

Opere matematiche di Luigi Cremona.

Von

C. F. GEISER, Küsnacht (Zürich).

(Als Manuskript eingegangen am 25. April 1917.)

Der ausgezeichnete Mathematiklehrer am Winterthurer Gymnasium Ulrich Aeschlimann schrieb am 12. März 1910 seinem Schwager, dem grossen Mailänder Verleger Ulrico Höpli: „Ich möchte Dich als Interessent dringend bitten endlich einmal mit Cremona herauszukommen. Aus einer Distanz von bloss hundert Jahren angesehen, wird diese Publikation vieles überstrahlen, was Du in Deinem Katalog hast. Dass sie wahrscheinlich passiv sein wird, kann Dich ja nicht dagegen stimmen. Es ist Gold, was Du anbieten kannst“. Die „Opere matematiche di L. C.“ liegen jetzt in drei schönen Quartbänden vor; wie schade, dass Aeschlimann diese Erfüllung seiner Bitte nicht mehr erlebt hat. Gewiss ganz in seinem Sinne liegt es, wenn hier Herr Höpli der gebührende Dank für das in Verbindung mit der Accademia dei Lincei¹⁾ durchgeführte Unternehmen dargebracht wird, und es darf wohl auch daran erinnert werden, dass nun in dem nämlichen Verlag und in gleicher Ausstattung sich die Gesamtausgaben der Werke derjenigen Männer befinden, denen der glänzende Aufstieg der italienischen Mathematik in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts zu verdanken ist (Betti, Brioschi, Cremona, Beltrami).

¹⁾ Die gemeinschaftliche Arbeit wissenschaftlicher Korporationen und tatkräftiger Verleger bewährt sich gerade jetzt wieder, wo die durch den Weltkrieg verzögerte Gesamtausgabe Eulers wesentlich auch durch die Mitwirkung des Teubnerschen Verlags gesichert bleibt. Ein tragisches Gegenstück bildet die Klage, welche Jakob Steiner in einem am 31. Dezember 1833 an Jacobi gerichteten Briefe über den Stillstand in dem Erscheinen des Hauptwerkes „Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten voneinander“ erhebt: „Da der Verleger nicht fortsetzen will, bis er sich überzeugt, dass die Kosten gedeckt werden, so habe ich auch noch nicht Hand an den zweiten Teil gelegt. Welch ein trauriges Loos, sein Leben an ein Werk gesetzt zu haben, das nicht zustande kommen kann, oder wenn es fertig ist, kaum beachtet (wohl aber benutzt) wird“. Das klassische Buch hat die geplante Fortsetzung niemals gefunden, trotzdem Steiner noch 1853 an die Redaktion des 2. Teiles dachte.

Die Gesamtausgaben, wie wir sie jetzt von den Schriften einer grössern Zahl deutscher, französischer, englischer und italienischer Mathematiker besitzen, gewähren den grossen Vorteil, dass man die einzelnen Arbeiten nicht mehr mühsam in den Fachzeitschriften, die teilweise schwer zugänglich sind, aufsuchen muss; dazu tritt noch der besondere Reiz, dass man dem Entwicklungsgang des Verfassers im einzelnen folgen kann und zu ihm in ein gewissermassen persönliches Verhältnis tritt. Dies trifft auch bei Cremona zu, um so mehr als durch die dem 3. Bande vorangestellte, von Bertini verfasste Biographie der Zusammenhang der Hauptschriften unter sich und mit den äussern Lebensumständen deutlich zutage tritt. Zur Ergänzung können vorzugsweise die Nachrufe dienen, welche Veronese, Loria und Berzolari (sie sind neben andern bei Bertini zitiert) veröffentlicht haben. Durch diese Darstellungen ist die wissenschaftliche Arbeit und die Stellung Cremona's gegenüber Vorgängern, Zeitgenossen und Nachfolgern ausführlich und sachkundig dargelegt, auch liegt in ihnen eine Fülle von Nachrichten über die Schicksale seiner Jugend und den Aufstieg seines spätern Lebensweges. In der nachfolgenden Besprechung sollen nur einige der hervorragendsten Leistungen Cremona's, soweit dem Berichterstatter ein selbständiges Urteil über dieselben zusteht, hervorgehoben werden; auch die biographischen Notizen sind in möglichst engem Rahmen gehalten.

