Geometrische Mitteilungen.

Von

A. KIEFER, Zürich.

(Als Manuskript eingegangen am 28. März 1918.)

Einleitung.

Im folgenden sollen einige geometrische Beziehungen in der Ebene mit solchen im Raum, speziell auf einer Kugel, in Zusammenhang gebracht werden. Diese Idee ist nicht neu. Altbekannt ist die stereographische Projektion, deren Erfindung Hipparch zugeschrieben wird;[1] die Punkte und Kreise auf einer Kugel werden von einem Punkte der Kugel aus zentral auf eine Ebene projiziert, die auf dem Kugeldurchmesser des Projektionszentrums senkrecht steht. Als Gaspard Monge an zwei und drei Kugeln die gemeinschaftlichen Tangentialebenen legte, fand er, dass die sechs Ähnlichkeitspunkte von drei Kreisen der gleichen Ebene viermal zu dreien auf den vier Ähnlichkeitsachsen liegen, in denen die Tangentialebenen die Kreisebene paarweise schneiden.[2] Cayley stellte die Kreise einer Ebene durch die hindurchgehenden Nullkugeln im Raum dar und fand, dass die Kreise, welche drei Kreise der Ebene berühren, zu denjenigen Nullkugeln gehören, welche durch die zu den drei Kreisen gehörigen Punkte hindurchgehen.[3] In seiner inhaltsreichen Zyklographie stellte W. Fiedler die Kreise einer Ebene durch die Spitzen rechtwinkliger Rotationskegel dar, die über den Kreisen als Grundflächen stehen und fand, dass die Schnittpunkte von drei solchen Kegeln Kreise darstellen, welche die Grundkreise der drei Kegel berühren.[4] Durch Zentralprojektion einer Fläche dritter Ordnung aus einem ihrer Punkte auf eine beliebige Ebene, also durch eine Art stereographisher Pro-

[1]) Handbuch der Mathematik, Physik, Geodäsie und Astronomie. Von Dr. Rudolf Wolf. (Zürich, Fr. Schulthess). Bd. II, S. 150.

[2]) Leçons de géometrie descriptive. (Paris, 1794). 4^{me} éd., n° 44.

[3]) Annali di Matimatica. Bd. 1.

[4]) Zyklographie oder Konstruktion der Aufgaben über Kreise und Kugeln. Von Dr. Wilhelm Fiedler. (Leipzig, B. G. Teubner).

jektion, erkannte Hr. C. F. Geiser einen Zusammenhang zwischen den Geraden der Fläche und den Doppeltangenten der Kurve vierter Ordnung, in welche sich die Fläche projiziert.[1]) Die folgenden Mitteilungen bewegen sich indessen in anderem Rahmen.

I. Der Satz von Pascal.

Bei einem Sechseck, dessen Ecken 1, 2, 3, 4, 5, 6 auf einem Kreis liegen, bestimmen die drei Paar Gegenseiten 1 2, 4 5 und 2 3, 5 6 und 3 4, 6 1 drei Schnittpunkte X, Y, Z, die auf einer Geraden liegen.

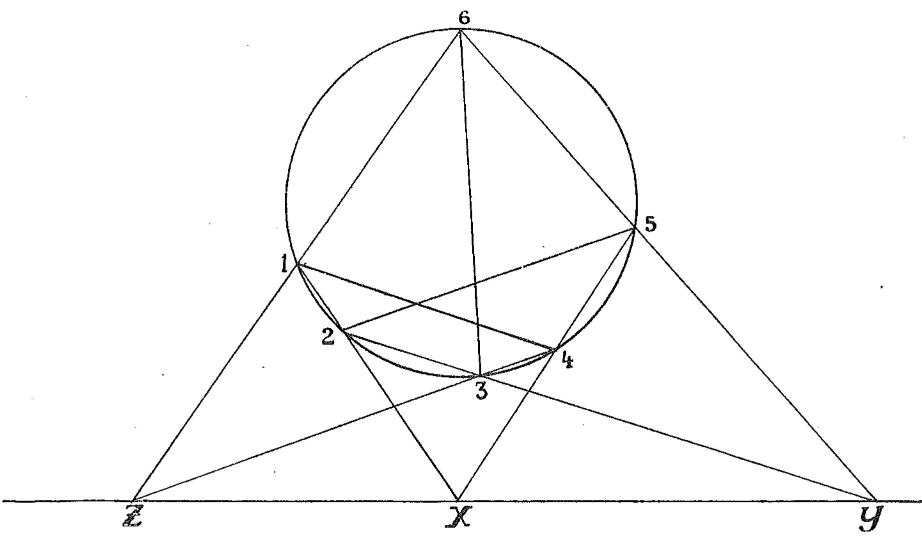

Abb. 1

Über den Strecken 1 4, 2 5, 3 6 als Durchmesser, denke man sich die drei Kreise gelegt, deren Ebenen auf der Zeichnungsebene senkrecht stehen. Diese drei Kreise liegen dann auf der Kugel, welche den gegebenen Kreis zum Grosskreis hat. Man kann die drei Geradenpaare 1 2, 4 5 und 2 3, 5 6 und 3 4, 6 1 als Achsenschnitte der Zeichnungsebene mit drei Kegeln auffassen, die durch je zwei von den drei Kreisen gehen. Nämlich der Kegel 1 2, 4 5 mit der Spitze X geht durch die zwei Kreise 1 4, 2 5, der Kegel 2 3, 5 6 mit der Spitze Y durch die zwei Kreise 2 5, 3 6, der Kegel 3 4, 6 1 mit der Spitze Z durch die zwei Kreise 3 6, 1 4. Denkt man sich auf die drei Kreise im Raum eine gemeinschaftliche Tangentialebene gelegt, so muss sie, weil auf jedem Kegel zwei der drei Kreise liegen, alle drei Kegel berühren. Folglich liegen

[1]) Mathematische Annalen. Bd. 1.

die Spitzen der drei Kegel, das sind die drei Punkte X, Y, Z auf einer Geraden, der Spur jener Tangentialebene.

Die drei Kreise im Raum haben acht gemeinsame Tangentialebenen, die paarweise zur Zeichnungsebene symmetrisch liegen und auf der Zeichnungsebene sich schneiden. Diese vier Geraden sind die Pascallinien von vier Sechsecken, von denen drei aus demjenigen der Abbildung durch Vertauschung von je zwei Ziffern entstehen, nämlich 2 mit 3 und zugleich 5 mit 6, ferner 3 mit 4 und zugleich 6 mit 1, ferner 4 mit 5 und zugleich 1 mit 2.

Projiziert man die drei Kreise auf der Kugel über dem gegebenen Kreis als Grosskreis nach der stereographischen Projektion auf die Zeichnungsebene, so entstehen die drei Kreise, welche den gegebenen Kreis in 1, 4 und 2, 5 und 3, 6 rechtwinklig schneiden; X, Y, Z sind drei zusammengehörige Ähnlichkeitspunkte der drei Kreise und müssen daher auf einer Geraden liegen.[1])

Die räumliche Darstellung des Satzes von Pascal kann benutzt werden, um eine räumliche Vorstellung zu gewinnen über die von **Steiner** und andern gefundenen Beziehungen zwischen den Pascallinien, die zu den verschiedenen durch die sechs gegebenen Punkte bestimmten einfachen Sechsecken gehören.

