Kreis geht durch den Halbierungspunkt C' der Höhe CF, weil FC eine Lage von t ist; weil $FA = 2\,C'N$, so läuft der von C' ausgehende Durchmesser $C'C_1$ des Kreises nach der Mitte von FA und ist parallel und gleich NA. Analog wird der Kreis über FM als Durchmesser gefunden, wobei M die Mitte von BC ist; dieser Kreis geht ebenfalls durch C' und sein von C' ausgehender Durchmesser $C'C_2$ ist parallel und gleich MB. Schneidet die beliebige Gerade t durch F die zwei Hülfskreise in P und Q, so ist das Lot PP' von P auf $C'C_1$ die Potenzlinie der Kreise um A, C, welche t berühren und das Lot QQ' von Q auf $C'C_2$ ist die Potenzlinie der Kreise um B, C, welche t berühren; der Schnittpunkt R der beiden Lote ist der Potenzpunkt der drei Kreise um A, B, C als Mittelpunkte und t als gemeinsamer Tangente. Nun ist das rechtwinklige

$$\Delta\, C_1C'P \backsim C_2C'Q, \; (\sphericalangle\, PC_1C' = PFC' = QFC' = QC_2C')$$

also auch
$$\Delta\, C'PP' \backsim C'QQ',$$

folglich $\quad C'P' : C'Q' = C'P : C'Q = C'C_1 : C'C_2 = CN : CM, \quad$ d. h.: der Ort des Potenzpunktes R ist die Gerade g_3, welche durch die Mitte C' von CF hindurch geht und zu der Geraden von C nach dem Mittelpunkt O des dem Dreieck ABC umschriebenen Kreises parallel ist.

Die Gerade g_3 bildet mit $C'C_2$ denselben Winkel wie $C'F$ mit $C'C_1$; sie geht durch den Schnittpunkt der Kreistangenten in C_1 und C_2, ferner durch die Fusspunkte der Lote von F auf das Seitenmittendreieck MNS des gegebenen Dreieckes ABC, von denen zugleich zwei die Schnittpunkte der Kreise über FN und FM mit dem Kreis über FS als Durchmesser sind, ferner durch den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von AB mit dem Lot von F auf die Gerade von C nach dem Mittelpunkte von K_3; dieser Punkt und der erwähnte Schnittpunkt der Tangenten sind identisch.

Die Schnittpunkte der Geraden g_3 mit dem Kreis K_3 sind nun zwei gesuchte Brennpunkte; zu jedem von ihnen gehören zwei Parabeln durch A, B, C, deren Leitlinien die beiden Tangenten von F aus an einen der drei Kreise sind, die A oder B oder C zum Mittelpunkt haben und durch den gewählten Brennpunkt gehen. Eine ganz analoge Betrachtung gilt für die Dreieckshöhe AD auf BC und für die Höhe BE auf CA. Man hat somit folgende Konstruktion:

Abb. 2. In dem gegebenen Dreieck ABC zieht man die Höhen AD, BE, CF und bestimmt zu den Fusspunkten D, E, F auf den Seiten des Dreieckes die vierten harmonischen Punkte D', E', F' in bezug auf BC, CA, AB (mit Hülfe der Geraden FED', DFE', DEF'); über den Strecken DD', EE', FF'

als Durchmesser legt man die Kreise K_1, K_2, K_3. Ist nun O der Mittelpunkt des dem Dreieck ABC umschriebenen Kreises, so zieht man durch die Mitten A', B', C' der Dreieckshöhen beziehungsweise die Parallelen g_1, g_2, g_3 zu AO, BO, CO. Die Schnittpunkte von g_1 mit K_1, von g_2 mit K_2 und

