Vom freien Fall auf schiefen Ebenen.

Von

A. Kiefer, Zürich.

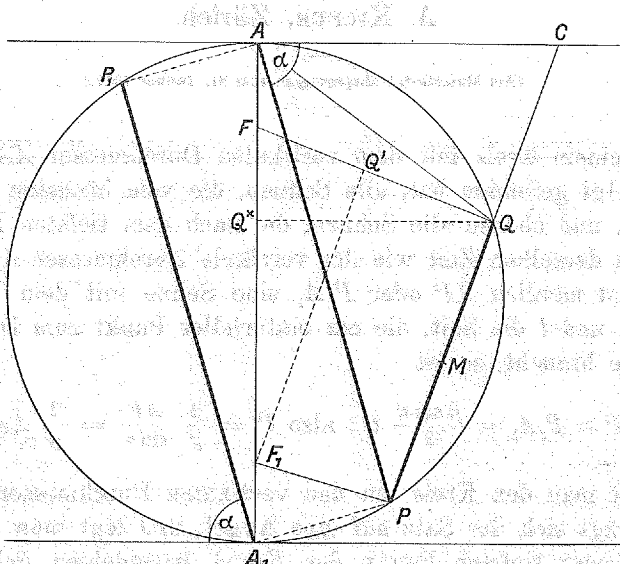
(Als Manuskript eingegangen den 31. Januar 1917.)

Bei einem Kreis mit dem vertikalen Durchmesser AA_1 werden, wie Galilei gefunden hat, alle Sehnen, die vom höchsten Punkte A ausgehen, und ebenso alle Sehnen, die nach dem tiefsten Punkte A_1 laufen, in derselben Zeit wie der vertikale Durchmesser AA_1 durchfallen. Ist nämlich AP oder P_1A_1 eine Sehne mit dem Neigungswinkel α, und t die Zeit, die ein materieller Punkt zum Durchfallen der Sehne braucht, so ist

$$AP = P_1A_1 = \frac{g \sin \alpha}{2} t^2; \text{ also } t^2 = \frac{2}{g} \frac{AP}{\sin \alpha} = \frac{2}{g} AA_1.$$

Lässt man den Kreis um den vertikalen Durchmesser rotieren, so überträgt sich der Satz auf eine Kugel, und legt man durch den höchsten oder tiefsten Punkt der Kugel irgendeinen Schnittkreis, so werden seine Sehnen, die durch den höchsten oder tiefsten Punkt gehen, in derselben Zeit durchfallen wie der vertikale Durchmesser einer Kugel, die durch den Kreis hindurchgeht und in seinem höchsten oder tiefsten Punkte eine horizontale Tangentialebene hat.

Die angegebenen Eigenschaften lassen sich erweitern. In der Abbildung seien F, F_1 zwei auf AA_1 zum Kreismittelpunkt symmetrisch gelegene Punkte und durch F, F_1 seien die Parallelen FQ, F_1P bis zum Kreis gezogen; dann ist $QP = Q'F_1$; QP und die Parallele $Q'F_1$ stehen auf den zwei durch F, F_1 gezogenen Parallelen FQ, F_1P senkrecht. Dreht man die zwei parallelen Geraden um F, F_1 so beschreibt Q' den Kreis über FF_1 als Durchmesser, QP umhüllt, wie bekannt, die Ellipse, die F, F_1 als Brennpunkte und AA_1 als grosse Axe besitzt. Zum Durchfallen der Sehne QP ist immer dieselbe Zeit notwendig wie zum Durchfallen der Strecke FF_1. Wählt man F, F_1 auf der Verlängerung von AA_1, so ist die Enveloppe von QP eine Hyperbel mit AA_1 als Hauptaxe. D. h.: Wenn man bei einem Kreis mit dem vertikalen Durchmesser AA_1 alle Ellipsen, die AA_1 zur grossen Axe und ebenso alle Hyperbeln, die AA_1 zur Hauptaxe haben, legt, so liegt auf jeder Tangente irgendeines dieser Kegelschnitte eine Sehne des Kreises und für denselben Kegelschnitt werden alle diese Sehnen in derselben Zeit durchfallen, wie die vertikale Strecke FF_1 zwischen den Brennpunkten des betreffenden Kegelschnittes.