Die ersten Publikationen Cremona's zeigen, dass er in den damals noch wenig verbreiteten analytisch-geometrischen Methoden von Möbius und Plücker, wie sie durch Salmon auf Grund seiner eigenen und der Cayley'schen Weiterführungen eben in anregenden Lehrbüchern (Conic Sections, Higher plane curves) durchgearbeitet waren, völlig beherrschte. Unter ihnen ragt seine Behandlung der Raumkurven 3. Grades weit hervor; es ist bewunderungswürdig, wie der in den allerbescheidensten, man darf wohl sagen dürftigen Verhältnissen als Gymnasiallehrer in dem weltverlorenen Cremona lebende junge¹⁾ Mathematiker die von Chasles im Novemberheft 1857 des Lionville'schen Journals ohne Beweis veröffentlichten Resultate²⁾ systematisch begründet und erweitert. Den beiden Abhandlungen vom Juni und Oktober 1858 liess er zwei neue folgen, vom März 1860 und April 1861 datiert, die eine entschiedene Wendung zur „reinen“ Geometrie bezeichnen. In der nämlichen Richtung bewegt sich die 1862 in den *Annali di Matematica* erschienene Arbeit über die Raumkurven 4. Grades, durch welche eine einzige Fläche 2. Grades geht.

¹⁾ Er ist „alle ore 13“ am 7. Dezember 1830 geboren.

²⁾ Schon der „Aperçu historique des méthodes en géométrie“ (1837) enthält in Note XXXIII Sätze über diese Kurven.

Sie ist ein Meisterstück nach Inhalt und Form, das spätern Untersuchungen über diesen Gegenstand von Bertini, Rohn, Berzolari etc. als Grundlage gedient hat.

Cremona war 1859 nach der Befreiung der Lombardei von der österreichischen Herrschaft durch die italienische Regierung zum Professor am Lyceum St. Alexander in Mailand ernannt worden und 1860 nach Einverleibung der Romagna wurde ihm die neu gegründete Professur für höhere Geometrie an der Universität Bologna übertragen. Damit war er in eine Stellung gelangt, welche ihm die für die wissenschaftliche Tätigkeit so erwünschte freiere Bewegung gewährte; die 7 Jahre in Bologna bilden denn auch die für sein Schaffen fruchtbarste Periode.

Als Hauptergebnisse derselben dürfen zunächst die Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Kurven und die Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Oberflächen in synthetischer Behandlung bezeichnet werden, welche in den Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften zu Bologna erschienen sind; die Separatabzüge tragen die Jahreszahlen 1862 und 1866. Von besonderer Bedeutung sind die deutschen Ausgaben: „Einleitung“ 1865 und „Grundzüge“ 1870 durch die von Cremona selbst besorgten Zusätze und Berichtigungen, über welche der Herausgeber beiderorts in seinen einleitenden Worten Auskunft gibt. Die hauptsächlichste Bereicherung, welche die Grundzüge erfahren haben, besteht in der Aufnahme der Abhandlung über Flächen 3. Grades, welcher die Berliner Akademie im Jahre 1866 die Hälfte des Steiner-Preises zuerkannt hatte (die andere Hälfte war R. Sturm zugefallen).

Man hat von diesen Lehrbüchern gesagt, dass ihr Inhalt den Titeln insofern nicht entspreche, als die geometrischen Grundlagen derselben auf algebraischen Voraussetzungen beruhen, die nicht durch synthetische Betrachtungen bewiesen sind (und auch nicht in ausreichender Weise bewiesen werden können). Eine besondere Stellung nimmt die in § 2 Nr. 7 der „Einleitung“ gegebene Erklärung projektiver Gebilde¹⁾ ein, die in der Tat nur zutreffend ist, wenn die Zuordnung entsprechender Elemente eine algebraisch darstellbare ist. Es scheint eben nicht möglich zu sein, die Theorie algebraischer Kurven und Flächen höherer Grade ohne einen starken Zusatz analytischer Entwicklungen befriedigend darzustellen.

Trotz dieser Lücken erfüllen die beiden Bücher eine von Fiedler im Vorwort zum 2. Bande der Übersetzung von Salmon's Raum-

¹⁾ Sie rührt her von Chasles, Principe de correspondance entre deux objets variables etc. (1855). Culmann hat das Prinzip zu einem „Beweise des Satzes“ vom Parallelogramm der Kräfte benutzt.

