a^c \xi(x) dx = 0 \quad (15)$$

sein. Rechnerisch einfach und bei einem ungefähr parabolischen See schon ganz ordentliche Genauigkeit ergebend, gestaltet sich die Annahme des ebenen Seespiegels, wo $\xi(x)$ als lineare Funktion von x vorausgesetzt wird.

Man hat

$$U_1(x) = (x - a)(x - c)$$

und

$$T_1 \cong 2\pi \sqrt{\frac{3}{g L^3}} \cdot \sqrt{\int_a^c \frac{(x - a)^2 (x - c)^2}{h(x)} dx}$$

¹⁾ Ist die Breite des Sees nicht konstant, so verallgemeinert sich diese Formel zu

$$T_n = 2\pi \sqrt{\frac{K_1}{g K_2}} \quad K_1 = \int \frac{V^2 dv}{b^2 h} \quad K_2 = \int \left(\frac{dV}{dv}\right)^2 dv \quad v = \int_a^x b dx \quad V = bU. \quad (A)$$

²⁾ Rayleigh. Theorie des Schalles. Art. 69 ff.

Einen genauen Wert liefern diese Formeln nur im Fall des parabolischen Profils des Beispiels II. Wir werden im § 5 zeigen, dass aber noch für ziemlich weit hievon abweichende Profilform die Annäherung befriedigend ist. Es ist nur erforderlich, dass die grösste Tiefe gegen die Mitte zu sich befinde und der See gegen die Enden seicht werde.

Reicht die auf diese Weise erzielte Genauigkeit nicht aus, so geht man in folgender Art vor:

Man macht für $\zeta(x)$ einen Ansatz, der noch eine Reihe von verfügbaren Parametern enthält. Nachdem man (15) befriedigt hat, bestimmt man die übrigen Parameterwerte so, dass der Ausdruck für T ein Extremum wird. Oft genügt es schon, für ζ etwa ein Polynom 2. oder 3. Grades anzusetzen. Die Beispiele des folgenden § geben darüber Aufschluss.

Nachdem die erste Fundamentalschwingung auf diese Weise mit der wünschbaren Genauigkeit ermittelt worden ist, berechnet man auf dieselbe Art die 1. Oberschwingung und alle weiteren. Hierbei sind die Gleichungen (14) zu beachten. Freilich wird die Rechnerarbeit um so beträchtlicher, je höher die Ordnungszahl der Schwingung ist. Es müssen für ζ Ausdrücke angesetzt werden, die entsprechend der höheren Knotenzahl mehrere Male im Intervall $(a-c)$ verschwinden können, z. B. Polynome höhern Grades.

Wieder werden die noch zur Verfügung stehenden Parameter so bestimmt, dass T_n ein Extremum wird (Optimallösung).

Bei unregelmässigem, graphisch gegebenen Profil bleibt diese Methode unverändert brauchbar. Am besten wird man dann die Quadraturen graphisch vornehmen oder durch Planimetrierung. Verwendet man Ansätze, die in den Parametern linear sind, so werden die Integrale (13) quadratische Funktionen derselben und zur Bestimmung der Parameter der Optimallösung bekommt man Systeme von Gleichungen, deren Koeffizienten durch jene Quadraturen ermittelt werden, und deren Lösung keine Schwierigkeit macht.

§ 5.

Beispiele zur Näherungstheorie.

Im folgenden bedeuten T_n , x und alle Zahlenkoeffizienten, die keinen Stern als Index tragen, die aus der Christalschen Gleichung (7) erhaltenen Werte. Mit U_n^* , U_n^{**} resp. ξ_n^* , ξ_n^{**} sind die verschiedenen Schwingungstypen bezeichnet, die der Näherungsrechnung zu

Grunde gelegt worden sind, und die damit erhaltenen Näherungswerte der T, x tragen die entsprechende Sternbezeichnung. (O) bedeutet Optimallösung, P_n das Legendresche Polynom.

Beispiel 1. Konstante Tiefe. h_0 .

$$a = -1 \quad c = +1 \quad L = 2$$

a) $\xi_1^* = -P_1(x) \quad U_1^* = -\int_{-1}^x P_1(x) dx = Q_1(x)$ für die Grundschiwingung.

$\xi_2^* = -P_2(x) \quad U_2^* = -\int_{-1}^x P_2(x) dx = Q_2(x)$ für die 1. Oberschiwingung.

$$\begin{array}{ll} T_1^* = T_1 \cdot 0,9935 & T_2^* = T \cdot 0,965 \\ x_{11}^* = 0 & x_{21}^* = + 0,5773 \quad \text{nach Annahme} \\ x_{11} = 0 & x_{21} = \pm 0,5 \end{array}$$

Trotzdem der verwendete Typus vom wahren stark abweicht, ist die Annäherung schon befriedigend.

b) $\xi_1^{**} = -P_1 - \alpha P_2 \quad U_1^{**} = Q_1 + \alpha Q_2$ für die Grundschiwingung } (O)
 $\xi_2^{**} = -P_2 - \beta P_4 \quad U_2^{**} = Q_2 + \beta Q_4$ für die 1. Oberschiwingung }

$$\begin{array}{ll} T_1^{**} = T_1 \cdot 0,9970 & T_2^{**} = T_2 \cdot 0,9997 \\ x_{11} = 0 & x_{21} = \pm 0,5203 \end{array}$$

Die Abweichungen in den Perioden sind kleiner als 1%, in der Lage der Knotenlinien 4%.

