Abhandlung über die Ausmessung der Parabel von Ibrāhīm b. Sinān b. Thābit.

Aus dem Arabischen übersetzt und kommentiert

von

H. Suter, Zürich.

(Als Manuskript eingegangen am 17. Januar 1918.)

In der von mir in den Sitzungsberichten der phys.-medizin. Sozietät in Erlangen (Bd. 48, 1916) veröffentlichten Abhandlung über die Ausmessung der Parabel von *Thābit b. Ḳurra* habe ich am Schlusse auf eine zweite Abhandlung über denselben Gegenstand aufmerksam gemacht, die der Enkel *Thābits, Ibrāhīm b. Sinān b. Thābit* [1]), verfasst hat und die ebenfalls im Pariser Manuskript 2457 als Nr. 26 noch vorhanden ist; sie folgt in diesem Manuskript unmittelbar der *Thābit*'schen Abhandlung (Nr. 25) und nimmt Fol. 134^b—136^b in Anspruch. Sie ist von der gleichen Hand geschrieben wie die vorhergehenden Abhandlungen, und es gilt also von ihr dasselbe, was ich über diese von Woepcke als Autographen des persischen Geometers *Abū Saʿīd al-Sidjzī* betrachteten Schriften in der genannten Abhandlung (S. 66—67) gesagt habe [2]) und zwar in noch erhöhtem Masse, denn dieses Stück weist noch viel grössere Lücken und mehr unrichtige Figuren und falsche Buchstaben auf als die vorhergehenden, so dass es mich keine geringe Mühe gekostet hat, diese Mängel so auszubessern, dass man die ursprüngliche Arbeit *Ibrāhīm b. Sināns* wieder erkennen kann. Ich war mehrmals daran, die Veröffentlichung dieser Schrift aufzugeben, nur das historische Interesse an dieser ausgezeichneten, von

---

[1]) Das b. vor einem Eigennamen bedeutet ibn oder ben = Sohn (des); dieser Mathematiker lebte von 908—946, für weiteres über ihn vergl. meine Schrift: Die Mathematiker und Astronomen der Araber etc. in Abhandlungen zur Geschichte der mathem. Wissenschaften, X (1900), S. 53—54.

[2]) Dass nämlich diese Abhandlungen des Ms. 2457 unmöglich Autographen des bedeutenden persischen Geometers sein können.

den andern Arbeiten über diesen Gegenstand so bedeutend abweichenden Darstellung hat mich von diesem Gedanken wieder abgebracht. — Diese Abhandlung befindet sich auch noch handschriftlich in London (India Office)[1] und Ḳairo[2]).

Text.

Im Namen Allāhs, des Barmherzigen und Gnädigen!

Ich hatte vor längerer Zeit eine Schrift verfasst über die Ausmessung dieses Kegelschnittes, dann änderte ich in einem Satze desselben etwas ab; hierauf gingen beide Schriften, die ältere und die verbesserte, verloren; ich war nun gezwungen, von den früheren Schriften zu wiederholen (wieder herzustellen), was ich für unerlässlich fand für diese neue Schrift. Wenn nun eine Schrift gefunden wird, deren Worte mit denen dieser Schrift nicht ganz (aber doch teilweise) übereinstimmen, oder deren Sinn bisweilen von dem dieser Schrift etwas abweicht, so ist es eine der beiden erwähnten (verlorenen) Schriften. Schon mein Grossvater, *Thābit b. Ḳurra*, hat eine Schrift über diesen Gegenstand verfasst, ebenso *al-Māhānī.*[3])

Satz 1: Wenn eine vieleckige (Text: vielwinklige) Figur $abgdeml$ gegeben ist und ebenso eine zweite solche Figur $zhtiksn$, und es seien [in der ersten][4]) die Linien bl, gm parallel de, [in der zweiten] hn, ts parallel ik, und es sei das Verhältnis der Strecken [bl, gm, de der ersten Figur gleich dem Verhältnis der Strecken] hn, ts, ik [der zweiten Figur] und ebenso [nachdem noch die Senkrechten aq und zy auf de, bezw. ik gezogen sind] das Verhältnis der Strecken ao, of, fq[5]) der ersten Figur gleich dem Verhältnis der Strecken [zw, wx, xy der zweiten Figur], und es werden noch die Linien ad, zi [und ae, zk] gezogen, so verhält sich

$$\triangle ade : \triangle zik = \text{Fig. } abgdeml : \text{Fig. } zhtiksn.$$

---

[1]) Katalog von O. Loth, Nr. 767, 6⁰.

[2]) Katalog von K. Vollers, Bd. V, p. 200 (Nr. 7804, 16⁰).

[3]) Vergl. meine oben zitierte Schrift S. 26; weder der Fihrist noch *Ibn al-Ḳiftī* erwähnen diese Arbeit über die Parabel.

[4]) Was in eckigen Klammern steht, sind Lücken des arabischen Textes.

[5]) An Stelle dieser Strecken stehen im Text fälschlich die Strecken al, lm, me (vergl. auch den Kommentar); es hat auch die Figur links im Ms. teilweise die gleichen Buchstaben wie die rechts, so dass ich gezwungen war, die doppelt vorkommenden durch andere zu ersetzen, daher die Buchstaben o, x, y, die keinen arabischen entsprechen.