geometrie (1865) ausgesprochene Hoffnung: dass die Vollständigkeit des Materials [die ja überhaupt in den Salmonbüchern angestrebt ist] der Wirksamkeit kurzer aber ganz von dem wissenschaftlichen Standpunkt der lebenden Meister geschriebener Lehrbücher den Boden bereiten könne. Mit Recht sagt Nöther: „Es gibt kein zusammenfassendes rein-geometrisches Werk, das einen weitem und tiefern Einfluss auf die Ausbildung der geometrischen Methoden ausgeübt hätte als Cremona's Schriften über die ebenen Kurven und die Flächen — nur vergleichbar dem Einfluss der Salmon'schen Compendien auf die algebraisch-geometrische Entwicklung.“

Zu den hervorragendsten der in Bologna entstandenen Arbeiten gehören die beiden 1863 und 1865 veröffentlichten über die geometrischen Transformationen ebener Figuren. Sie schliessen sich Untersuchungen von Steiner über eindeutige und reciproke Verwandlungen in der Ebene an, bei denen sich zwei Figuren derart entsprechen, dass jedem Punkte der einen im allgemeinen ein und nur ein Punkt der andern zugehört, während eine Gerade sich in einen Kegelschnitt verwandelt. Steiner hat im § 59 der „Systematischen Entwicklung“ die „schiefe Projektion“ behandelt, durch welche die Gesamtheit der Geraden einer Ebene in ein Kegelschnittnetz mit drei festen Punkten übergeführt wird (wozu sich nach dem Prinzip der Dualität sofort das Gegenstück ergibt).¹⁾ Cremona studiert die Verallgemeinerung, indem er an die Stelle der Kegelschnitte Kurven n^{ten} Grades und Netze, die aus ihnen gebildet sind, treten lässt. Es erscheinen dann ausgezeichnete Punkte (einfache, resp. mehrfache), die allen Kurven eines solchen Netzes gemein sind und die bei richtiger Zählung der Multiplizität $(n^2 - 1)$ Grundpunkte repräsentieren — zwei Kurven des Netzes haben dann im allgemeinen nur noch einen weitem Punkt gemein. Es wird insbesondere auch gezeigt, dass zu einem solchen Netze mit Hülfe seiner Jacobiana ein verwandtes (konjugiertes) gefunden werden kann. — Es ist später von Andern bewiesen worden, dass alle diese sogenannten Cremona-Transformationen sich auf wiederholte Anwendung des Falles $n = 2$ zurückführen lassen.

Neben der „höhern“ Geometrie vertrat Cremona während 6 Jahren (1861—67) auch die „darstellende“. Schon damals lagen Versuche vor, die beiden Gebiete in die naturgemässe innere Verbindung zu bringen: in Italien von Bellavitis (1851), in Deutschland von Pohlke²⁾

¹⁾ In dem oben zitierten Briefe an Jacobi spricht Steiner auch von den Beziehungen dieses § 59 zu den damit zusammenhängenden Arbeiten von Magnus.

²⁾ In einer Notiz Steiners, datirt Paris, 3. August 1853, über das „Was im Winter 1853/54 auszuarbeiten ist“, heisst es: „Avec M. Polqués une Géométrie descriptive“. Das Pohlke'sche Buch ist aber durchaus selbständig geschrieben.

(1860), und für eine solche Vereinigung war Cremona in hervorragender Weise begabt. Er selbst wies später darauf hin, dass die von ihm ausgeführten Grundgedanken auch dem vorzüglichen Werke Fiedlers (1871), zu welchem dessen Verfasser schon seit 1859 einzelne Vorarbeiten hatte erscheinen lassen, das Gepräge geben.

Cremona wurde im Oktober 1867 auf den Vorschlag des Direktors Brioschi mit dem Kurs über höhere Geometrie an dem höhern technischen Institut in Mailand betraut, wo er die neuen graphischen Methoden der Ingenieurwissenschaften, wie sie Culmann geschaffen hatte, vertreten sollte. Aus dieser Aufgabe entsprang die Abhandlung über die reciproken Figuren in der graphischen Statik (1872). Culmann hat sich in der Vorrede zur 2. Auflage der graphischen Statik über die Fortschritte ausgesprochen, welche diese Wissenschaft seit dem Erscheinen der ersten gemacht habe: „Unstreitig fand sie in Italien den günstigsten Boden. Dort hat sie Cremona am Mailänder Polytechnikum eingeführt und zwar in einer hohen Auffassung; er betrachtete sie nicht bloss als praktisches Hilfsmittel, um in gewissen Fällen einige Rechnungen zu ersparen, sondern als den Abschluss der geometrisch-statischen Bildung junger Ingenieure“. Weiterhin folgt eine Vergleichung der Cremona'schen Ableitung der reciproken Figuren aus dem Nullsystem mit derjenigen Maxwell's aus den Polareigenschaften des Rotationsparaboloids, die wesentlich zugunsten der erstern ausfällt.¹⁾

Zur gründlichen Einführung in die graphischen Methoden hat Cremona für die vorbereitenden technischen Institute Italiens Elemente der projektiven Geometrie geschrieben (1873; mit einer stellenweise sehr temperamentvollen Vorrede), denen er Elemente des graphischen Calculs (1874) folgen liess, welche ebenfalls für diese Schulen bestimmt waren. Die beiden Schriften sind in Rücksicht auf ihre besondere Bestimmung nicht in die Gesamtausgabe aufgenommen worden.