Lässt man den Kreis um AA_1 rotieren, so entsteht die Erweiterung des Satzes auf Kugelsehnen, welche die Gerade AA_1 schneiden und ein Rotations-Ellipsoid oder Hyperboloid berühren mit AA_1 als grosser Axe, beziehungsweise Hauptaxe. Wenn der Kreis auf der Tangente in A rollt, so beschreibt irgendein Punkt P desselben eine Cykloide; die jeweilige Sehne AP ist die Normale und A_1P ist die Tangente der Cykloide in P. AP und PA_1 sind immer Sehnen eines Kreises, dessen vertikaler Durchmesser die Länge AA_1 hat, d. h.: Bei einer Cykloide wird das Stück jeder Normalen zwischen der Leitgeraden des rollenden Kreises und dem Kurvenpunkt, und ebenso das Stück jeder Tangente zwischen Scheiteltangente und Kurvenpunkt in derselben Zeit durchfallen. Da der Krümmungsradius bekanntlich gleich $2PA$ ist, so wird auch jeder Krümmungsradius in konstanter Zeit durchfallen und daher ist das Stück auf der Vertikalen durch den Krümmungsmittelpunkt zwischen dem letztern und der Tangente des Kurvenpunktes von konstanter Länge, nämlich, wie direkt ersichtlich, gleich $2AA_1$. Wählt man in der Ebene des Kreises über AA_1 irgendeinen Punkt und frägt nach den Sehnen durch diesen Punkt, die in vorgeschriebener Zeit durchfallen werden, so kann man sagen: Es gibt durch den Punkt zwei solche Sehnen, nämlich die Tangenten des Kegelschnittes mit A, A_1 als Scheitelpunkten und F, F_1 als Brennpunkten, wobei zum Durchfallen der vertikalen Strecke FF_1 die vorgeschriebene Zeit nötig ist. Denkt man sich durch den Punkt alle möglichen Sehnen gelegt, so kann man nach derjenigen fragen, zu deren Durchfallen ein Minimum an Zeit nötig ist; diese Sehne muss die Grenzlage von zwei unendlich benachbarten Sehnen darstellen, zu deren Durchfallen die gleiche Zeit nötig ist. Also ist die gesuchte Sehne diejenige, die auf der Tangente des Kegelschnittes liegt, der durch den gegebenen Punkt geht und A, A_1 als Scheitelpunkte besitzt. Liegt in der Ebene des Kreises über AA_1 eine Kurve, so kann man nach den Tangenten fragen, die solche Kreissehnen enthalten, welche in vorgeschriebener Zeit durchfallen werden. Diese Tangenten sind die gemeinsamen Tangenten der gegebenen Kurve und des Kegelschnittes mit A, A_1 als Scheitelpunkten und F, F_1 als Brennpunkten, wobei die Strecke FF_1 in der vorgeschriebenen Zeit durchfallen wird. Man kann auch nach denjenigen Kurventangenten fragen, die Kreissehnen enthalten, zu deren Durchfallen ein Minimum oder Maximum von Zeit nötig ist. Jede solche Tangente muss die Grenzlage von zwei unendlich benachbarten Tangenten darstellen, die Sehnen mit gleicher Fallzeit enthalten. Also muss die gegebene Kurve in dem Berührungspunkte jeder gesuchten Tangente von einem Kegelschnitt berührt werden, der A, A_1 als Scheitelpunkte besitzt. Um die Anzahl dieser Punkte zu ermitteln, kann man die gegebene Kurve, die von der n^{ten} Ordnung sein soll, in n gerade Linien degenerieren lassen; dann wird jede Gerade von einem Kegelschnitt berührt, der A, A_1 als Scheitelpunkte hat und durch jeden der $\frac{n(n-1)}{2}$ Schnittpunkte der n Geraden gibt es ebenfalls einen solchen Kegelschnitt. Aber derselbe zählt doppelt, weil die Kurve im Schnittpunkt von zwei Geraden sich wie eine Hyperbel verhält, deren beide Äste berührt werden. Also ist die gesuchte Anzahl $n+2\frac{1}{2}n(n-1)=n^2$.

Hat man in einer vertikalen Ebene eine Kurve n^{ter} Ordnung und einen Punkt A, so kann man, in geometrischem Sinne, nach den Strecken von A nach Punkten der Kurve, oder von Punkten der

Kurve nach A fragen, so dass die Strecken in gegebener Zeit durchfallen werden. Die fraglichen Punkte auf der Kurve sind die $4n$ Schnittpunkte der Kurve mit den zwei Kreisen durch A, die in A eine horizontale Tangente und gegebenen Durchmesser haben. Soll die Zeit zum Durchfallen einer solchen Strecke ein Minimum oder Maximum sein, so muss die Strecke die Grenzlage von zwei unendlich benachbarten Strecken mit gleicher Fallzeit darstellen. Also erhält man die bezüglichen Punkte der Kurve als Berührungpunkte von Kreisen durch A, die in A eine horizontale Tangente haben. Die Zeit ist ein Minimum oder Maximum, je nachdem die Kurve an der Berührungsstelle ausserhalb oder innerhalb des Kreises verläuft. Um die Anzahl dieser Punkte zu ermitteln, kann man die Kurve in n Geraden zerfallen lassen; dann wird jede Gerade von zwei Kreisen berührt und durch den Schnittpunkt von je zwei Geraden geht ein Kreis, der aber doppelt zählt, weil die Kurve im Schnittpunkt von zwei Geraden sich wie eine Hyperbel verhält, deren beide Zweige berührt werden. Also ist die Anzhl solcher Kurvenpunkte, deren Verbindungslinien mit A ein Minimum oder Maximum der Fallzeit beanspruchen $2n + 2\frac{1}{2}n(n-1) = n^2 + n$.