II. Der Satz von Brianchon.

Bei einem Sechsseit, dessen Seiten 1, 2, 3, 4, 5, 6 einen Kreis berühren, bestimmen die drei Paar Gegenecken 1 2, 4 5 und 2 3, 5 6 und 3 4, 6 1 drei Verbindungslinien x, y, z, die durch einen Punkt gehen.

Man betrachte die drei Geradenpaare 1, 4 und 2, 5 und 3, 6 als Achsenschnitte der Zeichnungsebene mit drei Kegeln K_1, K_2, K_3, die der Kugel über dem gegebenen Kreis als Grosskreis umschrieben sind. Je zwei dieser Kegel durchdringen sich in zwei Kegelschnitten, die sich senkrecht auf die Zeichnungsebene in Strecken projizieren. Drei dieser Projektionen sind 1 2, 4 5 und 2 3, 5 6 und 3 4, 6 1. Die drei Kegelschnitte müssen sich im Raume in zwei zur Zeichnungsebene symmetrischen Punkten schneiden, die allen drei Kegeln angehören; daher gehen die drei Geraden 1 2, 4 5 und 2 3, 5 6 und 3 4, 6 1, das sind x, y, z, durch einen Punkt, nämlich durch die Projektion jenes Schnittpunktspaares.

Die zwei Durchdringungskegelschnitte der Kegel K_1, K_2 schneiden sich in zwei zur Zeichnungsebene symmetrischen Punkten, deren Pro-

[1]) J. Steiners Vorlesungen über synthetische Geometrie. Erster Teil, bearbeitet von Dr. C. F. Geiser, Die Theorie der Kegelschnitte in elementarer Darstellung 3. Auflage (Leipzig, B. G. Teubner), S. 17.

jektion der Pol R der Verbindungslinie der Kegelspitzen K_1, K_2 ist; ebenso geben die Kegel K_2, K_3 den Pol P und die Kegel K_3, K_1 den Pol Q. Die zwei Durchdringungskegelschnitte der Kegel K_1, K_2 schneiden den Kegel K_3 in acht Punkten, die paarweise zur Zeichnungsebene symmetrisch liegen. Durch jeden von den acht Punkten müssen je drei von den sechs Kegelschnitten gehen. Die Projektionen dieser

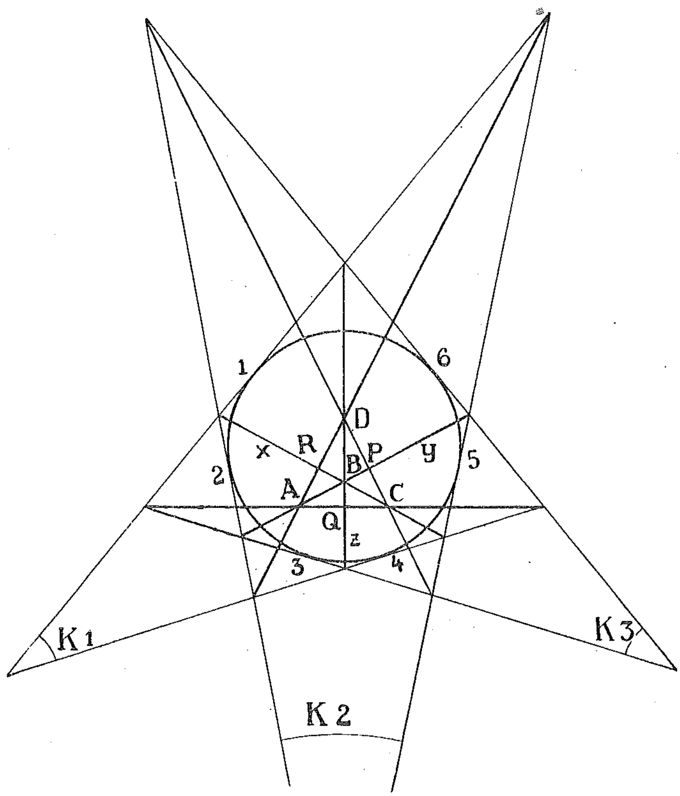

Abb. 2

acht Punkte sind in der Abbildung mit A, B, C, D bezeichnet. B ist der Schnittpunkt von 1 2, 4 5 und 2 3, 5 6 und 3 4, 6 1. Der Punkt A tritt auf, wenn man die Ziffern 2 mit 3 und zugleich 5 mit 6 vertauscht, und ähnlich die andern Punkte.

III. Das Berührungsproblem von Apollonius.

Zu drei in einer Ebene gegebenen Kreisen K_1, K_2, K_3 die acht Kreise zu finden, von denen jeder die drei gegebenen Kreise berührt.

Um den äussern Ähnlichkeitspunkt der Kreise K_1, K_2 lege man ihren Potenzkreis, der durch ihre zwei reellen oder imaginären Schnittpunkte hindurch geht, d. h. zu ihrem Büschel gehört; ebenso lege man den äussern Potenzkreis der Kreise K_2, K_3. Diese zwei Potenzkreise schneiden sich in zwei Punkten U, V (durch welche auch der Potenzkreis von K_3, K_1 hindurchgeht). Betrachtet man U, V als Grenzpunkte eines Kreisbüschels zweiter Art, so sind diejenigen zwei Kreise des Büschels, die irgend einen der drei Kreise, z. B. K_1, berühren, zwei gesuchte Berührungskreise.

Man erhält die Berührungspunkte, Mittelpunkte und Radien dieser Kreise, wie gewöhnlich, wenn die Grundpunkte reell sind, oder auch, indem man durch U, V den Kreis legt, der einen der drei Kreise, z. B. K_1, ortogonal schneidet; die Schnittpunkte sind die Berührungspunkte mit K_1. Die Tangenten in diesen Punkten an den Ortogonalkreis schneiden die Gerade U V in den Mittelpunkten der gesuchten Kreise und die Strecken der Tangenten zwischen Berührungspunkt und Mittelpunkt sind die Radien der zwei Berührungskreise.

Wiederholt man diese Konstruktion für jeden äussern und je einen nicht dazu gehörigen innern Potenzkreis[1]), so erhält man die drei andern Paare berührender Kreise.