Trotz dieser Ablenkungen fand Cremona während seines Mailänder Aufenthaltes immer noch Zeit sich denjenigen wissenschaftlichen Problemen zu widmen, die ihm vor allem am Herzen lagen. Von diesen seien hier die Untersuchungen über die Abbildung algebraischer Flächen erwähnt. Schon in der Berliner Preisschrift (8. Kapitel) findet sich als klassisches Beispiel die Abbildung der Fläche 3. Grades auf die Ebene. Weitere Beispiele sind im 4. Band

¹⁾ Es sei immerhin darauf hingewiesen, dass sich Hauck in dem Aufsatz über die reciproken Figuren der graphischen Statik (Crelle, Bd. 100, pag. 365) mit Beziehung auf die Polemik Culmann's gegen Maxwell sehr anerkennend über diesen ausspricht.

der Mathematischen Annalen gegeben, dann in Abhandlungen über die rationalen Raumtransformationen, wobei nun wieder wie in den frühesten Arbeiten mannigfach analytische Hilfsmittel zugezogen sind.

Cremona wurde zu einer ganz neuen Tätigkeit berufen, als er 1873 nach Rom übersiedelte, wo er die alte päpstliche Ingenieurschule in ein modernes Polytechnikum umgestalten, die Direktion desselben führen und zugleich als Professor der graphischen Statik wirken sollte. Damit war seine eigenste wissenschaftliche Tätigkeit, wenn auch nicht völlig abgebrochen, doch aufs schwerste gestört. Und als er 1877 den Lehrstuhl der graphischen Statik am Polytechnikum mit demjenigen der höhern Mathematik an der Universität Rom vertauschte, in der Meinung, wieder freier über seine Zeit verfügen zu können, bannten ihn die schwierigen staatlichen Aufgaben des nun geeinigten Italiens immer mehr in ihren Kreis.

Schon der 17jährige Jüngling hatte durch seine Teilnahme an dem Freischarenzug gegen die österreichische Herrschaft in Venedig seinen patriotischen Mut bewiesen; die Gewissenhaftigkeit und Tüchtigkeit des Soldaten wurden durch die Beförderung vorerst zum Korporal, dann zum Sergeanten anerkannt. Aber eine grössere Kraftprobe auf seinen innern Wert hatte er zu bestehen, als nach dem unglücklichen Feldzuge er nun seine Studien unter dem alten Bedrucker durchzuführen hatte, während von diesem, dem er feindlich gegenüberstand und der ihm misstraute, seine Zukunft abhängig schien. Was er in der Zeit von 1848 bis 1859 seelisch gelitten, klingt sogar in der Schlussbemerkung zu der Rezension eines geometrischen Schulbuches (Mai 1860) wieder: „Jetzt, wo uns das Fremdjoch nicht mehr auf dem Nacken liegt, um uns die allerelendesten Textbücher aufzuzwingen, die unsere Schulen überschwemmt haben, wäre auch die Zeit gekommen, gewisse mathematische Schundbücher ins Feuer zu werfen“. Und dann, welch stolzes Gefühl des Aufstiegs eines neuen Vaterlandes am Schluss seiner Eröffnungsvorlesung in Bologna (November 1860) in dem Appell an seine Zuhörer: „Die militärischen und wissenschaftlichen Studien werden Euch zu Helfern der Grösse unseres Italiens machen, das in den Verband der mächtigen und freien Nationen eintritt, mit einer einzigen Hauptstadt, Rom, einem einzigen König, Victor Emanuel, mit einem einzigen und grössten Helden, Garibaldi“.