Beweis: Wir ziehen die Senkrechten $aofq$ und $zwxy$ auf de bezw. ik[1]), dann hat man:

$$\triangle\, ade : \text{Fl.}\, gdem = aq \cdot \frac{de}{2} : fq\left(\frac{de+gm}{2}\right), \text{ oder:}$$

$$\triangle\, ade : \text{Fl.}\, gdem = \frac{aq}{fq} \cdot \frac{de}{de+gm};$$

ebenso findet man, dass

$$\triangle\, zik : \text{Fl.}\, ikts = \frac{zy}{xy} \cdot \frac{ik}{ik+ts};$$

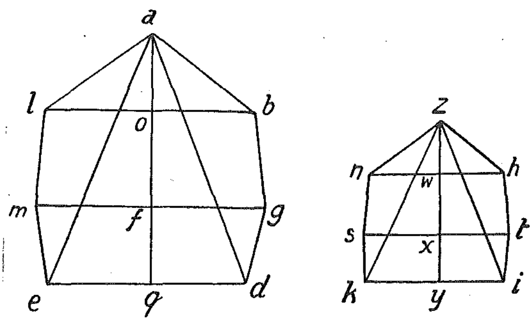

Fig. 1.

nun ist aber $aq : fq = zy : xy$, und ebenso $de : de + gm = ik : ik + ts$, nach Voraussetzung, mithin sind die aus ihnen zusammengesetzten Verhältnisse ebenfalls gleich, also hat man die Proportion:

$$\triangle\, ade : \text{Fl.}\, gdem = \triangle\, zik : \text{Fl.}\, ikts\text{[2]});$$

ebenso findet man:

$$\triangle\, ade : \text{Fl.}\, bgml = \triangle\, zik : \text{Fl.}\, htsn,$$
$$\triangle\, ade : \text{Fl.}\, abl = \triangle\, zik : \text{Fl.}\, zhn.$$

Vertauschen wir die innern Glieder und fassen zusammen, so erhalten wir:

$$\triangle\, ade : \triangle\, zik = \text{Fl.}\, abgdeml : \text{Fl.}\, zhtiksn, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Satz 2: Wir wollen nun beweisen, dass irgend zwei Segmente einer Parabel sich zu einander verhalten wie die zwei Dreiecke, die zu Grundlinien die Grundlinien der Segmente und zu Spitzen die Scheitel der Segmente haben.

Beweis: Das eine Parabelsegment sei abg, das andere dez, ihre Grundlinien ag, dz; wir halbieren sie in den Punkten h und t, die Durchmesser seien bh, et; wir ziehen noch ab, bg, de, ez, so sagen

[1]) Dies sollte schon im Lehrsatz stehen, in den ich es deshalb aufgenommen habe.

[2]) Hier folgt nun ein ganz verdorbener Text, mit Auslassungen und Wiederholungen, ich habe die Sache auf die kürzeste Weise gefasst.

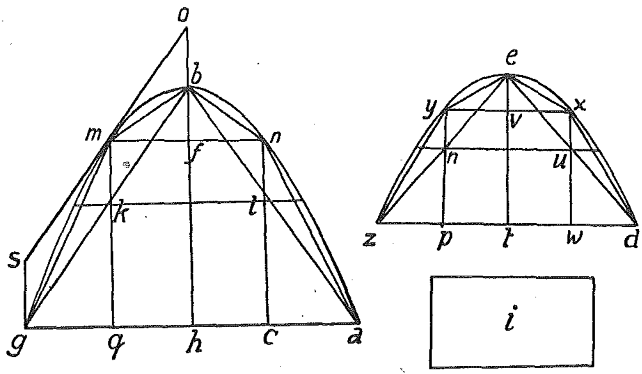

Fig. 2.

wir, dass, was wir behauptet haben, wahr ist. Denn wenn es nicht wahr wäre, so sei erstens das Verhältnis $\triangle\, dez : \triangle\, abg =$ Segment dez : einer Fl. $<$ Segm. abg, es sei dies die Fläche i; wir halbieren bg in k und ab in l und ziehen die Durchmesser qm und cn [1]) parallel zu bh, und ziehen noch an, bn, bm, mg; nun ist jedes einzelne der Dreiecke anb, bmg grösser [2]) als die Hälfte des Segmentes, in dem es liegt, und das deshalb, weil, wenn wir eine Tangente an die Parabel im Punkte m ziehen, sie sei smo, diese parallel bg ist, welches eine Ordinate zum Durchmesser mq ist, und wenn wir gs parallel bh ziehen, so ist $\triangle\, bgm = \frac{1}{2}$ Parallelogramm $bosg$; dieses ist aber grösser als das Segment bmg, also ist seine Hälfte, d. h. $\triangle\, bmg$, grösser als die Hälfte des Segmentes. Wir hören nun nicht auf mit der Halbierung der Linien an, nb, bm, mg und mit dem Ziehen von Durchmessern durch die Halbierungspunkte, so dass hiedurch neue Dreiecke entstehen, die stets grösser sind als die Hälfte der Segmente, in denen sie liegen, bis der Rest, der von der Parabel übrigbleibt, kleiner ist als der Überschuss des Parabelsegmentes über die Fläche i [3]) [was nach X, 1 des Euklides möglich ist]; es sei dies nun in unserer Figur so weit gebracht, so dass also die übrigbleibenden kleinen Segmente zusammen kleiner als die Grösse e sind, dann sind die Flächen mbn, $anmg$ zusammen grösser als die Fläche i [denn Parabel — einbeschrieb. Fig. $< e$, aber $e =$ Parabel $- i$, also Parabel

---

[1]) Überall hat hier der Text falsche Buchstaben, die nicht mit denen der Figuren stimmen.

[2]) Der Text hat „kleiner".

