Über die durch reguläre Polyeder nicht stützbaren Körper.

Von

Ernst Meissner.

(Als Manuskript eingegangen am 6. April 1918.)

Wenn man eine Kugel in eine Schachtel von Würfelform hineinpackt, dass sie alle Seitenflächen derselben berührt, so bleibt sie immer noch mit drei Freiheitsgraden beweglich (Drehungen um ihren Mittelpunkt). Dasselbe gilt von denjenigen Körpern, die von konvexen Flächen konstanter Breite begrenzt sind. Ersetzt man den Würfel durch ein anderes reguläres Polyeder, so stellt sich das Problem, die Körper aufzufinden, die im Innern dieses Polyeders ebenfalls mit drei Freiheitsgraden derart bewegt werden können, dass sie stets alle Polyederseiten berühren. Diese Aufgabe soll hier für alle fünf regulären Vielflache behandelt werden. Sie führt auf gewisse Funktionalgleichungen auf der Einheitskugel. Denkt man sich das Vielflach beweglich, den Körper und seine Oberfläche im Raum fest, so kann sie folgendermassen ausgesprochen werden:

Gegeben sei eines der regulären Polyeder R. Gesucht wird die allgemeinste geschlossene (konvexe) Fläche F_R mit der Eigenschaft, dass ihr das Vielflach R in allen Stellungen so umschrieben werden kann, dass alle seine Seitenflächen die Fläche F_R berühren.

1.

Es wird zunächst ein Hilfssatz vorausgeschickt.

Sei x eine reelle feste Zahl zwischen -1 und $+1$.

$$P_n = P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2-1)^n}{d x^n}$$

das $n$te Legendresche Polynom, und

$$U_n(x) = P_{n+1}^2 + P_n{}^2 - 2x P_{n+1} P_n = (P_{n+1} - x P_n)^2 + (1-x^2) P_n{}^2 \quad (1)$$

Hilfssatz: Ist für einen Index $\varkappa$

$$U_{\varkappa}(x) < x^2(1-x^2) \tag{2}$$

so hat die Gleichung für den Index n

$$P_n(x) = x \tag{3}$$

keine Lösung, für die $n > \varkappa$ wäre.

Dies ergiebt sich sofort, wenn bewiesen wird, dass für $n > \varkappa$ stets

$$|P_n(x)| < \sqrt{\frac{U_{\varkappa}(x)}{1-x^2}} \tag{4}$$

weil die rechte Seite dieser Ungleichung nach (2) dann kleiner als $|x|$ wird, was die Gültigkeit der Beziehung (3) ausschliesst.

Nach (1) sind die U_n nie negativ.

Zwischen benachbarten Legendreschen Polynomen besteht die Relation

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}\, x\, P_n(x) - \frac{n}{n+1}\, P_{n-1}(x)$$

und es ist daher

$$U_n - U_{n-1} = -\frac{(2n+1)}{(n+1)^2}\,(x P_n - P_{n-1})^2 \leqq 0$$

Die Grössen

$$U_{\varkappa}\; U_{\varkappa+1}\; U_{\varkappa+2}\; \ldots .$$

bilden somit eine nicht zu nehmende Folge positiver Zahlen, und es ist

$$U_n \leqq U_{\varkappa} \text{ sobald } n > \varkappa \text{ ist.} \tag{5}$$

Nun wird durch

$$\xi^2 + \eta^2 - 2\,\xi\,\eta\,.\,x = \lambda^2$$

in der $(\xi\eta)$ Ebene eine Ellipse dargestellt, die die geraden

$$\frac{\xi}{\eta} = \pm \sqrt{\frac{\lambda^2}{1-x^2}}$$

zu Tangenten hat. Der Vergleich mit (1) ergibt daher

$$|P_n(x)| \leqq \sqrt{\frac{U_n(x)}{1-x^2}}$$

woraus wegen (5) die zu beweisende Ungleichung (4) folgt.

2.

Eine beliebige Richtung im Raum werde durch Poldistanz δ und geographische Länge φ festgelegt, und durch den Punkt r bezeichnet, den sie auf der Einheitskugel bestimmt.