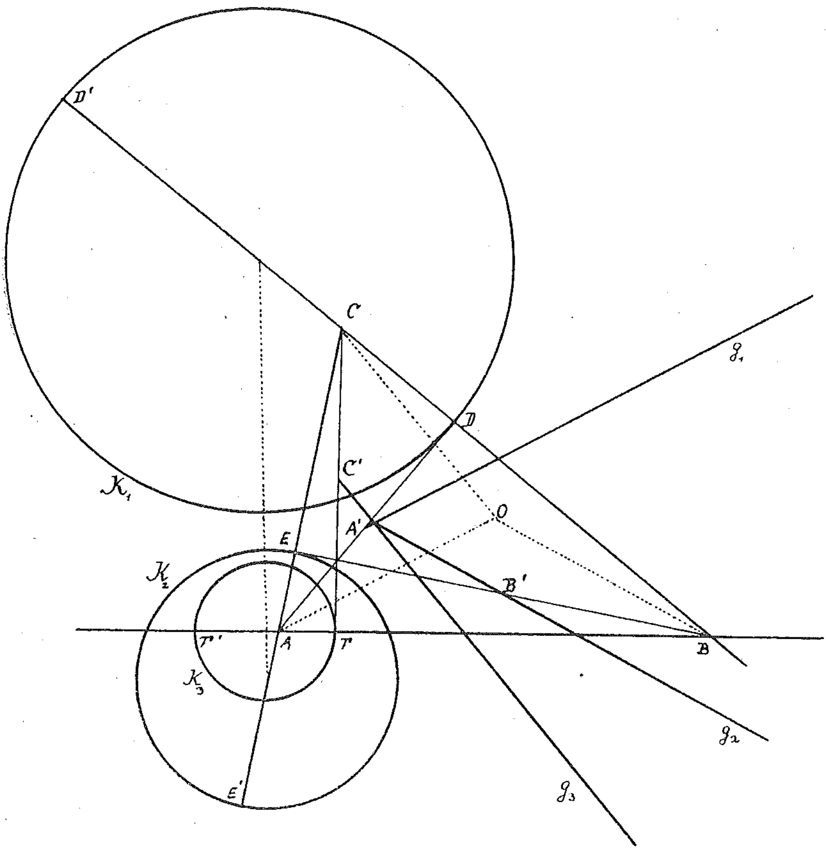

Abb. 2.

von g_3 mit K_3 sind die gesuchten Brennpunkte. Es gibt also deren sechs und zu jedem zwei gesuchte Parabeln durch A, B, C.

Zwei solche Parabeln gehen durch A, B, C und haben denselben Brennpunkt; sie müssen sich daher noch in einem vierten Punkte schneiden und eine vierte gemeinsame Tangente aufweisen. Dieser vierte Punkt liegt auf der betreffenden Dreieckshöhe, weil sie den Winkel zwischen den zwei durch ihren Fusspunkt gehenden Leitlinien halbiert und die vierte Tangente ist zufolge einer bekannten Parabeleigenschaft die Mittelsenkrechte zur Verbindungslinie des Brennpunktes mit dem Fusspunkt der Höhe, durch den beide Leitlinien gehen.

In der Abb. 2 sieht man, dass die Schnittpunkte von g_1 mit K_1, von g_2 mit K_2 und von g_3 mit K_3 imaginär sind, was bewirkt, dass keines der Parabelpaare reell wird. Das muss so sein, wenn die drei Punkte A, B, C reell sind; denkt man sich nämlich um A, B zwei Kreise, die sich reell schneiden und daher zwei reelle gemeinsame Tangenten haben, so gibt es weder durch den einen noch durch den andern Schnittpunkt einen reellen dritten Kreis, der ebenfalls die zwei reellen gemeinsamen Tangenten berührt.

Sind von den drei Punkten zwei konjugiert imaginär, z. B. A, B, so bleiben F, F', C', O reell und es werden auch K_3 und g_3 reell; die Mitte S von AB liegt dann zwischen F, F'.

Abb. 3. In der Abbildung 3 ist der Umkreis des Dreieckes ABC als gegeben angenommen, C ist auf ihm gewählt und die imaginären Schnittpunkte des Kreises mit einer Geraden l als die Punkte A, B betrachtet. Der Punkt F' ist der Schnittpunkt von l mit der Polaren von F in bezug auf den Umkreis. S ist der Fusspunkt des Lotes von O auf l. Die Parallele durch C' zu CO ist g_3 und schneidet K_3 in X, X'. Die zu X oder X' gehörigen Parabeln sind reell oder imaginär, je nachdem die Kreise, die C als Mittelpunkt haben und durch X oder X' gehen, von F aus reelle oder imaginäre Tangenten zulassen. In der Abbildung sind die zwei Parabeln, die zu X gehören, reell und eingezeichnet; sie schneiden sich auf CF und haben die Mittelsenkrechte von FX zur gemeinsamen Tangente.