[3]) Diesen Überschuss wollen wir im folgenden zur Vereinfachung des Beweises mit e bezeichnen, was im Texte nicht getan ist.

— einbeschrieb. Fig. $<$ Parabel — i, mithin einbeschrieb. Fig. $> i$]; nun ist also nach unserer Voraussetzung:

$$\triangle\, dez : \triangle\, abg = \text{Segm. } dez : \text{einer Fläche} < \text{Fl. } anbmg.$$

Wir ziehen nun genau die entsprechenden Linien im Parabelsegment dez [1]), dann ist also $bh : bf = et : ev$ etc., dann besteht nach *Apollonius*, der bewiesen hat, dass die Quadrate der Ordinaten sich wie die Abszissen der Parabel verhalten, die Proportion:

$$dz^2 : xy^2 = ag^2 : mn^2,$$

also auch

$$dz : xy = ag : mn,$$

also hat man nun nach Satz 1:

$$\triangle\, dez : \triangle\, abg = \text{Fl. } dxeyz : \text{Fl. } anbmg,$$

nach dem oben bewiesenen ist aber:

$$\triangle\, dez : \triangle\, abg = \text{Segm. } dez : \text{einer Fläche} < \text{Fl. } anbmg,$$

also müsste nun die Proportion bestehen:

$$\text{Fl. } dxeyz : \text{Fl. } anbmg = \text{Segm. } dez : \text{einer Fläche} < \text{Fl. } anbmg,$$

mithin müsste Segm. $dez <$ Fl. $dxeyz$ sein, was unmöglich ist, da die letztere dem Segment einbeschrieben ist, also ist die Annahme unrichtig, dass $\triangle\, dez : \triangle\, abg =$ Segm. dez : einer Fläche $<$ Segm. abg sein könne.

Wir nehmen nun zweitens an, dass es möglich wäre, dass die Proportion bestehe:

$$\triangle\, dez : \triangle\, abg = \text{Segm. } dez : \text{einer Fläche} > \text{Segm. } abg.\ ^{2)}$$

[Ganz analog, wie wir oben bewiesen haben, dass nicht die Proportion bestehen könne : $\triangle\, dez : \triangle\, abg =$ Segm. dez : einer Fläche $<$ Segm. abg, hätten wir auch beweisen können, dass nicht $\triangle\, abg$: $\triangle\, dez =$ Segm. abg : einer Fläche $<$ Segm. dez sein kann. Es sei nun i eine Fläche $>$ Segm. abg, dann heisst also unsere zweite Annahme:

$$\triangle\, dez : \triangle\, abg = \text{Segm. } dez : i$$

---

[1]) Diese Linien sind im Text alle angegeben, ich lasse sie hier der Kürze halber weg.

[2]) Was nun weiter folgen sollte, ist im Text ganz verdorben, es wird mit zwei Linien abgetan; ich gebe nun den Schluss des Beweises nach *Euklides* XII, 2 u. 5, und zweifle nicht daran, dass auch *Ibrāhīm b. Sinān* diesen Gang eingeschlagen habe, die zwei Linien, die der Text aufweist, deuten dies an.

oder die Verhältnisse umgekehrt:

$$\triangle\, abg : \triangle\, dez = i : \text{Segm. } dez,$$

es besteht nun aber auch die Proportion:

$$i : \text{Segm. } dez = \text{Segm. } abg : \text{Fläche} < \text{Segm. } dez\ ^{1)},$$

also wäre nun auch:

$$\triangle\, abg : \triangle\, dez = \text{Segm. } abg : \text{Fläche} < \text{Segm. } dez,$$

was wieder nach dem ersten Falle unmöglich ist. Also kann nur die Proportion bestehen:

$$\triangle\, abg : \triangle\, dez = \text{Segm. } abg : \text{Segm. } dez].$$

Satz 3: Ich sage, dass jedes Parabelsegment zu dem Dreieck, das mit ihm die gleiche Basis und die gleiche Höhe (den gleichen Scheitel) hat, sich wie 4 : 3 verhält.

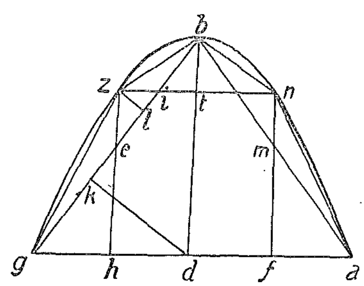

Fig. 3.

Beweis: Wir nehmen die Parabel abg an, ihre Basis sei ag, der Durchmesser bd, der die Basis halbiert, wir ziehen die Linien ab, bg und halbieren bg im Punkte e und ziehen zeh parallel zu bd, und ebenso die Ordinate zit. Weil nun $dg : ti$ [2] $= bd : bt = dg^2 : tz^2$, wie im Buche der Kegelschnitte [des *Apollonius*] bewiesen wurde, ist tz mittlere Proportionale zwischen dg und ti, also $dg : tz = tz : ti$; weil nun $be = eg$ und eh parallel bd ist, ist auch $dh = hg$, also $dg = 2\,tz$, also auch $tz = 2\,ti$, also ist $dg = 2\,tz = 4\,ti = 4\,zi$. Wir ziehen nun die Senkrechte zl auf bg und ebenso dk senkrecht auf bg, so sind diese Senkrechten parallel, und weil auch tz parallel dg, sind die Dreiecke zli und dgk ähnlich, also $dg : zi = dk : zl$, und weil $dg = 4\,zi$, so ist auch $dk = 4\,zl$, mithin:

$$dk \cdot \frac{bg}{2} \text{ d. h. } \triangle\, bgd = 4\,zl \cdot \frac{bg}{2} = 4\,\triangle\, bzg,$$

---

[1]) Diese Proportion wird bei Euklides in einem Lemma zu XII, 2 bewiesen; das Lemma ist aber jedenfalls, wie auch Heiberg vermutet, unecht, denn die Proposition bedarf gar keines Beweises: da nach Voraussetzung das 1. Glied grösser ist als das 3., muss natürlich auch das 2. grösser sein als das 4.