Die im Raum feste Fläche F_R wird durch ihre Stützebenenfunktion $p(r)$ angegeben. Es ist also $p(r)$ die Länge des Lotes von einem festen Anfangspunkt aus nach der zu r normalen Stütz- oder Tangentialebene der Fläche.

Das Polyeder R sei in beliebiger Stellung der Fläche F_R umschrieben. Es seien r_i die Richtungen der Lote auf seine Seitenflächen. Die Punkte r_i bilden auf der Einheitskugel ein zweites reguläres Polyeder R^*. Es sei ferner a der Radius der Kugel, welche dem Vielflach R eingeschrieben werden kann, und

$$q(r) = p(r) - a$$

Wenn nun vier zu $p(r_1)$, $p(r_2)$, $p(r_3)$, $p(r_4)$ gehörende Stützebenen Seitenflächen des regulären Vielflachs R sein sollen, so müssen die zu $q(r_1)$, $q(r_2)$, $q(r_3)$, $q(r_4)$, gehörenden Ebenen durch einen Punkt gehen.

Ist c der Mittelpunkt der Einheitskugel, V_{hik} das algebraisch gerechnete Volumen des Tetraeders $c\,(r_h r_i r_k)$, so ist infolgedessen

$$L = q(r_1)\,V_{234} - q(r_2)\,V_{134} - q(r_3)\,V_{142} - q(r_4)\,V_{123} = 0 \tag{6}$$

Es sei jetzt r_1 eine beliebige Ecke von R^*, r_2, r_3, r_4 drei dazu benachbarte aufeinanderfolgende Ecken.

1. Fall. $R =$ Ikosaeder $\qquad R^* =$ Dodekaeder.

$$V_{123} = V_{134} = V_{142} \qquad V_{234} = \sqrt{5}\cdot V_{123}.$$

Die Bedingung (6) nimmt hier die Form an

$$L = \sqrt{5}\,q(r_1) - [q(r_2) + q(r_3) + q(r_4)] = 0 \tag{6_1}$$

2. Fall. $R =$ Dodekaeder $\qquad R^* =$ Ikosaeder

$$V_{123} = V_{134} \quad V_{234} = -V_{142} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot V_{123}$$

Gleichung (6) lautet:

$$L = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot[q(r_1) + q(r_3)] - [q(r_2) + q(r_4)] = 0 \tag{6_2}$$

3. Fall. $R =$ Würfel $R^* =$ Oktaeder.

$V_{123} = V_{134}$ $V_{142} = V_{234} = 0$

(6) wird hier einfach zu

$$L = q(r_2) + q(r_4) = 0 \tag{6$_3$}$$

wo r_2 und r_4 entgegengesetzt gleiche Richtungen sind.

4. Fall. $R =$ Oktaeder $R^* =$ Würfel.

$V_{123} = V_{134} = V_{142} = V_{234}$.

(6) lautet

$$L = q(r_1) - [q(r_2) + q(r_3) + q(r_4)] = 0 \tag{6$_4$}$$

5. Fall. $R =$ Tetraeder $R^* =$ Tetraeder.

$V_{123} = V_{134} = V_{142} = -V_{234}$. Man hat hier

$$L = [q(r_1) + q(r_2) + q(r_3) + q(r_4)] = 0. \tag{6$_5$}$$

3.

Die Stützebenenfunktion $p(r)$ der gesuchten Fläche gestatte eine Entwicklung nach Laplaceschen Kugelflächenfunktionen, die in der Form

$$p(r) = p(\delta, \varphi) = \sum_0^\infty Y_n(\delta, \varphi) \tag{7}$$

angesetzt werde, sodass

$$q(\delta, \varphi) = (Y_0 - a) + Y_1 + Y_2 + \ldots\ldots \tag{7^1}$$

wird, wobei

$$Y_n(\delta, \varphi) = \sum_{\varkappa=0}^{n} (A_{n\varkappa} \cos \varkappa\varphi + B_{n\varkappa} \sin \varkappa\varphi) \frac{d^\varkappa P_n(\cos\delta)}{d(\cos\delta)^\varkappa} \cdot \sin^\varkappa \delta \tag{8}$$

bedeutet.