Die Konstruktion ergibt sich auf einfache Art durch eine räumliche Überlegung. Angenommen die drei Kreise K_1, K_2, K_3 schneiden sich, so gibt es um ihren Potenzpunkt als Mittelpunkt einen Kreis, der von allen drei Kreisen in Durchmessern geschnitten wird. Legt man die Kugel über diesen Kreis als Grosskreis und projiziert die drei Kreise stereographisch auf die Kugel, so entstehen drei Grosskreise, die acht sphärische Dreiecke begrenzen. Jedes hat einen Inkreis und die stereographischen Projektionen dieser Inkreise auf die Zeichnungsebene sind die acht Berührungskreise der drei gegebenen Kreise. Zu jedem sphärischen Dreieck gehört ein Scheiteldreieck; die sphärischen Pole ihrer zwei Inkreise liegen auf einem Kugeldurchmesser und sind die Schnittpunkte der winkelhalbierenden Grosskreise der Dreieckswinkel. Die Ortogonalkreise durch diese Punkte zu den Seiten der sphärischen Dreiecke geben auf den Seiten die Berührungspunkte mit den Inkreisen; die Tangenten in diesen Punkten an den betreffenden Ortogonalkreis schneiden den Verbindungsdurchmesser der sphärischen Pole in der Spitze des zum Inkreis gehörigen Berührungskegels. Pro-

[1]) Beim Imaginärwerden von Potenzkreisen lässt sich die Potenzlinie gleichwohl konstruieren. Ersetzt man übrigens einen Potenzkreis mit dem Radius $r\sqrt{-1}$ durch den Kreis mit dem reellen Radius r, so wird dieser Kreis im Durchmesser geschnitten.

jiziert man alles stereographisch, so gehen die Halbierungskreise über in die Potenzkreise, indem die Mittelpunkte der letztern die Zentrale im Verhältnis der Radien teilen und also die Ähnlichkeitspunkte sind. Die sphärischen Pole projizieren sich in die Schnittpunkte der Potenzkreise und werden zu Grenzpunkten eines Kreisbüschels zweiter Art, dem die Berührungskreise angehören. Man hat die angegebene Konstruktion.

Aus ihr kann man die Gergonnesche Konstruktion herauslesen. Der Potenzpunkt der drei gegebenen Kreise hat nämlich für die zwei Potenzkreise gleiche Potenz; also geht U V durch ihn. U, V liegen zur Ähnlichkeitsachse symmetrisch; daher hat der Ortogonalkreis durch U, V zu K_1 seinen Mittelpunkt auf der Ähnlichkeitsachse und seine Durchbohrungssehne mit K_1 muss durch den Potenzpunkt der drei Kreise gehen und den Pol der Ähnlichkeitsachse inbezug auf K_1 enthalten. Durch jedes Punktepaar U, V gehen drei Potenzkreise und auf jedem solchen Kreis liegen zwei Punktepaare U, V. Aus der Konstruktion folgen auch ohne weiteres die beiden Plückerschen Lösungen. Die zu dem Kreisbüschel mit den Grenzpunkten U, V gehörigen Grundpunkte sind nämlich die Schnittpunkte der Ähnlichkeitsachse mit dem Ortogonalkreis der drei Kreise, indem ja U, V den Ortogonalkreis harmonisch trennen; daher geht ein gesuchtes Kreispaar durch die zwei Grundpunkte und berührt jeden von den drei gegebenen Kreisen.[1]) Da die Berührungssehne durch den Pol der Ähnlichkeitsachse und den Potenzpunkt der drei gegebenen Kreise geht, so schneiden sich die zwei Tangenten der Berührungspunkte auf der Ähnlichkeitsachse und zwar in ihrem Schnittpunkte mit der Polaren des Potenzpunktes inbezug auf den betreffenden Kreis.[2])

Die Konstruktion lässt sich auch auf planimetrische Art finden. Wenn zwei Kreise K_1, K_2 von einem dritten Kreis berührt werden, so sind die Berührungspunkte inverse Punkte. Ihre Verbindungslinie geht durch den entsprechenden Ähnlichkeitspunkt der zwei Kreise und die Potenz des Ähnlichkeitspunktes inbezug auf den berührenden Kreis ist gleich dem Quadrat des Radius des Potenzkreises; also schneidet der berührende Kreis den Potenzkreis rechtwinklig. Werden drei Kreise von einem vierten Kreis berührt, so muss der letztere die drei entsprechenden Potenzkreise rechtwinklig schneiden und ist

[1]) Analytisch-geometrische Entwicklungen, von J. Plücker. (G. D. Baedecker, Essen). 1. Bd. S. 109.

[2]) Dito S. 111. — Auf die von Steiner an verschiedenen Stellen seiner Arbeiten angegebenen, grundlegenden Resultate, die sich auf das Berühren und Schneiden von Kreisen und Kugeln beziehen, sei im allgemeinen verwiesen.

daher ein Kreis des Büschels zweiter Art, das die zwei Schnittpunkte der drei Potenzkreise zu Grenzpunkten hat, w. z. z. w. — Die Konstruktion kann auch dann angewendet werden, wenn die Mittelpunkte der gegebenen drei Kreise auf einer Geraden liegen, wo bekanntlich die Gergonnesche Konstruktion versagt.

Zur Ableitung der Resultate war eingangs dieses Abschnittes angenommen, dass die drei in einer Ebene gegebenen Kreise sich schneiden. Wenn das nicht der Fall ist, so gibt es zu den drei Kreisen einen Ortogonalkreis. Legt man über ihn als Grosskreis eine Kugel, so sind die stereographischen Bilder der drei Kreise auf der Kugel drei Kreise, deren Ebenen auf der Zeichnungsebene senkrecht stehen und deren Durchmesser die Sehnen sind, die der Ortogonalkreis mit den drei Kreisen gemeinsam hat. Die berührenden Kreise zu diesen Kreisen auf der Kugel werden aus der Kugel durch die gemeinsamen Tangentialebenen der drei Kreise heraus geschnitten. Solcher gemeinsamer Tangentialebenen gibt es acht, die paarweise zur Zeichnungsebene symmetrisch liegen und je eine der vier Ähnlichkeitsachsen der drei gegebenen Kreise zur Spur haben. Diese Ähnlichkeitsachse ist daher Potenzlinie für zwei gesuchte Kreise und da ihre Bilder auf der Kugel zur Zeichnungsebene symmetrisch liegen, so ist der Mittelpunkt der Kugel Ähnlichkeitspunkt des Paars gesuchter Kreise in der Ebene. Man hat also die frühern Ergebnisse. Werden von den Ähnlichkeitspunkten der drei gegebenen Kreise an die Kugel Tangentenkegel gelegt, so sind ihre Berührungskreise auf der Kugel die Bilder der Potenzkreise in der Ebene. Diese Bilder schneiden sich zu dreien in Punktepaaren, die zur Zeichnungsebene symmetrisch liegen, ihre entsprechenden Punkte auf der Zeichnungsebene sind die Punkte U, V u. s. f.