[2]) Der Text hat unrichtig $zh : tz$.

also $\triangle\, abg = 2 \triangle\, bgd = 8 \triangle\, bzg$, oder $\triangle\, bzg = \frac{1}{8} \triangle\, abg$. Es besteht aber nach Satz 2 die Proportion:

$$\text{Segm. } abg : \text{Segm. } bzg = \triangle\, abg : \triangle\, bzg,$$

also ist auch: Segm. $bzg = \frac{1}{8}$ Segm. abg.

Auf dieselbe Weise finden wir auch, wenn wir ab im Punkte m halbieren und nmf parallel bd ziehen und ebenso an und bn, dass $\triangle\, anb = \frac{1}{8} \triangle\, abg$, also auch

$$\text{Segm. } anb = \frac{1}{8} \text{ Segm. } abg,$$

also die beiden Segmente anb und bzg zusammen $= \frac{1}{4}$ Segm. abg. Wenn wir nun das Segment $abg = 4$ Teile setzen, so sind die Segmente anb und bzg zusammen $= 1$ Teil, dann bleiben für das $\triangle\, abg = 3$ Teile, also verhält sich das Segment abg zum $\triangle\, abg$ wie $4:3$, w. z. B. w.

(Hiemit wäre die Parabelquadratur erledigt, *Ibrâhîm b. Sinân* fügt aber noch einen vierten Satz hinzu, der eigentlich mit der Quadratur nichts mehr zu tun hat.)

Satz 4: Ich sage, dass zwei Parabelsegmente mit parallelen Basen sich zu einander verhalten wie das Verhältnis ihrer Höhen (Durchmesser), zusammengesetzt mit dem Verhältnis der Quadratwurzeln ihrer Höhen (Durchmesser).[1])

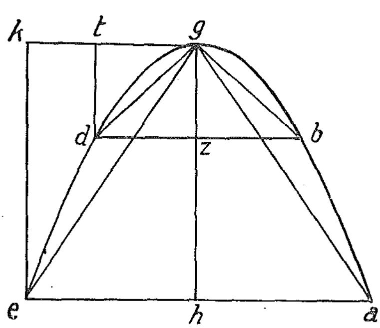

Fig. 4.

Beweis: Es sei die Parabel $abgde$ gegeben und ae parallel bd, der Durchmesser, der beide Basen halbiert, sei gzh; wir ziehen durch g die Parallele gt zu ae und bd, ferner dt und ek parallel zu gh, so ist Fl. $zgtd = \triangle\, bgd$, ebenso Fl. $hgke = \triangle\, age$, deshalb besteht die Proportion (nach Satz 2): Segm. age : Segm. bgd = Fl. $hgke$: Fl. $zgtd$, aber Fl. $hgke$: Fl. $zgtd = gh \cdot eh : gz \cdot dz$, also Segm. age : Segm. $bgd = gh \cdot eh : gz \cdot dz$, aber $gh : gz = eh^2 : dz^2$, [also $\sqrt{gh} : \sqrt{gz} = eh : dz$], mithin: Segm. age : Segm. $bgd = gh\sqrt{gh} : gz\sqrt{gz}$, w. z. b. w.

[1]) Wörtlich: zusammengesetzt mit einem Verhältnis, das verdoppelt (d. h. quadriert) das Verhältnis der Höhen ergibt, d. h. also mit dem Verhältnis $\sqrt{gh} : \sqrt{gz}$.

Beendet ist die Schrift des *Ibrāhīm b. Sinān b. Thābit* über die Ausmessung der Parabel, geschrieben von *Aḥmed b. Muḥ. b.ʿAbdaldjalīl* in *Shīrāz* im Monat *Ardibehisht* des Jahres 338 *Yezdegirds* (d. i. 969 n. Chr.) Allāh sei Lob und Dank!

(Am Rande steht von anderer Hand und anderer Tinte: Ich habe diese Abhandlung verglichen mit einer andern fremden (*ġarība*) Handschrift . . . .[1]))

* * *

Kommentar.