Sind P, Q irgend zwei Punkte in einer vertikalen Ebene, so kann man nach dem Ort eines Punktes fragen, dessen Verbindungslinien mit P, Q in gleicher Zeit durchfallen werden. Dieser Ort ergibt sich, indem man alle Kreise durch P, Q legt und die Endpunkte A, A_1 ihrer vertikalen Durchmesser aufsucht. Aus der Abbildung folgt $\sphericalangle CAQ = APQ$, $\sphericalangle CAQ = AQQ^*$, also $\sphericalangle APQ = AQQ^*$, d. h.: die Strahlen PA und QA bilden zwei entgegengesetzt gleiche Büschel, und der Ort von A ist die gleichseitige Hyperbel, für welche PQ ein Durchmesser ist und die Tangenten in P, Q horizontal sind. Man kann die Hyperbel noch auf eine andere Art finden; aus der Abbildung $\overline{CA}^2 = CQ \cdot CP = (CM - MQ) \cdot (CM + MQ) = \overline{CM}^2 - \overline{MQ}^2$, oder $\overline{MC}^2 - \overline{CA}^2 = \overline{MQ}^2$, d. h. der Ort von A ist die gleichseitige Hyperbel, für welche PQ und die horizontale Strecke von gleicher Länge durch M als Mitte zwei konjugierte Durchmesser sind. Die Asymptoten halbieren die Winkel zwischen den zwei konjugierten Durchmessern. Diese Hyperbel könnte man noch auf eine dritte Art finden, indem man gleich grosse Kreise mit horizontalen Tangenten in P, Q, beide Kreise unterhalb oder beide oberhalb der Tangenten, legt und miteinander schneidet. Die Gesamtheit der Schnittpunktspaare bildet die Hyperbel; die zwei Punkte eines Paares bilden immer die Endpunkte einer zu PQ senkrechten Hyperbelsehne.

Wenn die zwei Kreise sich berühren, so ist der Berührungspunkt ein Punkt auf der Hyperbel von der Eigenschaft, dass seine Verbindungslinien mit P, Q in gleicher Zeit, die zudem ein Minimum ist, durchfallen werden. Es gibt zwei solche Punkte, deren Verbindungslinien mit P, Q in gleicher und minimaler Zeit durchfallen werden; aus Symmetriegründen sind die zwei Punkte einfach die Schnittpunkte der Hyperbel mit dem Kreis über PQ als Durchmesser.

Wählt man in der vertikalen Ebene durch P, Q einen dritten Punkt R, so kann man nach den Punkten fragen, die mit P, Q, R verbunden, drei Strecken liefern, welche in gleicher Zeit durchfallen werden. Es gibt zwei solche Punkte und sie werden einfach gefunden, indem man durch P, Q, R einen Kreis legt und die Endpunkte seines vertikalen Durchmessers aufsucht. Diese zwei Punkte sind die gemeinsamen Punkte der drei gleichseitigen Hyperbeln, welche zu je zwei der drei Punkte P, Q, R gehören.

Sucht man alle Punkte im Raum, die, mit den zwei Punkten P, Q verbunden, zwei Strecken geben, welche in gleicher Zeit durchfallen werden, so hat man alle Kugeln durch P, Q zu legen und den Ort der Endpunkte ihrer vertikalen Durchmesser zu suchen, oder man hat an jede der durch P, Q gehenden Kugeln die horizontalen Tangentialebenen zu legen und den Ort der Berührungspunkte zu ermitteln. Irgendeine horizontale Ebene wird von unendlich vielen Kugeln berührt; ist C der Schnittpunkt der Ebene mit PQ, so ist CA die mittlere Proportionale zwischen CQ und CP. Alle Punkte des gesuchten Ortes, die in der horizontalen Ebene liegen, bilden also einen Kreis mit dem Mittelpunkt C und dem Radius CA. Dieser Kreis hat einfach eine horizontale Sehne der zu P, Q gehörigen gleichseitigen Hyperbel zum Durchmesser. Der gesuchte Ort ist die Fläche zweiter Ordnung, welche entsteht, wenn man über jeder horizontalen Sehne der gleichseitigen Hyperbel als Durchmesser einen horizontalen Kreis legt. Die Fläche, die in P, Q horizontale Tangentialebenen hat, besitzt noch andere Kreisschnittebenen. Zwei gleich grosse Kugeln, durch P, Q mit horizontalen Tangentialebenen in P, Q und auf gleicher Seite derselben gelegen, schneiden sich in einem Kreis, welcher ebenfalls der Fläche zweiter Ordnung angehört. Die Ebenen dieser Kreise stehen wegen der Gleichheit der Kugeln auf der zur jeweiligen Zentralen parallelen Geraden PQ senkrecht.