Lässt man vorläufig den Punkt r_1 in den Nordpol der Einheitskugel ($\delta = 0$) fallen, so haben die Punkte $r_2\, r_3\, r_4$ gleiche Poldistanz δ^*, und ihre Längen unterscheiden sich um feste Winkel. Die linke Seite L der Relation (6) muss jedenfalls von φ ganz unabhängig werden. Setzt man daher (7') und (8) dort ein, so wird

$$[L]_{\vartheta=0} = (Y_0 - a)\,\lambda_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n A_{n0}$$

wo die λ_n sofort näher zu bestimmende rein numerische Koeffizienten bedeuten. Da ferner

$$A_{n0} = [Y_n]_{\vartheta=0}$$

den Wert von Y_n für den Nordpol bedeutet, so hat man, wenn nachträglich r_1 in eine beliebige Stellung $(\delta\varphi)$ verlegt wird

$$L(r_1) = [L]_{\substack{\vartheta \\ \varphi}} = (Y_o - a)\lambda_0 + \sum_1^\infty \lambda_n Y_n(\delta, \varphi)$$

Soll aber L für jede Stellung von R resp. R^* zu null werden, wie es die Aufgabe verlangt, so muss wegen der Eindeutigkeit der Entwicklung nach Kugelflächenfunktionen

$$(Y_o - a)\lambda_o = 0 \tag{9}$$

sein, und es können im Ansatz (7) nur diejenigen Funktionen Y_n auftreten, für welche

$$\lambda_n = 0 \tag{10}$$

wird. In der folgenden Tabelle sind die Werte von λ_o, $\cos\delta^*$ und λ_n zusammengestellt.

	λ_o	$\cos\delta^*$	λ_n
1. Ikosaeder	$3\left(\frac{\sqrt{5}}{3} - 1\right)$	$\frac{\sqrt{5}}{3}$	$3\left[\frac{\sqrt{5}}{3} - P_n\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\right]$
2. Dodekaeder	$\frac{\sqrt{5} - 5}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\frac{5 - \sqrt{5}}{2} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{5}} - P_n\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right]$
3. Würfel	2	-1	$[1 + P_n(-1)]$
4. Oktaeder	-2	$+\frac{1}{3}$	$3\left[\frac{1}{3} - P_n\left(\frac{1}{3}\right)\right]$
5. Tetraeder	4	$-\frac{1}{3}$	$-3\left[-\frac{1}{3} - P_n\left(-\frac{1}{3}\right)\right]$

Da stets $\lambda_0 \neq 0$ ist, so ist in allen Fällen

$$Y_o = a \tag{11}$$

und die Gleichung (10) hat überall die Form

$$P_n(x) = x \tag{3}$$

auf welche sich unser Hülfssatz bezieht.

Sie ist zunächst für jedes x für $n = 1$ erfüllt. Y_1 in (7) bleibt willkürlich.

1. Fall. Für das Ikosaeder ist $x = \frac{\sqrt{5}}{3}$, und die Bedingung (2) ist für $\varkappa = 2$ erfüllt. $\left(U_2 = \frac{116}{9^3};\ x^2(1 - x^2) = \frac{180}{9^3}\right)$. Es existieren keine weitern Lösungen von (3).

2. Fall. Für das Dodekaeder ist $x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ und (2) gilt von $\varkappa = 4$

ab. $\left(U_4 = \frac{356}{5^5};\ x^2(1-x^2) = \frac{500}{5^5}\right.$, während unter 4 nur die Lösung $n = 1$ vorhanden ist.

In beiden Fällen ist also (7) von der Form

$$p = a + Y_1.$$

und dies ist die Stützebenenfunktion einer beliebig orientierten Kugel vom Halbmeser a, die hier die einzige Lösung darstellt.

3. Fall. Für den Würfel ist $x = -1$ und Gleichung (3) hat die unendlich vielen Lösungen

$$n = 2\varkappa + 1$$

sodass

$$p = a + \sum_{\varkappa=0}^{\infty} Y_{2\varkappa+1}$$

wird. Wie sich hieraus oder auch aus (6_3) direkt ablesen lässt, sind die gesuchten Flächen F hier identisch mit den Flächen konstanter Breite $2a$.