Diese Parabelquadratur ist unstreitig die einfachste von allen, die wir bis jetzt aus Altertum und Mittelalter kennen gelernt haben; *Ibrāhīm b. Sinān* braucht nur drei Sätze, die eigentlich nichts anderes voraussetzen als die Kenntnis einiger Sätze aus der Kegelschnittslehre und den 1. Satz des X. Buches des *Euklides* mit der Exhaustionsmethode. Satz 1 und 3 verleihen dieser Parabelquadratur ihre Originalität, im letztern Satze wird auf ganz einfache Weise (unter Zuhilfenahme von Satz 2) gezeigt, dass jedes Parabelsegment zu dem Dreieck, das mit ihm gleiche Basis und gleichen Scheitel hat, sich wie 4 : 3 verhält, und zwar wird dieser Satz ohne Herbeiziehung der *Reductio ad absurdum* bewiesen, weil er diese schon im 2. Satze angewandt hat.[2]) Im Beweis zu Satz 3 macht sich allerdings die etwas zu starke Kürzung im Beweisgang des arabischen Geometers etwas störend geltend: er hätte in Satz 2 deutlicher darauf hinweisen sollen, dass der Satz nicht nur für Parabelsegmente gilt, bei denen der Durchmesser zugleich Achse ist, oder, mit andern Worten, bei denen die Ordinaten senkrecht zum Durchmesser stehen, sondern auch für solche, bei denen sie schief zu demselben stehen; man könnte freilich sagen, dass die Ausdrucksweise des Satzes 2 diese Verallgemeinerung in sich schliesse, doch sollten dann die Figuren auch dementsprechend gezeichnet sein, was eben im Texte nicht der Fall ist. Es ist nun wohl richtig, aber nicht so unmittelbar einleuchtend, dass in Figur zu Satz 3 auch die Proportion bestehe: Segm. abg : Segm. bzg $= \triangle abg : \triangle bzg$. Dieses genauer festzustellen, hat also *Ibrāhīm b. Sinān* nicht für nötig gehalten, sein Grossvater aber hätte es schwerlich unterlassen; möglich wäre auch, dass *Ibrāhīm* diesen Fall in einem Zusatz zu Satz 2 oder 3 berücksichtigt haben möchte, dieser Zusatz aber, wie noch verschiedenes anderes, durch spätere Abschreiber weggelassen worden wäre. — Zu den beiden Figuren zu Satz 1 haben

[1]) Das letzte Wort ist unlesbar. Diese Vergleichung hat der vorliegenden Abhandlung freilich nicht viel genützt.

[2]) Vergl. auch S. 227.

wir noch folgendes zu bemerken: dieselben sind im Manuskript unvollständig gezeichnet, links schliessen sie, soweit ich dies aus der etwas schwachen photographischen Wiedergabe erkennen konnte, mit der geraden Linie *zk* bezw. *ae* ab, die Vierecke *znsk* bezw. *alme* fehlen also; diese Unvollständigkeit der Figuren ändert allerdings am Beweise nichts.

Damit nun die Richtigkeit unserer Behauptung, dass dies die kürzeste Parabelquadratur sei, die aus dem Altertum und Mittelalter auf uns gekommen ist, klar hervortrete, wollen wir auch die Archimedische Ableitung zur Vergleichung herbeiziehen und geben im folgenden von derselben eine deutsche Übersetzung nach der Heibergschen 2. Ausgabe der Werke des *Archimedes* (1913, Bd. 2, S. 301—315), was wohl für viele Leser angenehm sein wird.[1]) Wir fassen uns in dieser Übertragung des griechischen (bezw. lateinischen) Textes, besonders in den Beweisen, so kurz als möglich.

(Es gehen der geometrischen Ableitung 17 Sätze der mechanischen voraus, dann folgt):

Satz 18: Ist ein Parabelsegment gegeben und wird von der Mitte seiner Basis aus eine Parallele zum Durchmesser (oder Achse) gezogen, so ist der Scheitel des Segmentes der Punkt, in dem diese Parallele die Parabel trifft.

Beweis: (s. folg. Fig.: D = Mitte der Basis AG, B der Scheitel.) Er ergibt sich aus einer vorangegangenen Definition, die sagt, unter Scheitel eines Parabelsegmentes verstehe man den Punkt der Parabel, von dem aus man die längste Senkrechte auf die Basis ziehen könne.

Satz 19: In einem Parabelsegment ist die von der Mitte der Basis nach dem Scheitel gezogene Gerade $^4/_3$ der aus der Mitte der Hälfte der Basis zur ersten parallel gezogenen Geraden.

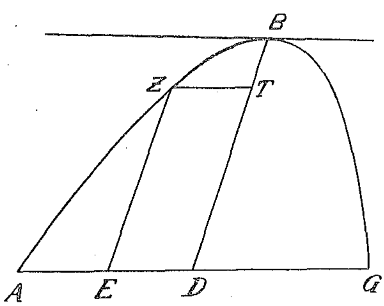

Fig. 5.

Beweis: Nach früheren Sätzen besteht, wenn noch ZT parallel AD gezogen wird, die Proportion: $BD : BT = AD^2 : ZT^2$; AD^2 ist aber $= 4\,ZT^2$, weil $AD = 2\,ZT$ ist, mithin auch $BD = 4\,BT$, also

$$BD = \frac{4}{3}\,TD = \frac{4}{3}\,ZE.$$

Satz 20: Wird einem Parabel-

[1]) Es existiert allerdings bereits eine deutsche Übersetzung der Hauptwerke des *Archimedes* durch *E. Nizze* aus dem Jahre 1824 (Stralsund), allein dieselbe ist nicht sehr verbreitet und demnach vielen Lesern nicht so leicht erreichbar. Speziell die Quadratur der Parabel übersetzte auch *J. J. Hoffmann*, Aschaffenburg 1817.

segment ein Dreieck einbeschrieben, das dieselbe Basis hat wie das Segment und dieselbe Höhe (also die Spitze im Scheitel des Segmentes), so ist dieses Dreieck grösser als die Hälfte des Segmentes.

Beweis: Es werden noch AD und GE parallel zum Durchmesser gezogen, so ist, da die Tangente im Punkte B parallel zur Basis ist, $ADEG$ ein Parallelogramm, also $\triangle ABG = \frac{1}{2} ADEG$; das Parallelogramm ist aber $>$ das Parabelsegment, also $\triangle ABG >$ das halbe Parabelsegment.