In dem Falle, wo die Mitte S von AB und also die Punkte A, B selber mit F' zusammenfallen, wird g_3 zur Tangente von K_3; die Geraden SN und SM werden nämlich unendlich benachbart und die Fusspunkte der Lote von F auf die zwei Geraden werden zu unendlich benachbarten Punkten von K_3 und somit ist ihre Verbindungslinie g_3 Tangente von K_3; die doppelt gelegte Gerade AC tritt als degenerierte Parabel auf.

Bekanntlich halbieren die Höhen des Dreieckes ABC (Abb. 2) die Winkel seines Höhenfusspunktendreieckes DEF und die Punkte A, B, C sind die Mittelpunkte der drei Kreise, die dem Dreieck DEF anbeschrieben werden können; diese drei Kreise treten für alle drei Höhenfusspunkte als ein gemeinsames System solcher drei Kreise auf, welche gewisse durch die Höhenfusspunkte gehenden Geraden t, nämlich die Seiten des Höhenfusspunktedreieckes berühren.

Folglich ist der Potenzpunkt der drei, dem Höhenfusspunktendreieck DEF anbeschriebenen Kreise gemeinsamer Punkt der drei Geraden g_1, g_2, g_3.

Nach früherem schneiden sich diese anbeschriebenen Kreise paarweise auf K_3, K_1, K_2; folglich hat der Potenzpunkt jener drei Kreise auch gleiche Potenz für K_1, K_2, K_3. Die Mittelpunkte der drei Kreise K_1, K_2, K_3 liegen aber, wie gleich gezeigt werden soll, auf einer Geraden; folglich haben die drei Kreise K_1, K_2, K_3 eine gemeinschaftliche Potenzlinie, welche durch den Potenzpunkt der drei anbeschriebenen Kreise des Dreieckes DEF hindurchgeht. Es liegen nämlich die Punkte D', E', F' auf einer Geraden, der sogenannten Harmonikalen des Höhenpunktes des Dreieckes ABC; bezeichnet man die Teilverhältnisse von D', E', F' in bezug auf die Seiten des Dreieckes ABC mit λ, μ, ν, so sind die Teilverhältnisse der Kreismittelpunkte[1] λ^2, μ^2, ν^2 und wenn $\lambda . \mu . \nu = 1$

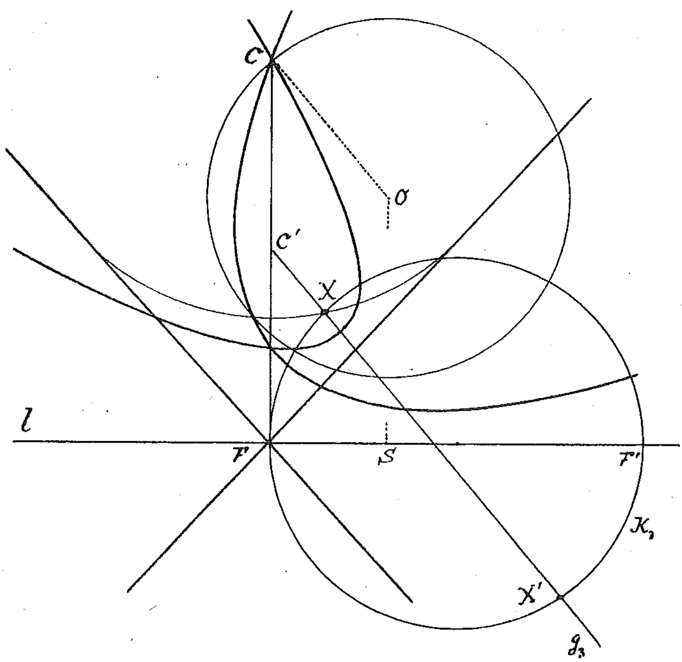

Abb. 3.

[1]) J. Steiner's Vorlesungen über synthetische Geometrie. Erster Teil, bearbeitet von Dr. C. F. Geiser, Die Theorie der Kegelschnitte in elementarer Darstellung, 3. Auflage (Leipzig, B. G. Teubner), S. 31.

ist, so muss auch $\lambda^2 . \mu^2 . \nu^2 = 1$ sein, d. h. die drei Kreismittelpunkte liegen auf einer Geraden.