Beispiel 2. Linear veränderliche Tiefe. $h = h_0 x$.

$$a = 0 \quad c = L = 1$$

$$T_n = \frac{2\pi L}{\sqrt{g h_0}} \cdot z_n \quad z_1 = 0,52194 \quad z_2 = 0,2984$$

$$x_{11} = 0,3943 \quad x_{21} = 0,1175 \quad x_{22} = 0,6110$$

a) Typus des halbparabolischen Profils. (Beispiel III)

$$\begin{array}{ll} U_1^* = Q_2(1-x) \cong (1-x)^3 - (1-x) & \\ z_1^* = 0,5204 & x_{11}^* = 0,423 \end{array}$$

b) Optimallösung vom Typus

$$\begin{array}{ll} U_1^{**} = x \cdot (1-x) \cdot (1+ax) & U_2^{**} = x \cdot (1-x) \cdot (1+bx+cx^2) \\ z_1^{**} = 0,5216 & x_{11}^{**} = 0,4023 \\ z_2^{**} = 0,2852 & x_{21}^{**} = 0,1336 \quad x_{22}^{**} = 0,6390 \end{array}$$

Beispiel 3. Symmetrischer See mit linear veränderlicher Tiefe. (Wie in Beispiel V)

$$a = 1 \quad c = +1$$

$$T_n = \frac{2\pi L}{\sqrt{gh}} \cdot z_n \quad z_1 = 0,41582 \quad z_2 = 0,26097$$

$$x_{11} = 0 \quad x_{21} = \pm 0,6057$$

a) Typus des parabolischen Sees.

$$U_1^* = x^2 - 1 = Q_1(x)$$

$$z_1^* = 0,41457 \quad x_{11}^* = 0$$

b) Optimallösung vom Typus:

$$U_1^{**} = Q_1(x) + \alpha Q_3(x) \quad \text{resp.} \quad U_2^{**} = Q_2(x) + \beta Q_4(x) \quad (Q_i = \int_{-1}^x P_i(x) dx)$$

$$z_1^{**} = 0,41475 \quad z_2^{**} = 0,26197$$

$$x_{11}^{**} = 0 \quad x_{21}^{**} = 0,6058$$

Beispiel 4. Kreisförmiges Becken konstanter Tiefe. h . Schwingungen mit einem Durchmesser als Knotenlinie.

Das Chrystalsche Verfahren wird bei diesem See nicht einfach anwendbar, da die explizite Normalfunktion des Sees einem verwickelten Gesetze folgt. Dagegen ist hier die Lösung bekannt, die die strengere Theorie kleiner Potentialbewegungen gibt.¹⁾

Ist r der Radius des Beckens, so wird danach

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{gh}} \cdot r \cdot z \quad \text{wo} \quad z = 0,543 \quad \text{aus} \quad J_1'\left(\frac{1}{z}\right) = 0$$

Unsere Näherungstheorie gibt

a) mit dem Typus $\zeta^* = x$ (Ebener Flüssigkeitsspiegel)

$$z^* = 0,527$$

b) mit $\zeta^{**} = x + a \cdot x^3$ (O)

$$z^{**} = 0,530$$

Die Rechnung, die in diesem Falle nach den Formeln (A) der Anmerkung Seite 8 durchzuführen ist, bleibt ausserordentlich einfach.

Die angeführten Beispiele können beliebig vermehrt werden. Sie zeigen, dass wenigstens für die untersuchten zwei ersten Normal-schwingungen der Fehler des Annäherungsverfahrens von derselben (oder geringerer) Grössenordnung ist, wie derjenige, der durch Anpassen einer gegebenen Profilkurve an die Chrystalsche Theorie entsteht.

¹⁾ Lamb, a. a. O. Art. 191.

Sehr gute Resultate wird man vor allem erwarten dürfen, wenn sich das Profil von dem zum verwendeten Typus gehörigen nur wenig unterscheidet. Man könnte so z. B. den Einfluss kleiner Unebenheiten in den Profilen der Beispiele von § 1 und § 2 untersuchen. Wir verzichten darauf, dafür Formeln aufzustellen. Denn in diesem Fall wird ohne weiteres die Theorie anwendbar, die Lord Rayleigh für ein schwingendes System aufgestellt hat, welches sich von einem bekannten nur wenig unterscheidet. Sie erlaubt, die kleinen Korrekturen zu berechnen, die an den Schwingungstypen und den Perioden beim Übergang vom einen System zum andern anzubringen sind. Das Beispiel einer Saite mit wenig veränderlicher Dichte, das Rayleigh a. a. O. ausführt, lässt sich sofort auf den See von annähernd konstanter Tiefe übertragen.

Wir schliessen mit der Bemerkung, dass die vorstehende Rechnungsweise sich auf die axialsymmetrischen Schwingungen eines axial-symmetrischen Sees ausdehnen lässt.

Nimmt man den Seerand als Einheitskreis und ist r die Entfernung von der Symmetrieaxe $h(r)$ die Tiefe, so ergibt sich für

$$U_n \cong \int_0^r \xi(r) r dr$$

mit $r^2 = z$ die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 U_n}{dz^2} + \frac{m_n^2}{4zh(\sqrt{z})} = 0$$

mit den Randbedingungen

$$U_n(0) = 0 \quad U_n(1) = 0$$

sodass die Schwingungen dieselben sind, wie für einen Chrystalschen See von der Länge 1 und dem Tiefengesetz

$$h^*(x) = 4 \cdot x \cdot h(\sqrt{x})$$

Dem See konstanter Tiefe entspricht z. B. der See des Beispiels IV, dem kreisförmigen See mit parabolischer Meridiankurve der See des Beispiels II.

Zollikon-Zürich, Mai 1920.