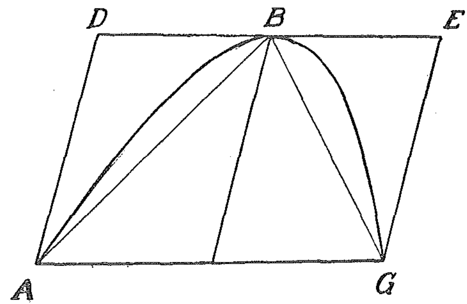

Fig. 6.

Corollarium: Hieraus ist klar, dass es möglich ist, in ein solches Parabelsegment ein Polygon einzubeschreiben und zwar so, dass die übrigbleibenden Segmente schliesslich kleiner werden als irgendeine gegebene kleine Fläche; denn wenn immer Teile (Dreiecke) weggenommen werden, die grösser sind als die Hälfte des jeweilen übrigbleibenden Segmentes, so ist (nach Euklides X, 1) klar, dass man schliesslich zu einem Reste kommen muss, der kleiner ist als irgend eine gegebene (noch so kleine) Fläche.

Satz 21: Wenn in ein Parabelsegment ein Dreieck einbeschrieben wird mit der gleichen Basis und der gleichen Höhe und in die beiden übrigbleibenden Segmente wieder je ein Dreieck von derselben Basis und Höhe wie diese neuen Segmente, so ist das erste einbeschriebene Dreieck achtmal so gross wie jedes der zweiten Dreiecke.

Beweis: D sei die Mitte von AG, B der Scheitel des Segmentes, E und K die Mitten von AD bezw. DG, und EZ und KH parallel zu BD. T sei Schnittpunkt von EZ mit AB, also T die Mitte von AB, so ist Z der Scheitel des Segmentes AZB, also hat das Dreieck AZB dieselbe Basis und Höhe wie das Segment AZB. Es ist nun

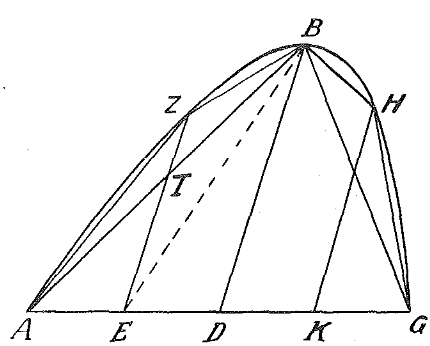

Fig. 7.

$BD = \frac{4}{3} EZ$ (n. Satz 19), aber $BD = 2\,ET$, also $ET = \frac{2}{3} EZ = 2\,TZ$, also ist auch $\triangle AEB = 2 \triangle ABZ$, denn $AET = 2\,ATZ$ und $TBE = 2\,TBZ$, mithin $\triangle ABG = 2 \triangle ABD = 4 \triangle AEB = 8 \triangle ABZ$. Auf die gleiche Weise zeigen wir, dass auch $\triangle ABG = 8 \triangle BHG$.

Satz 22: Es sei ein Parabelsegment gegeben und es werden beliebige Flächen Z, H, T, J angenommen, die zueinander in geometrischer Progression mit dem Quotienten $\frac{1}{4}$ stehen, und es sei Z die grösste und gleich dem dem Parabelsegment einbeschriebenen Dreieck von gleicher Basis und Höhe, so ist die Summe aller dieser Flächen kleiner als die Fläche des Segmentes.

Beweis: Es sei (s. vorige Fig.) $AZBHG$ das Parabelsegment und Z, H, T, J die vier Flächen in abnehmender geometrischer Progression mit dem Quotienten $\frac{1}{4}$, und Z sei gleich dem Dreieck ABG.

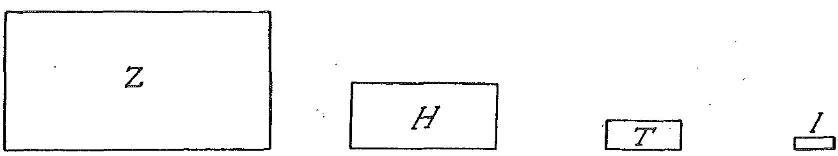

Fig. 8.

Da nun nach vorigem Beweis $\triangle ABG = 8 \triangle ABZ = 8 \triangle BHG$, so ist auch $\triangle ABG = 4 (\triangle ABZ + \triangle BHG)$, und da $\triangle ABG = Z$ (nach Voraussetzung), so ist also $\triangle ABZ + \triangle BHG = \frac{1}{4} Z = H$. Auf gleiche Weise zeigen wir, dass auch die in die übrigbleibenden vier Segmente einbeschriebenen, die gleichen Basen und Höhen wie diese Segmente habenden Dreiecke zusammen gleich der Fläche T sind, und endlich die wieder in die übrigbleibenden Segmente einbeschriebenen Dreiecke zusammen gleich der Fläche J sind. Alle diese Flächen zusammen sind aber gleich einem in das Parabelsegment einbeschriebenen Polygon, also kleiner als das Segment, w. z. b. w.

Satz 23: (arithmetischer Hilfssatz): Wenn eine Reihe von Grössen in geometrischer Progression mit dem Quotienten $\frac{1}{4}$ gegeben sind, so ist die Summe aller dieser Grössen, vermehrt um den dritten Teil der letzten (kleinsten), gleich $\frac{4}{3}$ der ersten Grösse.