Da der Schnittpunkt der drei Geraden g_1, g_2, g_3 auf der Potenzlinie von K_1, K_2, K_3 liegt, und die Schnittpunkte von g_1 mit K_1, von g_2 mit K_2 und von g_3 mit K_3 die sechs Brennpunkte X sind, so liegen dieselben dreimal zu vieren auf drei reellen Kreisen; ihre drei Mittelpunkte sind die Ecken des Dreieckes, dessen Seiten bezüglich durch die Mittelpunkte von K_1, K_2, K_3 gehen und auf g_1, resp. g_2, g_3 senkrecht stehen. Dieses Dreieck und das Dreieck ABC sind perspektivisch gelegen, weil die Mittelpunkte von K_1, K_2, K_3 auf einer Geraden liegen.

II.

Durch zwei gegebene Punkte zwei Parabeln zu finden, die noch eine gegebene Gerade berühren und den Brennpunkt gemeinsam haben.

Abb. 4. Wenn A, B die gegebenen Punkte sind und X der Brennpunkt einer Parabel durch A, B ist, so ist die Leitlinie der Parabel eine gemeinsame Tangente der Kreise durch X mit A und B als Mittelpunkten; diese Parabel berührt die gegebene Gerade g, wenn der Gegenpunkt U von X in bezug auf g auf die gemeinsame Tangente der zwei Kreise fällt. Fällt der Gegenpunkt in den Schnittpunkt von zwei gemeinsamen Tangenten hinein, so ist die zweite Tangente Leitlinie einer zweiten Parabel durch A, B mit X als Brennpunkt und g als Tangente; diese zwei Parabeln sind ein gesuchtes Paar. Bei zwei Kreisen um A, B, die sich in X schneiden, treffen sich die äussern gemeinsamen Tangenten im äussern Ähnlichkeitspunkt U und die inneren gemeinsamen Tangenten im inneren Ähnlichkeitspunkt V. Angenommen nun, der Gegenpunkt von X in bezug auf g falle nach U, so ist $AU : UB = AV : VB = AX : BX$, d. h. XV ist senkrecht zu XU und daher ist der Schnittpunkt M von g mit der Geraden AB die Mitte von U, V. Die Punkte U, V teilen A, B harmonisch. Legt man den Kreis um M, der A, B harmonisch teilt, nimmt von AB die symmetrische Gerade in bezug auf g, so sind ihre Schnittpunkte mit dem Kreis um M Brennpunkte von gesuchten Parabelpaaren. Man hat folgende Konstruktion:

Von dem Schnittpunkt M der Geraden g mit AB legt man an den Kreis über AB als Durchmesser eine Tangente und beschreibt mit dieser Tangente als Radius um M als Mittelpunkt einen Kreis. Seine Schnittpunkte X, X' mit der symmetrischen Geraden von AB in bezug auf g sind Brennpunkte von gesuchten Parabelpaaren. Legt man um

A oder B als Mittelpunkt einen Kreis durch X, so sind die durch U gehenden Tangenten des Kreises die beiden Leitlinien des zu X gehörigen Parabelpaares. Der Gegenpunkt von X' in bezug auf g fällt nach V und daher ist das zugehörige Parabelpaar imaginär. Die Berührungspunkte der zwei zu X gehörigen Parabeln mit g werden gefunden, indem man in U die Senkrechten auf die beiden Leitlinien errichtet und mit g schneidet. Die zwei Parabeln haben noch zwei gemeinsame Punkte; sie liegen auf

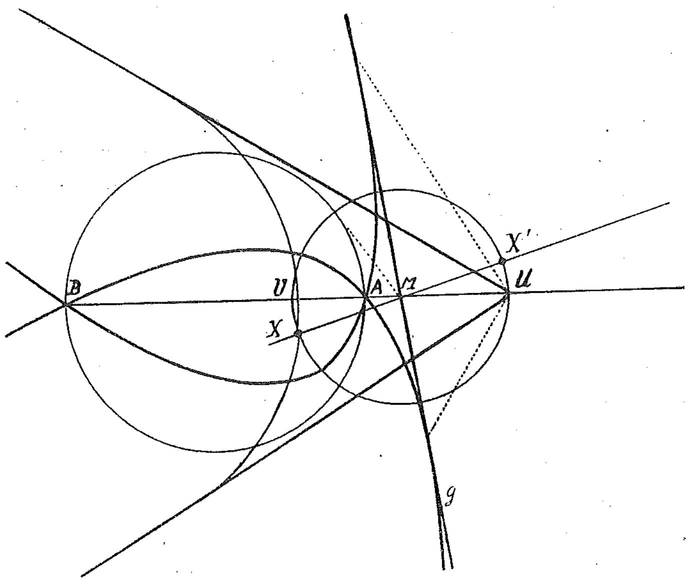

Abb. 4.