Will man zu drei beliebigen Kreisen auf einer Kugel die berührenden Kreise haben, so kann man die drei in einer Ebene gegebenen Kreise mit ihren Berührungskreisen auf eine beliebige Kugel stereographisch projizieren, oder man kann direkt sagen: Zu drei auf einer Kugel gegebenen Kreisen werden die berührenden Kreise durch die gemeinsamen Tangentialebenen der drei Kreise aus der Kugel herausgeschnitten. Die drei Kreise liegen paarweise auf sechs Kegeln zweiten Grades, deren Spitzen zu dreien auf vier Geraden liegen. Die sechs Spitzen sind paarweise die Ähnlichkeitspunkte von je zwei der drei Kugeln, welche die gegebene Kugel in den drei Kreisen ortogonal schneiden, weil je zwei der Kreise für die zwei hindurchgehenden Kugeln inverse Kreise sind. Legt man von den Kegelspitzen die Tangentenkegel an die Kugel, so sind die Berührungskreise auf der

Kugel die Kreise, die den Potenzkreisen entsprechen. Sie schneiden sich in vier Paaren von Punkten, welche die sphärischen Pole von gesuchten Kreisen sind; die letztern sind durch jene Pole bestimmt. Die vier Geraden, auf denen die vier Paar Pole liegen, gehen durch den Schnittpunkt der drei Kreisebenen. Die Pole der acht gesuchten Kreisebenen inbezug auf die Kugel sind die acht Schnittpunkte der drei Kegel, die der Kugel längs der drei Kreise umschrieben sind, und sich paarweise in zwei Kegelschnitten durchdringen; die stereographischen Projektionen der sechs Kegelschnitte enthalten die acht Mittelpunkte der acht Apolloniusschen Berührungskreise in der Zeichnungsebene.

Die Ausdehnung des Berührungsproblems von Apollonius auf den Raum, wo zu vier gegebenen Kugeln sechzehn berührende Kugeln zu finden sind, gestaltet sich folgendermassen. Eine Kugel, welche vier Kugeln berührt, muss die vier entsprechenden Potenzkugeln von je zwei der vier Kugeln ortogonal schneiden. Also ist sie eine Kugel des Büschels zweiter Art, das die zwei Schnittpunkte der vier Potenzkugeln zu Nullkugeln hat. Also: Wenn K_1, K_2, K_3, K_4 die vier Kugeln sind, so legt man um den äussern Ähnlichkeitspunkt von K_1, K_2 ihre Potenzkugel, ebenso für K_1, K_3 und K_1, K_4. Die drei Potenzkugeln schneiden sich in zwei Punkten U^*, V^*. Betrachtet man diese zwei Punkte als Nullkugeln eines Kugelbüschels zweiter Art, so sind die zwei Kugeln dieses Büschels, welche eine der vier Kugeln berühren, zwei gesuchte Kugeln. Der Kreis durch U^*, V^*, der zu irgend einer der vier gegebenen Kugeln ortogonal ist, schneidet diese Kugel in ihren Berührungspunkten mit den zwei gesuchten Kugeln; die Tangenten in diesen Punkten an den Ortogonalkreis schneiden die Gerade U^*, V^* in den Mittelpunkten der zwei gesuchten Kugeln und die Tangentenstücke zwischen Berührungspunkt und Mittelpunkt sind die Radien. Durch geeignete Herbeiziehung der innern Ähnlichkeitspunkte erhält man die andern sieben Paare gesuchter Kugeln.[1]) Es gibt acht Punktepaare U^*, V^*; jedes trennt die Ortogonalkugel der vier Kugeln harmonisch und seine Verbindungsgerade geht durch den Mittelpunkt der Ortogonalkugel, u. s. f.

[1]) Für ausführliche Anordnung der Ähnlichkeitspunkte, Achsen und Ebenen sehe man: Einleitung in die synthetische Geometrie. Von Dr. C. F. Geiser (Leipzig, B. G. Teubner), S. 105.

IV. Schneiden von drei Kreisen unter gegebenem gleichem Winkel.

Man denke sich wieder eine stereographische Abbildung, z. B. die im vorigen Abschnitt angegebene gemacht, bei der sich die drei Kreise in Grosskreise der Kugel verwandeln. Die drei Grosskreise begrenzen acht sphärische Dreiecke. Für eines derselben denke man sich den Inkreis; dann schneidet jeder Parallelkreis zum Inkreis die Seiten des sphärischen Dreiecks unter gleichem Winkel. Hat dieser Winkel die gegebene Grösse δ, so ist die stereographische Projektion des Parallelkreises ein Kreis, der die drei gegebenen Kreise unter dem Winkel δ schneidet. Um also zu drei Kreisen die Kreise zu finden, die jeden unter dem gegebenen Winkel δ schneiden, sucht man, wie im vorigen Abschnitt die Punkte U, V, betrachtet sie als Grenzpunkte eines Kreisbüschels zweiter Art und sucht seine Kreise, die einen der drei Kreise unter dem Winkel δ schneiden. Man kann die Schnittpunkte auch so finden, dass man durch U, V den Kreis legt, der einen der drei Kreise unter dem Winkel $90^\circ - \delta$ schneidet; die Tangenten in den Schnittpunkten an den Schnittkreis schneiden die Gerade U, V in den Mittelpunkten gesuchter Kreise und die Tangentenstücke sind die Radien.

Die übrigen Punktepaare U, V geben die andern Kreise.

Auch diese Konstruktion ergibt sich planimetrisch, indem ein Kreis, der drei Kreise gleichwinklig schneidet, ihre zugehörigen drei Potenzkreise rechtwinklig schneidet und daher zum Kreisbüschel zweiter Art gehört, das die zwei Schnittpunkte der Potenzkreise zu Grenzpunkten hat.

Analog bei vier Kugeln. Sucht man also für vier Kugeln, wie früher, das Punktepaar U^*, V^*, betrachtet U^*, V^* als Nullkugeln eines Kugelbüschels zweiter Art, so schneiden die Kugeln des Büschels, die eine der vier Kugeln unter dem Winkel δ schneiden, alle Kugeln unter diesem Winkel. Ebenso für die andern sieben Punktepaare.

Sind zu vier Kreisen in einer Ebene die gleichwinklig schneidenden Kreise zu finden, so nimmt man für die ersten drei Kreise eines der Punktepaare U, V und sucht zu U, V als Grenzpunkten die zwei Kreise, welche einen von den drei Kreisen und den vierten Kreis gleichwinklig scheiden; es gibt zwei solche Kreise, nämlich die Ortogonalkreise zu den zwei Potenzkreisen eines der drei Kreise und des vierten Kreises. Zu vier Kreisen gibt es demnach acht gleichwinklig schneidende Kreise. — Sind zu fünf Kugeln im Raum die Kugeln zu finden, welche alle gleichwinklig schneiden, so nimmt man eines der Punktepaare U^*, V^*, das zu den vier ersten Kugeln gehört und sucht zu U^*, V^* als Nullkugeln diejenigen Kugeln, welche eine der vier Kugeln und die fünfte Kugel gleichwinklig schneiden. Es gibt zwei solche Kugeln, nämlich die Ortogonalkugeln zu den zwei Potenzkugeln von einer der vier Kugeln und der fünften Kugel. Im ganzen treten demnach sechzehn Kugeln auf, die fünf Kugeln gleichwinklig schneiden.