Beweis: Die aufeinander folgenden, in geometrischer Progression stehenden Grössen seien A, B, G, D, E, die grösste A; es seien nun vier andere Grössen gegeben Z, H, T, J, und zwar sei $Z = \frac{1}{3} B$, $H = \frac{1}{3} G$, $T = \frac{1}{3} D$, $J = \frac{1}{3} E$; da nun $Z = \frac{1}{3} B$ und $B = \frac{1}{4} A$, ist $B + Z = \frac{1}{3} A$; ebenso findet man, dass $G + H = \frac{1}{3} B$, $D + T = \frac{1}{3} G$, $E + J = \frac{1}{3} D$, also ist

$$B + G + D + E + Z + H + T + J = \frac{1}{3}(A + B + G + D),$$

es ist aber nach Voraussetzung $Z + H + T = \frac{1}{3}(B + G + D)$, also:

$$B + G + D + E + J = \frac{1}{3} A;$$

mithin $$A + B + G + D + E + J = \frac{4}{3} A,$$

oder $$A + B + G + D + E + \frac{1}{3} E = \frac{4}{3} A \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Satz 24: Jedes Parabelsegment ist gleich $\frac{4}{3}$ des Dreieckes von gleicher Basis und gleicher Höhe.

Beweis: (s. Fig. zu Satz 21.) Es ist zu beweisen, dass Segment $AZBHG = \frac{4}{3} \triangle ABG$ ist. Es sei $K = \frac{4}{3} \triangle ABG$, also muss bewiesen werden, dass P. S.[1] $AZBHG = K$ ist. Wenn es nicht gleich K wäre, so müsste es entweder grösser oder kleiner als K sein. Es sei nun zuerst grösser als K. Man beschreibe in die P. S. ABZ und BGH zuerst die Dreiecke ABZ und BGH, die mit den Segmenten gleiche Basis und gleiche Höhe haben, in die übrigbleibenden Segmente wiederum Dreiecke von gleicher Basis und Höhe, wie schon oben dargestellt worden ist, und setze dies so lange fort, bis die übrigbleibenden Segmente zusammen kleiner als der Überschuss des P. S. über die Fläche K sind, dann ist also das dem P. S. einbeschriebene Polygon grösser als die Fläche K[2]), was unmöglich ist, denn nach Satz 23 ist das einbeschriebene Polygon, d. h. $\triangle ABG + \frac{1}{4} \triangle ABG + \frac{1}{16} \triangle ABG + \cdots < \frac{4}{3} \triangle ABG$, oder also Polygon

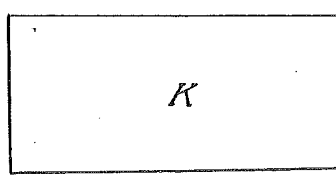

Fig. 9.

[1]) Ich setze für Parabelsegment in diesem Beweise die Abkürzung P. S.

[2]) Denn nach Annahme und Konstruktion wäre P. S. — Polygon $<$ P. S. — K, also Polygon $> K$.

$< K$. Das P. S. $AZBHG$ kann also nicht grösser sein als die Fläche K.

Es sei nun zweitens kleiner als die Fläche K. Man zeichne wiederum in die jeweilen übrigbleibenden Segmente die entsprechenden Dreiecke wie vorher und setze dies so lange fort, bis die Summe J der zuletzt gezeichneten Dreiecke kleiner ist als der Überschuss der Fläche K über das P. S.; wir wollen diesen Überschuss Q nennen, dieser sei nun also grösser als J [1]) (s. Fig. zu Satz 22), nun ist also

$$K = \text{P. S.} + Q.$$

Es ist aber (nach Satz 23): $Z + H + T + J + \frac{1}{3} J = \frac{4}{3} Z = K$, mithin besteht nun die Gleichheit:

$$\text{P. S.} + Q = Z + H + T + J + \frac{1}{3} J,$$

da nun $Q > J$, aber $\frac{1}{3} J < J$ ist, so muss

$$Z + H + T + J > \text{P. S.}$$

sein, was im Widerspruch zu Satz 22 steht, in welchem bewiesen wurde, dass die Summe aller der Flächen Z, H, T, J etc. kleiner als die Fläche des P. S. sei; also kann das P. S. weder grösser noch kleiner als K sein, es muss also $= K = \frac{4}{3} \triangle ABG$ sein.

* * *

Wir sehen, dass *Archimedes* sieben Sätze (worunter einen arithmetischen Hilfssatz) braucht, um die Quadratur zu finden, der Enkel *Thābits* aber nur deren drei. Die sieben Sätze des *Archimedes* liessen sich allerdings auf sechs reduzieren, denn es könnten leicht 18 und 19 in einen Satz vereinigt werden, vielleicht hätten sich auch 22 und 24 zu einem vereinigen lassen; *Archimedes* zeigt sich eben etwas weniger voraussetzungslos als der Araber. — Was die Methoden beider Geometer anbetrifft, so finden wir bei näherer Betrachtung in derjenigen des Arabers einen nicht geringen Vorzug vor der des Griechen. Wie *C. R. Wallner* in München in seiner Abhandlung „Die Wandlungen des Indivisibilienbegriffs von *Cavalieri* bis *Wallis*“ [2]) ganz richtig bemerkt, ist die *Archimedische* Methode und ihre Nachbildungen „durchaus von der seinen (*Cavalieri*'s) verschieden, denn sie sind indirekte

[1]) Diese Annahme ist möglich, denn wir können durch Einschreiben immer weiterer Dreiecke das J so klein werden lassen, als wir wollen.

[2]) Biblioth. mathem. $\mathbf{4}_3$ (1903), S. 39.