der Senkrechten durch U zu AB, weil die Senkrechte den Winkel zwischen den zwei Leitlinien halbiert. Die Konstruktion liefert zwei Parabelpaare, von denen eines imaginär ist; eigentlich gibt es sechs Parabelpaare, weil der Gegenpunkt von X in bezug auf g in jeden der sechs Schnittpunkte von den vier gemeinsamen Tangenten zweier Kreise hineinfallen kann. Diese andern Lösungen werden imaginär und sollen daher nicht weiter verfolgt werden.

Die Abbildung gibt noch zu einigen Bemerkungen Anlass. Wenn die Gerade g sich um den Punkt M auf AB dreht, so ist der Ort der Punkte X, X' ein Kreis mit dem Mittelpunkt M. Dreht man g um einen beliebigen Punkt P, so findet man den Ort der Punkte X, X', indem man um den jeweiligen Schnittpunkt M von g mit AB als

Mittelpunkt den Kreis legt, der A, B harmonisch trennt und diesen Kreis mit der symmetrischen Geraden von AB in bezug auf g schneidet. Dieser Ort ist von der fünften Ordnung, weil fünf seiner Punkte auf AB fallen, nämlich je einer nach A und B, weil von A und B je eine Gerade durch P geht; ein Punkt fällt ins Unendliche auf AB, weil für die Parallele durch P der Kreis aus der Mittelsenkrechten von AB und der unendlich fernen Geraden besteht; endlich fallen auf AB noch zwei Punkte, die entstehen, wenn man durch P die Senkrechte zu AB nimmt, indem dann die symmetrische Gerade von AB in bezug auf g mit AB zusammenfällt und zwei Schnittpunkte mit dem zugehörigen Kreis gibt. Es kann noch angefügt werden, dass die Enveloppe der symmetrischen Geraden von AB in bezug auf g der Kreis um P ist, welcher AB berührt; jede dieser symmetrischen Geraden hat nämlich von P denselben senkrechten Abstand wie AB. Bewegt sich g als Tangente einer Kurve k^{ter} Klasse, so lässt sich der Ort von X, X' auf dieselbe Art finden; er ist von der Ordnung $5\,k$. In A und B fallen je k Punkte des Ortes, weil von A, B je k Tangenten der Kurve k^{ter} Klasse ausgehen; der unendlich ferne Punkt von AB tritt $k$mal als Punkt des Ortes auf, weil k Tangenten der Kurve k^{ter} Klasse zu AB parallel laufen; ausserdem fallen noch $2\,k$ Punkte des Ortes auf AB, indem für die k auf AB senkrecht stehenden Tangenten die symmetrischen Geraden von AB in bezug auf die Tangenten mit AB zusammenfallen, und immer zwei Schnittpunkte mit dem zugehörigen Kreis auftreten. Im ganzen entstehen also auf AB $5\,k$ Schnittpunkte. Es kann noch hinzugefügt werden, dass die symmetrischen Geraden von AB in bezug auf die Tangenten der Kurve k^{ter} Klasse eine Kurve $2\,k^{\text{ter}}$ Klasse umhüllen; zieht man nämlich durch einen beliebigen Punkt Strahlen und halbiert die von ihnen und AB gebildeten Winkel, so umhüllen die Halbierungsgeraden eine Parabel, die mit der Kurve k^{ter} Klasse $2\,k$ Tangenten gemeinsam hat. Für die Enveloppe $2\,k^{\text{ter}}$ Klasse ist AB eine $k$fache Tangente, weil AB für jede auf AB senkrechte Tangente der Kurve k^{ter} Klasse als symmetrische Gerade zu sich selber auftritt.