Die acht Punktepaare U^*, V^* bestimmen acht Kugelbüschel zweiter Art. Jede Kugel jedes Büschels schneidet die vier gegebenen Kugeln gleichwinklig. Soll der Schnittwinkel ein rechter Winkel sein, so gibt es zu den vier Kugeln bekanntlich nur eine gemeinsame Schnittkugel, die Ortogonalkugel. Damit steht im Einklang, dass die acht Geraden $U^* V^*$ durch den Potenzpunkt der vier Kugeln gehen und jedes Punktepaar U^*, V^* die Ortogonalkugel harmonisch trennt.

V. Schneiden von drei Kreisen unter gegebenen ungleichen Winkeln.

Man denke sich wieder die stereographische Projektion ausgeführt, bei welcher die drei Kreise zu drei Grosskreisen der Kugel werden. In einem der acht von den drei Grosskreisen gebildeten sphärischen Dreiecken mit den Winkeln α, β, γ denke man sich einen Kreis gelegt, der die Gegenseiten der Winkel α, β, γ unter den Winkeln δ, ε, φ schneidet. Verbindet man jetzt den sphärischen Mittelpunkt U' dieses Kreises mit der Spitze des Winkels α durch einen Grosskreis, so teilt er den Winkel α in zwei Teile α_1, α_2 und eine einfache Überlegung zeigt, dass

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{\sin (90^\circ - \varepsilon)}{\sin (90^\circ - \varphi)};$$

ebenso für die Grosskreise nach den Spitzen der Winkel β, γ und deren Teile

$$\frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} = \frac{\sin (90^\circ - \varphi)}{\sin (90^\circ - \delta)}, \quad \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2} = \frac{\sin (90^\circ - \delta)}{\sin (90^\circ - \varepsilon)}.$$

Das Produkt dieser Verhältnisse ist 1 und daher sind U' und sein diametraler Gegenpunkt V' die Schnittpunkte von drei Grosskreisen, die α, β, γ nach den angegebenen Sinusteilverhältnissen teilen; wenn δ, ε, φ gegeben sind, so sind für das sphärische Dreieck und sein Scheiteldreieck die Punkte U', V' bestimmt, und ebenso für die andern sechs Dreiecke drei weitere Punktepaare. Wenn man δ, ε, φ ändert, so gehören zu jeder Gruppe dieser drei Winkel vier bestimmte Punktepaare U', V' und umgekehrt gehört zu einem Paar diametraler Gegenpunkte U', V' eine bestimmte Winkelgruppe δ, ε, φ mit den andern Paaren. Ein Parallelkreis mit den sphärischen Mittelpunkten U', V', der den Grosskreis, der α gegenüberliegt unter dem Winkel δ schneidet, trifft die zwei andern Grosskreise unter den Winkeln ε, φ. (Sind die drei Winkel δ, ε, φ einander gleich, so gehört zu allen Gruppen in zwei Scheiteldreiecken je ein einziges Punktepaar U', V', gebildet von den sphärischen Mittelpunkten der Inkreise). Projiziert man jetzt stereographisch auf die Ebene der Zeichnung, so verwandelt sich der Grosskreis durch U', V' und die Spitze von α in einen Kreis, der durch die Schnittpunkte von K_2, K_3 hindurch geht und den Schnittwinkel α von K_2, K_3 im Sinusteilverhältnis

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{\sin (90^\circ - \varepsilon)}{\sin (90^\circ - \varphi)}$$

teilt. Der Mittelpunkt O_1 dieses Kreises liegt auf der Zentralen von K_2, K_3. Bezeichnet man die Mittelpunkte der Kreise K_1, K_2, K_3 ebenfalls mit K_1, K_2, K_3 und die Radien mit R_1, R_2, R_3, so zeigt wieder eine einfache Überlegung, dass sein muss

$$\frac{K_2 O_1}{K_3 O_1} = + \frac{R_2 \sin \alpha_1}{R_3 \sin \alpha_2} = + \frac{R_2 \sin (90^\circ - \varepsilon)}{R_3 \sin (90^\circ - \varphi)};$$

analog für die Mittelpunkte O_2, O_3 der Kreise, in welche sich die Grosskreise durch U', V' und die Spitze von β beziehungsweise γ projizieren. Das Produkt der Teilverhältnisse ist $+1$ und daher liegen O_1, O_2, O_3 auf einer Geraden, was damit stimmt, dass die Kreise sich in zwei Punkten U, V, den Projektionen von U', V', schneiden. Was nun die Grosskreise durch die Nebenwinkel von α, β, γ anbetrifft, so mögen ihre Bilder die Mittelpunkte O'_1, O'_2, O'_3 haben und es ist

$$\frac{K_2 O'_1}{K_3 O'_1} = - \frac{R_2 \sin \alpha_1}{R_3 \sin \alpha_2} = - \frac{R_2 \sin (90^\circ - \varepsilon)}{R_3 \sin (90^\circ - \varphi)},$$

und analog für O'_2, O'_3. Von diesen drei Punkten liegen je zwei mit dem nicht zugehörigen O_1 oder O_2 oder O_3 auf einer Geraden, weil das Produkt der Teilverhältnisse $+1$ ist; das stimmt wieder damit, dass die drei entsprechenden Kreise durch zwei Punkte gehen. Man hat folgende Konstruktion:

Man teilt die Zentrale $K_2 K_3$ von aussen und innen im Verhältnis

$$\frac{R_2 \sin (90^\circ - \varepsilon)}{R_3 \sin (90^\circ - \varphi)}$$

und ähnlich die andern Zentralen. Die Teilpunkte liegen viermal zu dreien auf einer Geraden. Um zwei der Punkte auf derselben Geraden, legt man die Kreise, die dem Büschel der betreffenden zwei gegebenen Kreise angehören. Die zwei so gefundenen Kreise schneiden sich in zwei Punkten U, V; die zwei Kreise, welche U, V zu Grenzpunkten haben und einen der gegebenen Kreise unter dem zugehörigen gegebenen Winkel schneiden, sind gesuchte Kreise. Die Schnittpunkte eines solchen mit einem der gegebenen Kreise, z. B. K_1, ergeben sich auch so, dass man durch U, V die Kreise legt, die K_1 unter dem Winkel $90° - \delta$ schneiden. Jede der vier Geraden U V geht durch den Potenzpunkt von K_1, K_2, K_3, und ihr Ortogonalkreis wird von jedem Punktepaar U, V harmonisch getrennt.