Beweisverfahren, setzen die Kenntnis des Resultates bereits voraus, operieren nirgends mit Indivisibilien oder Koordinaten, sondern ausschliesslich mit ein- und umschriebenen Figuren", etc. Das gleiche gilt nun in der Tat auch von den Arbeiten des *Ibn al-Haitham*, des *Thābit b. Kurra*, des *Abū Sahl al-Kūhī* über die Quadratur der Parabel und die Kubatur des Paraboloides; bei allen diesen Geometern wird als letzter Satz aufgestellt: Ein Parabelsegment ist gleich $\frac{4}{3}$ des Dreiecks [1]), das mit ihm gleiche Basis und gleiche Höhe hat, oder: Ein Paraboloidsegment ist gleich der Hälfte des umbeschriebenen Zylinders, und dann wird indirekt gezeigt, dass dieses Segment nicht grösser und nicht kleiner als $\frac{4}{3}$ dieses Dreieckes, bezw. $\frac{1}{2}$ dieses Zylinders sein kann. *Ibrāhīm b. Sinān* nun schlägt einen etwas andern Weg ein: der letzte (dritte) Satz sagt allerdings auch: Ein Parabelsegment ist $= \frac{4}{3}$ des einbeschriebenen Dreiecks von gleicher Basis und gleicher Höhe, aber er beweist diesen Satz direkt, nicht mit Anwendung der *Reductio ad absurdum*; dies kann er nämlich, weil er diese Methode, die eben von ihm so wenig wie von seinen Vorgängern und Nachfolgern, solange sie sich auf dem Boden der Euklidischen Geometrie bewegten, umgangen werden konnte, auf einen vorhergehenden Satz angewandt hatte, nämlich auf Satz 2: „Irgend zwei Segmente einer Parabel verhalten sich zueinander wie die zwei Dreiecke, die zu Grundlinien die Grundlinien der Segmente und zu Spitzen die Scheitel der Segmente haben". Sobald er diesen Satz bewiesen hatte, ergab sich ihm auf leichte Weise und direkt der Inhalt des Parabelsegmentes. In diesem Wege erblicke ich einen Vorzug vor dem des *Archimedes*.

Bei dieser Gelegenheit sei mir noch gestattet, kurz auf zwei andere Punkte zu sprechen zu kommen, die Herr *Wallner* in einer andern Abhandlung [2]) desselben Bandes der *Bibliotheca mathematica* behandelt und die mit den von *Archimedes* und den Arabern in ihren Quadraturen und Kubaturen befolgten Methoden in nächster Beziehung stehen. Er sagt (S. 250): „Deshalb möchte ich mich auf das entschiedenste gegen die vielverbreitete Ansicht aussprechen, dass das Beweisverfahren der Alten auf einer Verwendung des Grenzbegriffes beruhe", und S. 252: „Es ist dabei wohl zu beachten, dass dieser Begriff des Ausschöpfens (Exhaurire) vor *Gregorius* nirgends vorkommt, weshalb das Verfahren der Alten ganz mit Unrecht so häufig als Ex-

[1]) Bezw. $\frac{2}{3}$ des umbeschriebenen Parallelogramms.

[2]) „Über die Entstehung des Grenzbegriffes" (*Bibl. mathem.* 4_3, S. 246—259).

haustionsmethode bezeichnet wird." Was den ersten Punkt anbetrifft, so ergibt sich die Richtigkeit der Behauptung leicht aus der Betrachtung der oben gegebenen Übersetzung der Archimedischen Parabelquadratur; die Umgehung des Grenzbegriffes zeigt sich sehr deutlich in Satz 23, indem *Archimedes* keineswegs die Reihe $1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \cdots$ in inf. summiert, sondern er nimmt eine endliche Zahl von Gliedern an und beweist dann, dass diese endliche Summe, vermehrt um den dritten Teil des letzten Gliedes, gleich $\frac{4}{3}$ des ersten Gliedes sei; darum braucht er dann eben im letzten Satze noch die *Reductio ad absurdum.* Was den zweiten Punkt anbelangt, so findet sich bei diesen alten Geometern, wo sie die Exhaustionsmethode anwendeu, in der Tat niemals ein vollständiges Ausschöpfen, d. h. ein solches, bei dem man auf einen unendlich kleinen Rest kommt [1]), sondern sie gehen nur so weit, bis der Rest kleiner als eine gegebene, kleine, endliche Grösse e wird, und deshalb brauchen sie dann eben wieder, um zu einem Resultate zu gelangen, einen indirekten Beweis und müssen auch das Resultat, das sie erhalten sollen, schon kennen. Aber man hat nun einmal dieser Methode den Namen „Exhaustionsmethode" gegeben und wird diesen wohl, wenn er auch dem eingeschlagenen Verfahren nicht ganz entspricht, nicht mehr aufgeben wollen.

Wir glauben also, durch diese Darlegungen unsere im Anfang des Kommentars ausgesprochene Behauptung, dass die Berechnung des Parabelinhaltes durch *Ibrāhīm b. Sinān* die kürzeste von allen sei, die uns seit den ältesten Zeiten bis zur Erfindung der Integralrechnung bekannt geworden sind, genügend bestätigt zu haben; ebenso deutlich wird auch dadurch die Richtigkeit unserer Ansicht beim Leser sich bekräftigen, dass diese Abhandlung auch in bezug auf die angewandte Methode in erste Linie gestellt zu werden verdient: gewiss ein schönes Zeugnis für die Schaffenskraft und den Erfindungsgeist der Mathematiker aus der Blütezeit der arabischen Kulturentwicklung!

---

[1]) Eben infolge des Mangels eines Grenzbegriffes.