Durch seine Berufung in den Senat (1879) eröffnete sich ihm eine grössere parlamentarische Tätigkeit, deren Pflichten er auch dann, wenn sie zeitraubender Natur waren und Gegenstände betrafen, die ihm ursprünglich ferne lagen, mit peinlichster Gewissenhaftigkeit erfüllte. Das Vertrauen, das er sich dadurch erwarb, kam zum Aus-

druck in seiner Wahl zum Vizepräsidenten, in welcher Stellung er während zwei Jahren den erkrankten Präsidenten zu ersetzen und die Arbeiten der Körperschaft zu leiten hatte. Aber im Mittelpunkt seiner Interessen standen wie im Lehramt nun auch in der staatsmännischen Stellung die Fragen des Unterrichtswesens. So ist es verständlich, dass, als nach dem Sturze Benedetto Cairoli's die Bildung eines neuen Ministeriums an Quintino Sella übertragen wurde, dieser sich an Cremona wandte, um ihn als Unterrichtsminister zu gewinnen. Doch die Sache zerschlug sich:¹⁾ Universität und Polytechnikum hatten das Glück, ihren ausgezeichneten Professor, ihren tatkräftigen Direktor behalten zu dürfen.

Der Mann, der in so mannigfachen Richtungen die Befähigung zur obersten Leitung der Unterrichtsverwaltung dargetan hatte, gelangte erst in seinem 68. Lebensjahre, am 1. Juni 1897 auf diesen Posten, begrüsst von der Hoffnung der Freunde, dass sein Eintritt in das Ministerium die Eröffnung einer schöpferischen Periode bedeuten werde. Aber am 29. desselben Monats fiel das Ministerium und Cremona kehrte zu seinen gewohnten Arbeiten zurück, die ja mannigfach genug ihn für den Rest seines Lebens in Anspruch nahmen. Am 10. Juni 1903 ist er gestorben.

Die Gesamterscheinung des Dahingegangenen ist von seinen Landsleuten in den ihm gewidmeten Gedächtnisreden und biographischen Aufsätzen so einlässlich und so zutreffend geschildert worden, dass ein Fremder nur wenige Züge herausheben und durch seine Erinnerungen bestätigen und beleuchten kann. Hier mag an ein Urteil angeknüpft werden, das der Historiker Ranke in einem Tagebuchblatt vom 26. September 1873 über den Minister Minghetti fixiert hat: „Im vollen Besitze der europäischen Bildung; einer von den Italienern, wie sie Friedrich der Grosse liebte“. Wer mit Cremona längere Zeit verkehrte, so dass unter den Zufälligkeiten des Gespräches nach und nach die bleibenden Züge hervortraten, erkannte auch ihm den vollen Besitz der europäischen Bildung zu. Und der bedeutende Eindruck, den man von seinen vielseitigen, selbständig durchgearbeiteten Kenntnissen sowie von seinen reichen Erfahrungen empfing, wurde durch die Kraft und Klarheit der Gedanken erhöht, mit denen er sie in den Dienst des wiederaufzubauenden Vaterlandes stellte. Gegenüber dieser idealen Auffassung konnte das Bedauern, ihn von der Wissenschaft abgelenkt zu sehen, nicht standhalten.

Es ist bemerkenswert, dass Cremona, der im persönlichen Verkehr frei von jeder Pedanterie und Rechthaberei war, in der Organi-

¹⁾ Das Ablehnungsschreiben Cremona's findet sich in dem oben zitierten Nekrolog Bertini's.

sation des höhern Unterrichtes an einer strengen Ordnung der Studien festhielt.¹⁾ Die neuen Generationen sollten zu ernster Pflichterfüllung angeleitet werden, und er hat gerade an diejenigen, an deren Schicksal er einen besondern persönlichen Anteil nahm, einen strengen Masstab gelegt. In dieser Gesinnung mag er in seiner Denkrede (vom 10. Juni 1900) Beltrami's „ehrenhafte und reine Seele“ als Gegenbild aufgestellt haben zu dem Gedränge der Postulanten an den Türen des Ministeriums und des höhern Unterrichtsrates. Und so wird er nicht nur als ein Mann der Wissenschaft von europäischer Wirkung fortleben, sondern auch als einer der Führer Italiens auf dem Wege, der durch unermüdliche Arbeit und selbstlose Hingabe zu dauernden Erfolgen und glorreichen Zielen führt.

Küsnacht (Zürich), 17. April 1917.

¹⁾ Bei einem gelegentlichen Aufenthalt in Zürich hat er sich auch gegenüber dem damaligen Leiter des eidg. Polytechnikums (Kappeler) ausführlich in dieser Richtung ausgesprochen. In dem grossen Bericht über die Reorganisation der Anstalt (von 1879) wird Cremona ausdrücklich zitiert.