Lässt man $\sin(90° - \delta) : \sin(90° - \varepsilon) : (90° - \varphi)$, konstant, so bleiben die Punktepaare U, V fest und für alle Kreise mit diesen Punkten als Grenzpunkten bleiben die obigen Sinusverhältnisse konstant. Ist noch ein vierter Kreis gegeben und soll $\sin(90° - \delta) : \sin(90° - \varepsilon) : \sin(90° - \varphi) : \sin(90° - \psi)$ gegeben sein, wo ψ den Schnittwinkel mit dem vierten Kreis bedeutet, so gibt es zu den vier Kreisen acht derartig schneidende Kreise. Man sucht zum ersten und vierten Kreis die zwei Kreise, die den früheren zu K_1, K_2 gehörigen Kreisen entsprechen und dann mit U, V als Grenzpunkten den Ortogonalkreis zu jedem von diesen zwei Kreisen; ebenso für die andern Punktepaare.[1])

Auch diese Konstruktionen kann man planimetrisch finden. Die Übertragung auf vier und fünf Kugeln im Raum sei dem Leser überlassen. —[2])

---

[1]) Anal.-geom. Entw., von J. Plücker. 1. Bd. S. 123.

[2]) Liegt ein Kreis auf einer Kugel, so liegen alle Kugelkreise, die den ersten rechtwinklig schneiden, in Ebenen durch den Pol der Kreisebene inbezug auf die Kugel; der Ortogonalkreis zu drei Kugelkreisen liegt in der Ebene durch die drei Pole der Kreisebenen; der Ortogonalkreis zu einem Kugelkreis und zwei Grosskreisen liegt in der Ebene, die durch den Pol der Kreisebene senkrecht zum gemeinsamen Durchmesser der zwei Grosskreise gelegt werden kann; der Ortogonalkreis zu drei Grosskreisen ist der imaginäre Kugelkreis im Unendlichen. — Alle Kugelkreise, die einen gegebenen Kugelkreis berühren, liegen in Ebenen durch die Tangenten des Kreises; die Berührungskreise zu drei Kugelkreisen liegen in den acht gemeinsamen Tangentialebenen der drei Kreise. (S. 500) — Legt man bei einem Kugelkreis durch einen Punkt desselben und in seiner Tangentialebene an die Kugel eine Gerade, welche den Kreis unter dem Winkel δ schneidet, und lässt dann diese Gerade um den Kreis rotieren, so beschreibt sie ein Rotationshyperboloid, welches die Kugel längs des Kreises berührt; jede Tangentialebene dieser Fläche schneidet die Kugel in einem Kreis, der den gewählten Kreis unter dem Winkel δ schneidet. Alle Kreise durch einen Kugelpunkt, die den gewählten Kreis unter dem Winkel δ schneiden, liegen in den Tangentialebenen von dem Punkt an das Hyperboloid; diese Ebenen umhüllen einen Kegel zweiten Grades, der die Kugel in einem Kreis durchdringt, und dieser Kreis wird von allen Kreisen berührt, die durch den Punkt gehen und den gewählten Kreis unter dem Winkel δ schneiden; die Kreise, welche durch zwei Kugelpunkte gehen und den gewählten Kreis unter dem Winkel δ schneiden, liegen in den zwei Tangentialebenen, die durch die zwei Punkte an das Hyperboloid gehen. Hat man auf der Kugel zwei Kreise und einen Punkt, so liegen die Kreise, welche die zwei Kreise beziehungsweise unter den Winkeln δ, ε schneiden und durch den Punkt gehen, in den vier Tangentialebenen, die von dem Punkt an die zwei zu den Kreisen gehörigen Hyperboloide gelegt werden können. Hat man auf der Kugel drei Kreise, so liegen die Kreise, welche die drei Kreise beziehungsweise unter den Winkeln δ, ε, φ schneiden,

VI. Zur stereographischen Kugelprojektion.

Als Bildebene einer solchen Projektion sei eine Tangentialebene T mit dem Berührungspunkt A gewählt, dem Gegenpunkt des Projektionszentrums A_1. Ist P ein Kugelpunkt mit dem Bild P', so schneidet die Tangentialebene des Punktes P die Bildebene T in der mittelsenkrechten Geraden p' zu AP', weil die Ebene durch p' und den Mittelpunkt O der Kugel zu A_1P parallel ist. Man kann p' ebenfalls als Bild von P bezeichnen; zu jedem Punkt P der Kugel gehört eine Gerade p' in T und umgekehrt. Bewegt sich P auf einem Kugelkreis, so umhüllt die zugehörige Gerade p' einen Kegelschnitt, nämlich den Schnitt der Ebene T mit dem Kegel, der die Kugel längs des Kreises berührt. Dieser Kegelschnitt hat A zum Brennpunkt; denn der Kegel, dessen Spitze S der Pol der Kreisebene ist, hat die Kugel zur Dandelinschen Kugel. Aus dem gleichen Grunde ist die Spur der Kreisebene die zu A gehörige Leitlinie des Kegelschnittes. Wählt man umgekehrt in T irgend einen Kegelschnitt mit dem Brennpunkt A und legt durch jede Tangente des Kegelschnittes die Tangentialebene an die Kugel, so ist der Ort des Berührungspunktes ein Kreis. Der

---

in den acht gemeinsamen Tangentialebenen der drei Hyperboloide, die zu den drei Kreisen und den Winkeln δ, ε, φ gehören; die Pole der Schnittkreisebenen inbezug auf die Kugel sind die acht Schnittpunkte der zu den drei Hyperboloiden gehörigen Polarflächen inbezug auf die Kugel. — Eine stereometrische Darstellung für das Schneiden von vier Kreisen auf einer Kugel durch einen fünften Kreis unter gleichen Winkeln ist auf S. 250 der Cyklographie von W. Fiedler angegeben; die acht gesuchten Kreisebenen sind die acht Ähnlichkeitsebenen der vier Kugeln, welche die gegebene Kugel in den vier Kreisen ortogonal schneiden. — Hart hat nachgewiesen, dass bei einem sphärischen Dreieck der Inkreis und die drei Ankreise von einem fünften Kreis berührt werden, der dem Feuerbachschen Kreis analog ist. Legt man durch den Inkreis und die drei Ankreise die Ortogonalkugeln zu der Kugel des sphärischen Dreieckes, so geht die Ebene des Hartschen Kreises durch die drei äussern Ähnlichkeitspunkte der Ankreiskugeln und die drei innern Ähnlichkeitspunkte der Inkreiskugel und je einer Ankreiskugel. Durch stereographische Projektion folgt aus dem Satze von Hart, dass die acht Apolloniusschen Kreise zu drei Kreisen in der Ebene in acht Gruppen zu vier Kreisen zerfallen, so dass die vier Kreise jeder Gruppe von einem fünften Kreis berührt werden. Ein Kreis einer solchen Gruppe ist beliebig; die drei andern berühren je zwei der gegebenen Kreise gleichartig wie der gewählte Kreis und den dritten ungleichartig wie der gewählte Kreis. Der Inkreis eines sphärischen Dreieckes und derjenige seines Scheiteldreieckes liegen auf einem Kegel mit der Spitze im Kugelmittelpunkt. Solcher Kegel gibt es vier und aus ihnen kann man sechs Gruppen zu zweien bilden. Die zwei Kegel einer Gruppe berühren die drei Grosskreisebenen und haben daher noch eine vierte gemeinsame Tangentialebene; sie schneidet die Kugel in einem Grosskreis, welcher die vier Inkreise auf den zwei Kegeln berührt. Also für die Ebene: die acht Apolloniusschen Kreise ordnen sich in sechs Gruppen zu vieren, wobei die vier Kreise einer Gruppe zwei Paare konjugierter Kreise sind, so dass die vier Kreise jeder Gruppe von einem fünften Kreis berührt werden; diese sechs Kreise schneiden den Ortogonal oder Durchmesserkreis der drei gegebenen Kreise rechtwinklig oder im Durchmesser. Salmon-Fiedler, Anal. Geom. d. Kegelschn. Art. 163.