5. Fall. Für das Tetraeder ist $x = -\frac{1}{3}$ und Ungleichung (2) für $\varkappa = 6$ erfüllt. $(U_6 = 45896 \cdot 3^{-12};\ x^2(1-x^2) = 52488 \cdot 3^{-12}$

Unterhalb $n = 6$ existieren die Lösungen

$$n = 1 \qquad n = 2 \qquad n = 5$$

Man hat also

$$\left.\begin{aligned} q &= Y_1 + Y_2 + Y_5 \\ p(r) &= a + Y_1 + Y_2 + Y_5 \end{aligned}\right\} (12) \qquad \text{anzusetzen.}$$

Die Bedingung (6_5) ist nun nicht nur notwendig, sondern in Verbindung mit (11) auch hinreichend, dass alle der Fläche F umschriebenen regulären Tetraeder kongruent seien. Es wird hier

$$(L)_{\vartheta=0} = q(0, \varphi) + q(\delta^*, \varphi) + q\left(\delta^*, \varphi + \frac{2\pi}{3}\right) + q\left(\delta^*, \varphi - \frac{2\pi}{3}\right)$$

und dieser Ausdruck wird beim Einsetzen von (12) und (8) unter Beachtung der Gleichung

$$\left(\frac{d^3 P_5(x)}{d x^3}\right)_{x=-\frac{1}{3}} = 0$$

identisch zu null, welches auch die Werte der Koeffizienten A, B der auftretenden Kugelfunktionen seien. Daraus folgt, dass die Gleichung

(6_5) auch dann erfüllt ist, wenn der Punkt r_1 statt in den Nordpol, nach einer beliebigen andern Stelle verlegt wird, und dass somit (12) wirklich eine Lösung gibt, welches auch die Koeffizienten der Kugelfunktionen seien.

4. Fall. Die Lösungen für das Oktaeder lassen sich aus denen für das Tetraeder ableiten, da sie in ihnen enthalten sein müssen. Aus den gefundenen Tetraederlösungen werden sie ausgeschieden, wenn man die Forderung hinzufügt, dass die Flächen auch konstante Breite haben sollen. Dementsprechend ist hier

$$p = a + Y_1 + Y_5. \tag{13}$$

was den Lösungen $n = 1$ $n = 5$ von (3) für $x = \frac{1}{3}$ entspricht.

Bei gegebener Polyedergrösse (a) enthält die Lösung (12) 19, die Lösung (13) 14 willkürliche Parameter. Von diesen hängen die drei Koeffizienten von Y_1 und drei weitere von der Orientierung der Fläche im Raume ab, sodass 13 resp. 8 eigentliche Formparameter übrig bleiben. Nimmt man sie alle gleich null an, so ergibt sich die Kugel. Für genügend benachbarte Werte ergeben sich konvexe geschlossene Flächen, wie es der Sinn unserer Aufgabe verlangt. Eine Diskussion dieser Flächen ist teils von mir[1]) an anderm Orte gegeben worden, teils lässt sie sich einfach durchführen auf Grund der Formeln, die von A. Hurwitz[2]) angegeben worden sind. Die Flächen besitzen eine Reihe von interessanten Eigenschaften und es ist zu bemerken, dass sie unter Aufrechterhaltung der Konvexität doch erheblich von der Kugelform abweichen können.

4.

Die Resultate der vorliegenden Untersuchung können folgendermassen ausgesprochen werden:

Die Aufgabe hat die Kugel als einzige Lösung, wenn das stützende Polyeder ein Ikosaeder oder ein Dodekaeder ist.

Die Aufgabe hat für den Fall eines stützenden Würfels als vollständige Lösung die Gesamtheit aller Flächen konstanter (vorgeschriebener) Breite.

---

[1]) Verhandlungen d. Schweiz. naturf. Ges. Basel 1910 (Bd. 1).

[2]) Annales de l'école normale T XIX (1902) S. 401 ff.

Für den Fall eines stützenden Tetraeders ist die Stützebenenfunktion der allgemeinsten Lösung

$$p = a + Y_1 + Y_2 + Y_5$$

und die Lösung enthält 13 eigentliche Formparameter, die innerhalb des Konvexitätsbereichs der Fläche willkürlich wählbar sind.

Für das Oktaeder endlich hat die allgemeinste Lösung die Form

$$p = a + Y_1 + Y_5$$

die acht wesentliche Formparameter enthält.