Hat man drei Punkte P, Q, R im Raum, so werden alle Punkte, deren Verbindungsstrecken mit den drei Punkten in gleicher Zeit durchfallen werden, gefunden, indem man alle Kugeln durch P, Q, R legt und die Endpunkte ihrer vertikalen Durchmesser, oder die Berührungspunkte der horizontalen Tangentialebenen sucht. Die Mittelpunkte dieser Kugeln liegen in einer Geraden, welche auf der Ebene der drei Punkte senkrecht steht; die Vertikalebene durch diese Gerade schneidet die Kugeln in einem Büschel von Kreisen, deren vertikale Durchmesser in ihren Endpunkten den Ort dieser Punkte liefern. Der Ort ist also eine gleichseitige Hyperbel. Sie ist der gemeinsame Schnitt des zu den zwei Punkten P, Q gehörigen, oben besprochenen Hyperboloids mit den zwei andern Hyperboloiden, die in gleicher Weise zu Q, R und R, P gehören.

Wenn vier Punkte im Raume gegeben sind, P, Q, R, S, so gibt es zwei Punkte, deren Verbindungsstrecken mit den vier Punkten in gleicher Zeit durchfallen werden. Es sind die Endpunkte des vertikalen Durchmessers der durch die vier Punkte gehenden Kugel. Diese zwei Punkte sind die gemeinsamen Punkte der sechs Hyperboloide und vier gleichseitigen Hyperbeln, die zu je zwei, beziehungsweise zu je drei von den vier Punkten gehören.

Die bisherigen Betrachtungen geben noch zu weitern Fragen Veranlassung. Legt man in der Abbildung die Kugel über AA_1 als Durchmesser, schneidet sie mit einer beliebigen Ebene, projiziert F, F_1 auf die Ebene und legt durch die Projektionen in der Ebene zwei Parallelen, so liegen zwischen ihnen Sehnen des Schnittkreises, die in derselben Zeit durchfallen werden wie FF_1, d. h.: In einer beliebigen Schnittebene der Kugel liegen unendlich viele Kugelsehnen, die in gleicher Zeit durchfallen werden; diese Sehnen umhüllen einen Kegelschnitt mit dem höchsten und tiefsten Punkte des Schnittkreises als Scheitelpunkten. Durch einen beliebigen Punkt im Raum gibt es unendlich viele Kugelsehnen mit gleicher Fallzeit; in jeder Ebene durch den Punkt liegen dem eben ausgesprochenen Satze gemäss zwei Sehnen. Also bilden alle durch einen Punkt gehenden Kugelsehnen mit gleicher Fallzeit einen Kegel zweiter Ordnung. Liegt der Punkt auf der Kugel, so zerfällt der Kegel in zwei Ebenen. Sollen die Kugelsehnen mit vorgeschriebener Fallzeit zwei gegebene windschiefe Geraden treffen, so gehen, nach dem angegebenen, durch jeden Punkt jeder Geraden zwei Kugelsehnen und in jeder Ebene durch jede der Geraden liegen ebenfalls zwei Kugelsehnen, d. h. diese Kugelsehnen liegen auf den Erzeugenden einer Regelfläche vierter Ordnung, welche die zwei windschiefen Geraden zu Doppelgeraden hat. Allgemeiner, und in geometrischem Sinne aufgefasst, kann man für eine beliebige Kurve oder Fläche im Raum die Sehnen suchen, welche in gegebener Zeit durchfallen werden; hat man zwei Kurven, oder eine Kurve und eine Fläche, oder zwei Flächen, so kann man nach solchen Strecken fragen, welche Punkte des einen und andern Gebildes verbinden, so dass die Fallzeit für solche Strecken einen gegebenen oder auch einen extremen Wert hat. Man findet zum Beispiel bei zwei Flächen die Verbindungsstrecken mit gegebener Fallzeit, indem man in jedem Punkt der einen Fläche die zwei Kugeln mit horizontaler Tangentialebene und gegebenem Durchmesser legt, dann jede Kugel mit der andern Fläche schneidet und die Punkte des Schnittes mit dem gewählten Punkt verbindet. —