andere Brennpunkt des Kegelschnittes ist der Mittelpunkt S' der stereographischen Projektion des Kreises; denn die Geraden p' sind die Mittelsenkrechten zu den Strecken von A nach den Punkten P' der Kreisprojektion. Die auf AS' gelegene Achse des Kegelschnittes ist gleich dem Radius der Kreisprojektion. Der Mittelpunkt M des Kegelschnittes kann so gefunden werden, dass man die Ebene des Kugelkreises mit AA_1 schneidet, den Schnittpunkt mit S verbindet und die Verbindungslinie mit T schneidet; denn wegen harmonischer Strahlen geht die Linie durch die Mitte von AS'. Die Asymptoten des Kegelschnittes sind parallel zu den Kugeltangenten, die von S aus parallel zu T an die Kugel gehen; denn die Tangentialebenen längs dieser Tangenten an den Berührungskegel schneiden T in Tangenten des Kegelschnittes mit unendlich fernen Berührungspunkten. Der Kegelschnitt wird also Hyperbel, wenn S zwischen T und der parallelen Tangentialebene in A_1 liegt und er wird Ellipse, wenn S ausserhalb der zwei Ebenen liegt. Befindet sich S in der Tangentialebene des Punktes A_1, so wird der Kegelschnitt Parabel und befindet sich S in T, so wird er zusammenfallendes Linienpaar. Der Kegelschnitt wird gleichseitige Hyperbel, wenn die oben erwähnten Kugeltangenten von S aus auf einander senkrecht stehen. Das ist der Fall wenn $SS_2 : S_1S_2 = \sqrt{2}$ ist, wobei SS_2 das Lot von S auf AA_1 und S_1 den Schnittpunkt des Lotes mit der Kugel bezeichnet; d. h. der Ort der Punkte S, für welche der zugehörige Kegelschnitt gleichseitige Hyperbel ist, ist ein Rotationsellipsoid mit AA_1 als Achse und mit dem Äquatorradius $r\sqrt{2}$, wobei r den Kugelradius bedeutet. Ersetzt man $\sqrt{2}$ durch ein anderes Verhältnis, so entsteht ein Rotationsellipsoid, zu dessen Punkten ähnliche Hyperbeln gehören und ersetzt man $\sqrt{2}$ durch ein imaginäres Verhältnis, so entsteht ein Rotationshyperboloid mit AA_1 als Achse, zu dessen Punkten ähnliche Ellipsen gehören. Hält man M und damit auch S' fest, so müssen die Kegelspitzen S auf der Geraden A_1S' liegen; die Kegelschnitte sind konfokal und die zugehörigen Kreise auf der Kugel bilden ein Büschel, dessen Kante die konjugierte Gerade zu A_1S' ist und in der Tangentialebene des Punktes A_1 liegt. Wählt man ein beliebiges Kreisbüschel auf der Kugel, so haben die zugehörigen Kegelschnitte ausser dem Brennpunkt A zwei gemeinsame Tangenten, nämlich die Spuren der Tangentialebenen in den Grundpunkten des Büschels auf der Kugel. Der Berührungspunkt auf einer dieser Spuren, der zu einem Kreis des Büschels gehört, ist der Spurpunkt der Kegelerzeugenden, die auf der Tangente des Kreises im Grundpunht senkrecht steht; das Stück der Erzeugenden zwischen Spurpunkt und Grundpunkt ist gleich der

Kugeltangente vom Spurpunkt bis zum Punkt A. Nimmt man zwei Kreise des Büschels, die sich unter dem Winkel α schneiden, so bilden die Kegelerzeugenden den Winkel $180^\circ - \alpha$ und da die Strecken zwischen Grundpunkt und Spurpunkten gleich den Strecken von A bis zu den Spurpunkten sind, so ist dieser Winkel $180^\circ - \alpha$ gleich dem Winkel unter dem die Spurpunkte d. h. die Berührungspunkte von A aus erscheinen. Sind also irgend zwei Kegelschnitte mit dem Brennpunkt A gegeben, so kann man den Schnittwinkel α der zwei entsprechenden Kreise finden, indem man die zwei gemeinsamen Tangenten der Kegelschnitte legt und die zwei Berührungspunkte irgend einer derselben mit A verbindet; die zwei Linien bilden den Winkel $180^\circ - \alpha$. Der Ort des zweiten Brennpunktes S' der zu einem Kreisbüschel gehörigen Kegelschnitte ist die Spur der Ebene, welche A_1 mit der konjugierten Geraden zur Büschelkante bestimmt; die zu A gehörigen Leitlinien gehen durch den Spurpunkt der Büschelkante und daher umhüllen die andern Leitlinien eine Parabel. Die stereographischen Projektionen von zwei, in bezug auf die Kugel, konjugierten Geraden stehen auf einander senkrecht. Die zu einem Büschel von Grosskreisen der Kugel gehörigen Kegelschnitte haben ausser dem Brennpunkt A zwei parallele Tangenten gemein und die kleine Achse ist 2 r; die zweiten Brennpunkte liegen auf der Schnittlinie von T mit der Ebene durch A_1 senkrecht zum gemeinsamen Durchmesser der Grosskreise.

Wenn zwei Kreise auf der Kugel sich rechtwinklig schneiden und man legt an die zugehörigen Kegelschnitte die zwei gemeinsamen Tangenten, so werden ihre Stücke zwischen den Berührungspunkten mit den zwei Kegelschnitten von A aus unter rechten Winkeln gesehen, gemäss dem schon über zwei Kreise gesagten. Die Verbindungslinie der zwei Berührungspunkte eines jeden der zwei Kegelschnitte ist die Leitlinie des andern. Zwei konjugierte Kreisbüschel auf der Kugel bilden sich als zwei konjugierte Kegelschnittscharen, mit A als gemeinsamen Brennpunkt ab. Die zu A gehörigen Leitlinien der Kegelschnitte jeder Schar gehen durch einen festen Punkt, den gemeinsamen Schnittpunkt der zwei Grundtangenten der andern Schar. Diese zwei Punkte sind die Spurpunkte der zu den zwei Kreisbüscheln gehörigen, inbezug auf die Kugel konjugierten, Büschelkanten und daher zu den Kegelschnitten beider Scharen konjugierte Pole. Sind also zwei Kegelschnitte mit A als Brennpunkt gegeben, so schneide man ihre zu A gehörigen Leitlinien, und suche zum Schnittpunkt die Polaren in bezug auf die zwei Kegelschnitte. Die beiden Polaren geben einen neuen Schnittpunkt und durch ihn gehen die Leitlinien aller Kegelschnitte der konjugierten Schar. Irgend eine dieser Leitlinien schneidet die zwei gegebenen Kegelschnitte und jeden Kegelschnitt ihrer Schar in Punktepaaren und die Tangenten in jedem Paar an den betreffenden Kegelschnitt, berühren alle einen Kegelschnitt der konjugierten Schar. Sind drei Kegelschnitte mit dem gemeinsamen Brennpunkt A gegeben, so suche man zu je zweien den Schnittpunkt der zu A gehörigen Leitlinien; zu jedem von diesen drei Punkten suche man den konjugierten Pol zu den zwei zugehörigen Kegelschnitten. Diese drei Pole liegen auf einer Geraden, nämlich der Leitlinie des Kegelschnittes, der zu allen drei Kegelschnitten konjugiert ist. Schneidet man diese Leitlinie mit den drei Kegelschnitten und legt in den Schnittpunkten die Tangenten, so berühren die so entstehenden sechs Tangenten denjenigen Kegelschnitt, der dem Ortogonalkreis der drei zu den Kegelschnitten gehörigen Kreise entspricht. — Wenn zwei Kreise auf der Kugel sich unter dem Winkel α schneiden, so werden, wie schon gesehen, bei den entsprechenden Kegelschnitten die Stücke ihrer gemeinsamen Tangenten zwischen den Berührungspunkten von A unter dem Winkel $180^\circ - \alpha$ gesehen; dieser Umstand führt zur direkten Konstruktion von Kegelschnitten, die zu gegebenen Schnittwinkeln gehören. Berühren sich zwei Kreise auf der Kugel, so berühren sich auch die zugehörigen Kegelschnitte.

Sucht man in der Zeichnungsebene zu A die Fusspunktskurven der Kegelschnitte mit dem Brennpunkt A, so entstehen Kreise, die zu den stereographischen Projektionen der Kugelkreise im Verhältnis 1 : 2 ähnlich liegen, für A als Zentrum; man kann sie also wieder als stereographische Projektionen von Kreisen auf einer neuen Kugel auffassen, die den Radius der gegebenen Kugel nach A zum Durchmesser hat.

VII. Zum Satz von Pohlke.

Die drei in der Zeichnungsebene gelegenen Strecken $O'A'$, $O'B'$, $O'C'$ seien die Parallelprojektionen von drei gleich langen, paarweis zu einander senkrechten Strecken OA, OB, OC im Raum. Betrachtet man diese Strecken als Kanten eines Würfels, so kann man das Bild des Würfels zeichnen und ebenso dasjenige des Oktaeders, welches dem Würfel umschrieben ist. Die Umkugel des Würfels wird von seinen Seitenflächen in sechs Kreisen geschnitten, deren Berührungskegel die sechs Oktaederecken zu Spitzen haben. Die Projektionen der sechs Kreise sind die Ellipsen, welche den Projektionen der Würfelquadrate umschrieben sind und deren Diagonalen zu konjugierten Durchmessern haben. Jede dieser Ellipsen berührt, wie bekannt, die Kugelprojektion doppelt und zwar in den Schnittpunkten der Polaren der projizierten Oktaederecken inbezug auf die Ellipsen. Konstruiert man also diese Ellipsen und schneidet sie mit den Polaren der bezüglichen projizierten Oktaederecken, so entstehen zwölf Berührungspunkte der Kugelprojektion. Die Schnittpunkte der Kugelprojektion mit den Projektionen der Oktaederdiagonalen sind die Punktepaare, die zum Würfelmittelpunkt symmetrisch liegen und Pol und Polare harmonisch trennen. Man kann noch andere Ellipsen angeben, die den Kugelumriss doppelt berühren, nämlich die Projektionen der in den Diagonalebenen des Würfels gelegenen Kugelkreise, ferner die Projektionen der Kreise, deren Ebenen auf den Würfeldiagonalen senkrecht stehen und durch drei Würfelecken gehen. Nimmt man den Mittelpunkt des Würfels in der Zeichnungsebene an, so ist, wie bekannt, die kleine Achse der Kugelprojektion der Durchmesser der Kugel und die Tangenten an die Kugel von einem Scheitelpunkt der grossen Achse, in ihrer projizierenden Ebene gelegen, geben die Projektionsrichtungen. —

Werden $O'A'$, $O'B'$, $O'C'$ über O' hinaus um sich selber verlängert, so kann die Figur als Projektion eines Oktaeders betrachtet werden. Die acht Ecken seines umschriebenen Würfels sind die Pole der acht Seitenflächen des Oktaeders inbezug auf seine Umkugel. Weiter, ähnlich wie vorhin.

VIII. Notiz über eiförmige Rotationsflächen.

In seiner Arbeit, „Eiförmige Drehkörper“ (Schweiz. Pädagog. Zeitschrift 1917), teilt Hr. F. Bützberger aus einem Steinerschen Manuskripte eine interessante Betrachtung, „Mechanische Zeichnung der Eilinie“, mit, und gibt im Anschluss daran Literaturnachweise, die sich auf sogenannte Cartesische Kurven beziehen. Der Verfasser erlaubt sich, darauf hinzuweisen, dass eiförmige Flächen auch entstehen, wenn bei einer Kugel die auf einem Durchmesser senkrecht stehenden Halbsehnen in einem Verhältnis verkleinert werden, das mit der Entfernung von einem Durchmesserendpunkt zunimmt. In dem Endpunkt A eines Kugeldurchmessers AA_1 sei die Tangentialebene gelegt und auf der Verlängerung von AA_1 über A_1 hinaus sei der Punkt O gewählt. Eine veränderliche Parallele zu OA schneide die Kugel in P, Q und die Tangentialebene in R. Man verbinde O mit R und schneide diese Gerade mit den Senkrechten durch P, Q zum Durchmesser AA_1. Der geometrische Ort der Schnittpunkte P', Q' ist eine eiförmige Fläche vierter Ordnung. Die Kugel kann auch durch ein Rotationsellipsoid ersetzt werden, für welches AA_1 grosse oder kleine Achse ist. Denkt man sich auf die imaginären Geraden der Kugel oder des Rotationsellipsoids dieselbe Konstruktion angewendet wie auf die Punkte der Kugel, so verwandeln sich die Geraden in imaginäre Kegelschnitte auf der Eifläche. Durch jeden Punkt der Eifläche gehen zwei Kegelschnitte; die Ebene eines solchen ist bestimmt durch O und die Ortogonalprojektion der Geraden auf die Tangentialebene. Der Kegelschnitt der Ebene ist ihr Schnitt mit dem Paraboloid, das erzeugt wird durch die Senkrechten von den Punkten der Geraden auf die Gerade AA_1. —